- زمان آزمون ۱۵۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۱۴ تا ۲۵ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

---

۱ پیراهن سلطان هفت دکمه دارد که به ترتیب از بالا به پایین با ۱ تا ۷ شماره‌گذاری شده‌اند. منظور از دو دکمه‌ی **مجاور**، دو دکمه با اختلاف شماره‌ی ۱ است. یک دکمه را **قفل** گوییم، اگر دکمه‌ی مجاور باز نداشته باشد. در ابتدا تمام دکمه‌ها باز هستند. سلطان در هر مرحله می‌تواند یکی از دکمه‌های غیر قفل خود را ببندد. سلطان به چند ترتیب مختلف می‌تواند کارش را انجام دهد و به وضعیتی برسد که تمام دکمه‌ها بسته باشند؟

۱) ۶۴ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۲ ۵) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

در آخرین مرحله تنها یک دکمه مانند D برای بستن وجود دارد. از آن جایی که تمام دکمه‌های مجاور D بسته شده‌اند، D در آن لحظه قفل است و نمی‌تواند بسته شود. پس هیچ ترتیبی برای بستن تمام دکمه‌ها وجود ندارد. □

۲ یک جدول ۳×۳ داریم. می‌خواهیم هر خانه از جدول به جز خانه‌ی بالا ــ راست را با قرمز یا آبی رنگ کنیم. پس از رنگ‌آمیزی، متحرکی از خانه‌ی پایین ــ چپ جدول آغاز می‌کند و در هر مرحله، اگر در خانه‌ی آبی باشد یک واحد به راست و در غیر این صورت یک واحد به بالا می‌رود (ممکن است متحرک از جدول خارج شود). به چند طریق می‌توان خانه‌های جدول را رنگ کرد، طوری که متحرک پس از تعدادی گام به خانه‌ی بالا ــ راست برسد؟

۱) ۳۲۰ ۲) ۶ ۳) ۹۶ ۴) ۲۰ ۵) ۱۶

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

فرض کنید متحرک با مسیری به خانه‌ی بالا ــ راست برسد. رنگ خانه‌های مسیر به طور یکتا تعیین می‌شود. رنگ بقیه‌ی خانه‌ها نیز تأثیری در طی کردن مسیر ندارد و هر چیزی می‌تواند باشد.
انتخاب مسیر و رنگ‌آمیزی خانه‌های آن $\binom{۴}{۲}$ و رنگ بقیه‌ی خانه‌ها $۲^{۴}$ حالت دارد. پس پاسخ برابر $\binom{۴}{۲} \times ۲^{۴} = ۹۶$ است. □

۳ سیستم عاملی می‌خواهد دو برنامه‌ی زیر را با هم اجرا کند ولی تنها یک پردازنده در اختیار دارد؛ بنابراین در هر مرحله یکی از برنامه‌ها را انتخاب کرده و نخستین خط اجرا نشده‌ی آن را اجرا می‌کند. پیش از شروع اجرای دو برنامه، مقدار متغیر a برابر صفر است. در چند ترتیب مختلف از اجرای خطوط دو برنامه، مقدار متغیر a در انتها برابر دو خواهد شد؟

برنامه‌ی اول:

۱. مقدار متغیر a را در متغیر b بریز.
۲. به مقدار متغیر b یک واحد اضافه کن.
۳. مقدار متغیر b را در متغیر a بریز.

برنامه‌ی دوم:

۱. مقدار متغیر a را در متغیر c بریز.
۲. به مقدار متغیر c یک واحد اضافه کن.
۳. مقدار متغیر c را در متغیر a بریز.

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰ ۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

انتخاب نخستین خط برای اجرا دو حالت دارد (خط اول یکی از دو برنامه). بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید در مرحله‌ی اول، خط اول از برنامه‌ی اول اجرا شود. تنها روش مطلوب، اجرای تمام خطوط برنامه‌ی اول قبل از برنامه‌ی دوم است، زیرا اگر خط اول از برنامه‌ی دوم را زودتر از خط سوم از برنامه‌ی اول انتخاب کنیم، مقدار متغیر a در تمام حالات در انتها برابر ۱ خواهد شد. بنابراین پاسخ مسئله برابر ۲ است. □

۴ منظور از **رشته**، کلمه‌ای با حروف a، b و c است. هر گاه رشته‌ی X از تعدادی (حداقل یک) حرف متوالی رشته‌ی Y به دست آید، گوییم X **زیررشته‌ی** Y است. برای مثال aab یک زیررشته از $caabca$ است، در حالی که aba زیررشته‌ی آن نیست. یک رشته را **مختلف‌النامبر** گوییم، هر گاه **تعداد** a ها، **تعداد** b ها و **تعداد** c ها در آن دوبه‌دو متفاوت باشند. برای مثال aab مختلف‌النامبر است، اما $aacc$ مختلف‌النامبر نیست. چند رشته‌ی ۱۰۰ حرفی وجود دارد که زیررشته‌ی مختلف‌النامبر نداشته باشد؟

۱) ۹ ۲) ۰ ۳) ۳ ۴) ۶ ۵) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

لم ۱: در هیچ سه حرف متوالی از رشته نباید حرفی با دقیقاً دو تکرار موجود باشد، زیرا همین سه حرف، یک زیررشته‌ی مختلف‌النامبر تشکیل خواهند داد.
برای یافتن رشته‌های مطلوب، دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

- *دو حرف اول رشته برابر باشند:* در این حالت انتخاب دو حرف اول رشته ۳ حالت دارد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید دو حرف اول رشته a باشد. با توجه به لم ۱، حروف سوم تا صدم رشته باید برابر a باشند. از طرفی رشته‌ی ساخته شده زیررشته‌ی مختلف‌النامبر ندارد، پس رشته‌ای مطلوب است.
- *دو حرف اول رشته برابر نباشند:* در این حالت انتخاب دو حرف اول رشته $۶ = ۲ \times ۳$ حالت دارد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید دو حرف اول رشته ab باشد. در این صورت با توجه به لم ۱ حروف سوم تا صدم رشته حداکثر یک حالت دارند و رشته فقط می‌تواند به شکل

$$abcabc\ldots$$

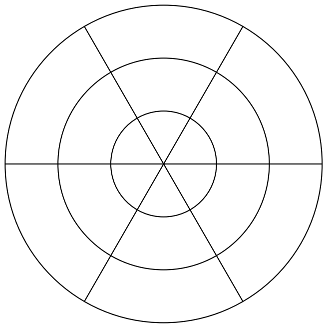
باشد. از طرفی این رشته، زیررشته‌ی مختلف‌النامبر ندارد، پس رشته‌ای مطلوب است.

پس پاسخ برابر $۹ = ۶ + ۳$ است. □

۵ شکل زیر از سه لایه و شش قطاع تشکیل شده است که ۱۸ خانه‌ی متفاوت ساخته‌اند. می‌خواهیم خانه‌ها را با اعداد ۱ تا ۱۸ شماره‌گذاری کنیم، طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- هیچ لایه‌ای نداشته باشیم که ضرب اعداد خانه‌های آن بر ۲۶ یا ۳۹ بخش‌پذیر باشد.
- ضرب اعداد هر قطاع بر ۶ بخش‌پذیر باشد.

به چند طریق این کار ممکن است؟



۱) ۰ ۲) $(۶!)^۳ \times ۲^۶ \times (۳!)^۶$ ۳) $(۶!)^۳ \times ۳$ ۴) $(۶!)^۳ \times ۲^۶$ ۵) $(۶!)^۳ \times ۲^۶ \times ۳$

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

تنها پنج عدد (۱، ۵، ۷، ۱۱ و ۱۷) می‌توانند با ۱۳ هم‌لایه باشند؛ پس این اعداد باید به همراه ۱۳ در یک لایه قرار بگیرند. انتخاب لایه‌ی آن‌ها ۳ و ترتیب قرارگیری آن‌ها در خانه‌های لایه !۶ حالت دارد. پس از چیدن این شش عدد، شرط یکم گفته شده در صورت سوال برقرار خواهد شد.

در شرط دوم صورت سوال گفته شده ضرب اعداد هر قطاع باید مضرب شش باشد. از آن‌جایی که دقیقاً شش عدد مضرب ۳ وجود دارد؛ پس این اعداد باید در قطاع‌های مختلفی قرار بگیرند. ترتیب قرارگیری این شش عدد در قطاع‌های مختلف !۶ و انتخاب خانه‌ی اعداد از قطاع‌ها $۲^۶$ حالت دارد. شش عدد باقی‌مانده نیز همگی زوج هستند و به هر صورتی (!۶ حالت) که در شش خانه‌ی باقی‌مانده قرار بگیرند، شرط دوم صورت سوال برقرار خواهد شد.

پس پاسخ برابر

$$(۶!)^۳ \times ۲^۶ \times ۳$$

است. □

۶ مهدی می‌خواهد خانه‌های یک جدول ۳ × ۳ را با اعداد صحیح ۰ تا ۴ پر کند، طوری که عدد هر خانه برابر با باقی‌مانده‌ی جمع اعداد همسایه‌هایش در تقسیم بر ۵ باشد (دو خانه **همسایه** هستند، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند). در ابتدا مرتضی یک عدد صحیح x از ۰ تا ۴ انتخاب می‌کند و آن را در هر چهار خانه‌ی گوشه‌ی جدول قرار می‌دهد. مهدی چند راه برای پر کردن پنج خانه‌ی خالی جدول دارد؟

۱) ۳۱۲۵ ۲) تعداد راه‌ها وابسته به x است. ۳) ۱ ۴) ۲۵ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

فرض کنید جدول به صورت زیر پر شده است:

x	b	x
e	a	c
x	d	x

مقدار a به‌صورت یکتا به دست می‌آید:

$$a \overset{۵}{\equiv} b+c+d+e \overset{۵}{\equiv} ۴(a+۲x) \overset{۵}{\equiv} ۴a+۳x$$
$$\Rightarrow ۲a \overset{۵}{\equiv} ۳x \Rightarrow a \overset{۵}{\equiv} ۴x$$

پس از مشخص شدن مقدار a، مقادیر b، c، d و e نیز به سادگی از روی همسایه‌ها مشخص می‌شوند، برای مثال:

$$b \overset{۵}{\equiv} a+۲x \overset{۵}{\equiv} ۶x \overset{۵}{\equiv} x$$

از طرفی مقدار هر خانه‌ی گوشه نیز باید با جمع همسایه‌هایش در پیمانه‌ی ۵ برابر باشد، پس:

$$x \overset{۵}{\equiv} ۲x$$

که این عبارت تنها به ازای $x = ۰$ درست است و به ازای $x = ۱, ۲, ۳, ۴$ درست نیست. پس پاسخ به ازای $x = ۰$ برابر ۱ و به ازای بقیه‌ی x ها برابر ۰ است؛ یعنی پاسخ به x وابسته است. □

۷ جدول زیر را در نظر بگیرید. به خانه‌های شامل دایره‌ی توخالی، **مولد** می‌گوییم. می‌خواهیم، از خانه‌ی «آ» به خانه‌ی «ب» برسیم. ما مجاز به حرکت در چهار جهت اصلی هستیم، با این شرط که اگر بخواهیم در جهتی حرکت کنیم، باید در پشت سر خانه‌ی کنونی (بلافاصله یا با فاصله) خانه‌ی مولدی قرار داشته باشد. به طور مثال حرکت اول حتماً به سمت راست است. چند راه برای رفتن از خانه‌ی «آ» به خانه‌ی «ب» وجود دارد، طوری که هر خانه را حداکثر یک بار ببینیم؟

				○	
	○	آ			
					○
○			ب		
					○
	○				

۱) ۲　　۲) ۱　　۳) ۴　　۴) ۰　　۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

به خانه‌هایی که بخشی از مرز جدول را تشکیل می‌دهند، خانه‌های **حاشیه‌ای** می‌گوییم. اگر در مرحله‌ای به یک خانه‌ی حاشیه‌ای برویم، دیگر نمی‌توانیم به خانه‌های غیر حاشیه‌ای برگردیم. پس در مسیرهای «آ» به «ب» رفتن به خانه‌های حاشیه‌ای مجاز نیست.
با توجه به گزاره‌ی گفته شده، سه گام نخست مسیر به طور یکتا به ترتیب راست، راست و پایین است تا به خانه‌ی A برسیم. در خانه‌ی A دو انتخاب داریم:

- *رفتن به پایین*: در این صورت ادامه‌ی مسیر به طور یکتا با گام‌های پایین، چپ، چپ، چپ، بالا، راست، راست و راست تکمیل خواهد شد.

- رفتن به چپ: در این صورت ادامه‌ی مسیر به طور یکتا با گام‌های چپ، چپ، پایین، راست و راست تکمیل خواهد شد.

				○	
	○	آ			
				A	○
○			ب		
					○
	○				

پس پاسخ برابر ۲ است. □

۸ سعید و حسام یک بازی فکری را سه دست انجام می‌دهند و در نهایت کسی برنده می‌شود که حداقل دو دست بازی را برده باشد. در هر دست، احتمال برد حسام a و احتمال برد سعید $۱ - a$ است. احتمال برنده شدن حسام را در کل بازی p در نظر بگیرید. حال فرض کنید این دو نفر، دو دست از بازی را انجام داده‌اند و سعید، دقیقاً یک دست را برده باشد؛ احتمال برنده شدن حسام را در کل بازی با شرایط جدید p' در نظر بگیرید. شرط لازم و کافی برای این که $p' > p$ باشد، چیست؟

۱) $a < \frac{۱}{۵}$ ۲) $a < \frac{۱}{۲}$ ۳) $a < \frac{۲}{۳}$ ۴) هیچ‌کدام ۵) $a < \frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

احتمال برنده شدن حسام در کل بازی را با حالت‌بندی روی تعداد بردهایش (۲ یا ۳) حساب می‌کنیم:

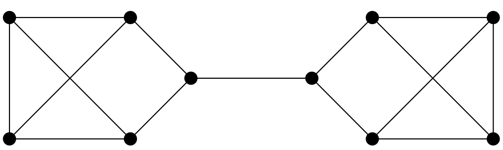
$$p = a^۳ + ۳(۱ - a)a^۲$$

احتمال برنده شدن حسام در حالت جدید (p') نیز به وضوح برابر a است، زیرا حسام برای بردن کل بازی، باید در دست باقی‌مانده برنده شود. پس:

$$p' > p \Rightarrow a > a^۳ + ۳(۱ - a)a^۲ \Rightarrow ۲a^۲ - ۳a + ۱ > ۰ \Rightarrow a < \frac{۱}{۲}$$

□

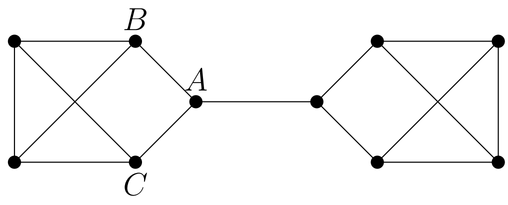
۹ در شکل زیر به هر یک از ۱۰ نقطه‌ی مشخص شده یک **رأس** می‌گوییم. دو رأس را **مجاور** گوییم، اگر با یک پاره‌خط مستقیم به هم وصل باشند. به چند طریق می‌توان رأس‌ها را با قرمز، آبی و سبز رنگ کرد، طوری که هر دو رأس مجاور، ناهم‌رنگ باشند؟ الزامی به استفاده از هر سه رنگ نیست.



۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۹۶ ۴) ۰ ۵) ۴۸

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

دو سر یال وسط شکل به ۲ × ۳ حالت رنگ می‌شوند.

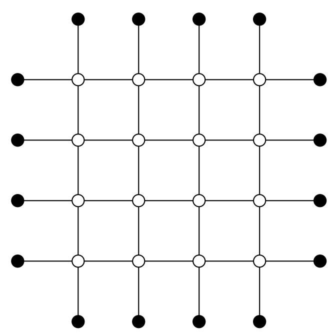


رأس‌های B و C باید هم‌رنگ باشند، در غیر این صورت دو رأس سمت چپ شکل حالتی برای رنگ‌آمیزی نخواهند داشت. انتخاب رنگ برای رأس‌های B و C دو حالت دارد (رنگی به جز رنگ استفاده شده برای رأس A). دو رأس سمت چپ شکل نیز به دو حالت هر کدام یکی از رنگ‌های باقی‌مانده را اختیار می‌کنند. پس رنگ‌آمیزی چهار رأس سمت چپ شکل ۲ × ۲ حالت دارد. با همین استدلال، چهار رأس سمت راست شکل نیز به ۴ حالت رنگ‌آمیزی می‌شوند. پس پاسخ برابر

$$۶ \times ۴^۲ = ۹۶$$

است. □

۱۰ در ابتدا در هر نقطه‌ی توپُر از شکل زیر یک متحرک قرار دارد. آن‌ها قرار است طبق الگوریتمی مشخص حرکت کنند. سرعت حرکت متحرک‌ها برابر و ثابت است. هم‌چنین همگی از لحظه‌ی یکسانی شروع به حرکت می‌کنند. پس از آغاز فرآیند، هر متحرک به محض این که به یک نقطه‌ی توپر برسد، می‌ایستد.



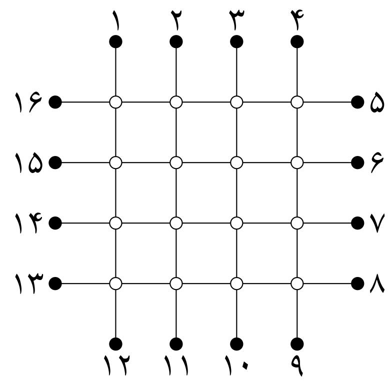
به ازای کدام موارد از الگوریتم‌های زیر، پس از ایستادن تمام متحرک‌ها، در هر نقطه‌ی توپر یک متحرک وجود خواهد داشت؟

- الگوریتم (آ): هر متحرک هنگام رسیدن به هر نقطه‌ی توخالی به راست می‌پیچد و به حرکت ادامه می‌دهد.
- الگوریتم (ب): هر متحرک هنگام رسیدن به اولین نقطه‌ی توخالی به راست می‌پیچد، هنگام رسیدن به دومین نقطه‌ی توخالی به چپ می‌پیچد و همین طور یک در میان با چرخش به راست و چپ ادامه می‌دهد.
- الگوریتم (پ): هر متحرک هنگام رسیدن به هر خانه‌ی تو خالی، اگر در آن لحظه متحرک دیگری را نیز در همان نقطه ببیند، به سمت راست می‌پیچد؛ در غیر این صورت مستقیم می‌رود.

۱) آ و پ   ۲) آ و ب   ۳) هر سه مورد   ۴) هیچکدام   ۵) آ

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

متحرک‌ها را به شکل زیر شماره‌گذاری می‌کنیم:



- در الگوریتم (آ) به ازای هر $2 \leqslant i \leqslant 16$ متحرک i در انتها به نقطه‌ی آغازین متحرک $i-1$ خواهد رفت. متحرک ۱ نیز به نقطه‌ی آغازین متحرک ۱۶ می‌رود. پس الگوریتم (آ) مطلوب است.
- در الگوریتم (ب) متحرک‌های ۱، ۲، ۳، ۴ در انتها به ترتیب به نقطه‌ی آغازین متحرک‌های ۱۶، ۱۵، ۱۴ و ۱۳ خواهند رفت. به همین ترتیب متحرک‌های هر یک از دسته‌های ۵ تا ۸، ۹ تا ۱۲ و ۱۳ تا ۱۶ نیز به چهار نقطه‌ی متمایز دسته‌ی متناظر خواهند رفت. پس الگوریتم (ب) نیز مطلوب است.
- در الگوریتم (پ) متحرک‌های ۱۳ و ۱۶ هر دو در نقطه‌ی آغازین متحرک ۱۲ کار را تمام خواهند کرد. پس الگوریتم (پ) مطلوب نیست.

□

۱۱ مهره‌ی **رخ** در بازی شطرنج، خانه‌های هم‌سطر و هم‌ستون خود را تهدید می‌کند. می‌خواهیم در برخی از خانه‌های یک صفحه شطرنج 8×8 مهره‌ی رخ قرار دهیم، طوری که هر مهره، حداکثر یک مهره‌ی دیگر را تهدید کند. حداکثر چند مهره می‌توانیم بگذاریم؟

۱) ۱۰   ۲) ۱۲   ۳) ۱۵   ۴) ۹   ۵) ۸

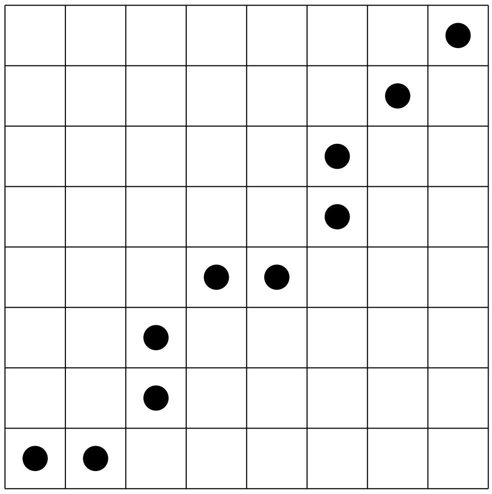
پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

ابتدا ثابت می‌کنیم پاسخ نمی‌تواند از ۱۰ بیش‌تر باشد. به ازای هر رخ و هر سطر، به صورت زیر عددی به آن رخ نسبت می‌دهیم:

> اگر در آن سطر، رخ دیگری موجود بود، به آن رخ عدد ۱ و در غیر این صورت عدد ۲ را نسبت می‌دهیم.

به ازای هر رخ و هر ستون نیز کار مشابهی را انجام می‌دهیم. به ازای هر سطر یا هر ستون، مجموعاً عدد ۲ به رخ‌ها نسبت داده شده است، پس مجموع اعداد تمام رخ‌ها (به ازای سطرها و ستون‌ها) برابر ۳۲ است. از طرفی

مجموع دو عدد نسبت داده شده به هر رخ حداقل ۳ است، زیرا نمی‌تواند هم در سطر و هم در ستونش رخ دیگری موجود باشد. پس حداکثر $۱۰ = \lfloor \frac{۳۲}{۳} \rfloor$ مهره‌ی رخ خواهیم داشت.
برای ۱۰ رخ نیز جدول زیر وجود دارد:



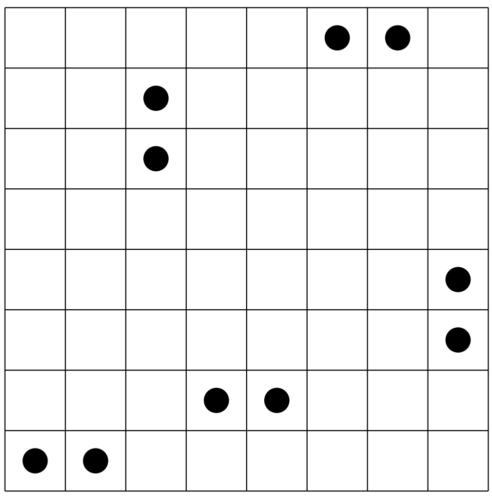
□

۱۲ مهره‌ی **وزیر** در بازی شطرنج، خانه‌های هم‌سطر، هم‌ستون و هم‌قطر خود را تهدید می‌کند. همان مسئله‌ی قبل را حل کنید، با این تفاوت که این بار به جای مهره‌های رخ می‌خواهیم از مهره‌های وزیر استفاده کنیم.

۱) ۸   ۲) ۹   ۳) ۱۲   ۴) ۱۰   ۵) ۱۵

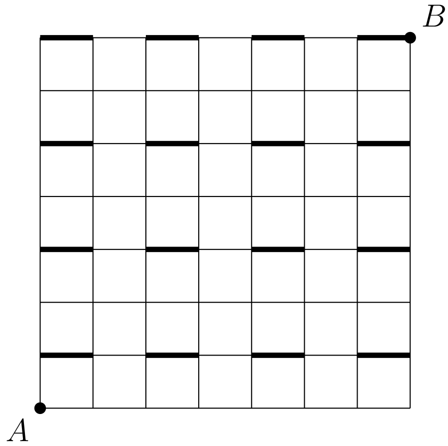
پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

با استدلالی مشابه سوال قبل، ثابت می‌شود تعداد وزیرها نمی‌تواند از ۱۰ بیش‌تر باشد. برای ۱۰ وزیر نیز جدول زیر وجود دارد:



□

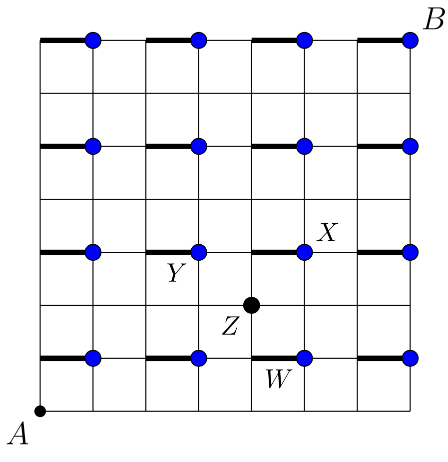
۱۳ سلطان در ابتدا در نقطه‌ی A از شکل زیر قرار دارد و کلاهش روی سرش است. او هر مرحله می‌تواند با حرکت روی خطوط، یک واحد به راست یا یک واحد به بالا برود. سلطان به هنگام گذر از پاره‌خط‌های پررنگ، وضعیت کلاه روی سرش را تغییر می‌دهد؛ یعنی اگر کلاه روی سرش باشد آن را برمی‌دارد و در غیر این صورت آن را روی سرش می‌گذارد. سلطان به چند طریق می‌تواند با تعدادی گام به نقطه‌ی B برسد، طوری که در نقطه‌ی B کلاه روی سرش باشد؟



۱) $\binom{12}{6}$ ۲) $\binom{13}{6}$ ۳) $\binom{10}{5} \times 4$ ۴) $\frac{\binom{14}{7}}{2}$ ۵) $\binom{12}{6} \times 2$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

تناظری یک به یک میان مسیرهای مطلوب از A به B و مسیرهای نامطلوب از A به B برقرار می‌کنیم و نتیجه خواهد شد پاسخ برابر نصف مسیرها یا $\frac{\binom{14}{7}}{2}$ است. شکل زیر را در نظر بگیرید:



یک مسیر دل‌خواه از A به B در نظر بگیرید. این مسیر دست کم یک نقطه‌ی آبی را می‌بیند، زیرا انتهای مسیر قطعاً آبی است. اولین باری که این مسیر، یک نقطه‌ی آبی را می‌بیند در نظر گرفته و آن نقطه را X بنامید. یک نمونه از X در شکل بالا نشان داده شده است. نقاط Y، Z و W را به ترتیب نقاط دو واحد چپ، چپ-پایین و دو واحد پایین نسبت به X در نظر می‌گیریم. مسیر، دو مرحله قبل از رسیدن به X در یکی از نقاط Y، Z و W بوده است. از آن جایی که X نخستین نقطه‌ی آبی مسیر می‌باشد، پس مسیر در دو مرحله قبل حتماً روی Z بوده

است. حال اگر دو گام از Z به X به ترتیب بالا و راست باشد، آن را به صورت راست و بالا طی کنید و بالعکس. به این ترتیب، مسیرهای مطلوب و نامطلوب به هم متناظر می‌شوند. □

فرض کنید دنباله‌ای از اعداد طبیعی داریم. در هر مرحله می‌توانیم دو عدد متوالی از دنباله انتخاب کرده، یکی از آن‌ها را یک واحد افزایش و دیگری را یک واحد کاهش دهیم (پس از انجام مرحله، اعداد دنباله باید مثبت بمانند). به این عمل **ارتودنسی** می‌گوییم! برای مثال دنباله‌ی $\langle ۱, ۳, ۵, ۲, ۴\rangle$ با یک عمل ارتودنسی می‌تواند به $\langle ۱, ۳, ۶, ۱, ۴\rangle$ تبدیل شود. به یک دنباله **صاف و صوف** گوییم، اگر تمام اعضای آن ۳ باشند.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۱۴ کدام یک از دنباله‌های زیر، با تعداد کم‌تری عمل ارتودنسی می‌توانند صاف و صوف شوند؟

۱) $\langle ۳, ۱, ۳, ۵, ۳\rangle$ ۲) $\langle ۲, ۵, ۱, ۴, ۳\rangle$ ۳) $\langle ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\rangle$ ۴) $\langle ۳, ۲, ۲, ۴, ۴\rangle$ ۵) $\langle ۲, ۳, ۳, ۳, ۴\rangle$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

دنباله‌ی $\langle ۲, ۵, ۱, ۴, ۳\rangle$ با سه گام به شکل زیر صاف و صوف می‌شود:

$$\langle \underline{۲, ۵}, ۱, ۴, ۳\rangle \rightarrow \langle ۳, \underline{۴, ۱}, ۴, ۳\rangle \rightarrow \langle ۳, ۳, \underline{۲, ۴}, ۳\rangle \rightarrow \langle ۳, ۳, ۳, ۳, ۳\rangle$$

برای سایر گزینه‌ها دست کم چهار گام لازم است:

- دنباله‌ی $\langle ۲, ۳, ۳, ۳, ۴\rangle$ را در نظر بگیرید. به ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۴$ دست کم در یک مرحله باید عناصر iاُم و $i+۱$اُم را انتخاب کنیم، زیرا در غیر این صورت عناصر یکم تا iاُم باید مستقل از بقیه‌ی دنباله صاف و صوف شوند، در حالی که مجموع اعدادشان مضرب ۳ نیست. پس دست کم چهار گام نیاز داریم.
- دنباله‌ی $\langle ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\rangle$ را در نظر بگیرید. باید دست کم در دو مرحله عنصر یکم تغییر پیدا کند تا به ۳ برسد. با همین استدلال باید دست کم در دو مرحله عنصر پنجم دنباله را تغییر دهیم. عناصر یکم و پنجم به طور همزمان نمی‌توانند تغییر پیدا کنند. پس دست کم چهار گام نیاز داریم.
- دنباله‌ی $\langle ۳, ۱, ۳, ۵, ۳\rangle$ را در نظر بگیرید. باید دست کم در دو مرحله عنصر دوم تغییر پیدا کند تا به ۳ برسد. با همین استدلال باید دست کم در دو مرحله عنصر چهارم دنباله را تغییر دهیم. عناصر دوم و چهارم به طور همزمان نمی‌توانند تغییر پیدا کنند. پس دست کم چهار گام نیاز داریم.
- دنباله‌ی $\langle ۳, ۲, ۲, ۴, ۴\rangle$ را در نظر بگیرید. به ازای هر $۲ \leqslant i \leqslant ۴$ دست کم در یک مرحله باید عناصر iاُم و $i+۱$اُم را انتخاب کنیم، زیرا در غیر این صورت عناصر $i+۱$اُم تا پنجم باید مستقل از بقیه‌ی دنباله صاف و صوف شوند، در حالی که مجموع اعدادشان مضرب ۳ نیست. از طرفی اگر فقط این سه تغییر را انجام دهیم، به دنباله‌ی صاف و صوف نمی‌رسیم. پس دست کم چهار گام نیاز داریم.

□

۱۵ چند دنباله‌ی پنج عضوی از اعداد طبیعی وجود دارد که می‌توانند با تعدادی مرحله، صاف و صوف شوند؟

۱) ۳۱۲۵ ۲) ۳۰۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴۳ ۵) ۱۰۰۱

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

ابتدا ثابت می‌کنیم هر دنباله‌ی n عضوی با مجموع اعضای ۳n می‌تواند با تعدادی مرحله صاف و صوف شود. فرض کنید زیردنباله‌ای متوالی با k عضو به شکل $\langle a, ۳, ۳, \ldots, ۳, b\rangle$ داریم که $a > ۳ > b$ است. با $k-۱$ مرحله که در مرحله‌ی iاُم عناصر iاُم و $i+۱$اُم انتخاب شده، یک واحد از عنصر iاُم کم و یک واحد به عنصر $i+۱$اُم اضافه شود، زیردنباله به $\langle a-۱, ۳, ۳, \ldots, ۳, b+۱\rangle$ تبدیل می‌شود و در تمام مراحل اعداد مثبت می‌مانند. برای زیردنباله‌های مشابه که $a < ۳ < b$ نیز می‌توان به روش مشابه آن را به $\langle a+۱, ۳, ۳, \ldots, ۳, b-۱\rangle$ تبدیل کرد. تا زمانی که دنباله صاف و صوف نشده، زیردنباله‌ای متوالی به اشکال گفته شده وجود دارد. کافی است یکی از آن‌ها را انتخاب کرده و به روش گفته شده تغییر دهیم. با این کار «مجموع اختلاف اعداد دنباله از ۳» کم می‌شود. از آن‌جایی که این مقدار از صفر نمی‌تواند کم‌تر باشد، فرآیند پایان‌پذیر است و دنباله صاف و صوف خواهد شد. پس پاسخ برابر تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_۱ + \ldots + x_۵ = ۱۵$ در اعداد طبیعی است که برابر $\binom{۱۴}{۴} = ۱۰۰۱$ می‌باشد. □

۱۶ فرض کنید تعدادی عمل ارتودنسی روی دنباله‌ای انجام شود. گوییم یک عدد در دنباله در حین مراحل **زخمی** شده است، اگر دست کم یک بار افزایش و دست کم یک بار کاهش یافته باشد. چند جایگشت از اعداد ۱ تا ۵ را می‌توان با تعدادی عمل ارتودنسی صاف و صوف کرد، طوری که هیچ عددی در حین مراحل زخمی نشود؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸ ۵) ۱۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

عدد ۵ باید مجاور ۱ باشد، زیرا باید دو بار کاهش یابد و در حالات دیگر این کار ممکن نیست. دو حالت داریم:

- *اعداد ۲ و ۴ نیز مجاورند:* در این صورت جایگشت قابل صاف و صوف شدن به نحو خواسته شده است، زیرا کافی است دو بار عدد ۵ را با عدد ۱ و یک بار عدد ۲ را با عدد ۴ انتخاب کنیم. ابتدا بلوک‌های $\langle ۲, ۴\rangle$ و $\langle ۱, ۵\rangle$ را تشکیل می‌دهیم (به ۲×۲ حالت) و سپس دو بلوک گفته شده و عدد ۳ را به !۳ حالت جایگشت می‌دهیم.
- *اعداد ۲ و ۴ مجاور نیستند:* در این صورت عدد ۲ باید مجاور ۵ و عدد ۱ باید مجاور ۴ باشد. تشکیل بلوک $\langle ۱, ۵\rangle$ دو حالت دارد. سپس بلوک شامل اعداد ۱، ۲، ۴ و ۵ به طور یکتا تشکیل خواهد شد. در انتها بلوک تشکیل شده را به همراه عدد ۳ به دو حالت جایگشت می‌دهیم.

پس پاسخ برابر است با:

$$۲ \times ۲ \times ۳! + ۲ \times ۲ = ۲۸$$

□

منظور از **بیت**، رقم ۰ یا ۱ است. اعمال $\vee$، $\wedge$ و $\oplus$ روی بیت‌ها مطابق جدول زیر تعریف می‌شوند:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \oplus q$
۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۰

بوجی پلکانی به شکل زیر دارد:

a_1						
●	a_2					
	●	a_3				
●		●	a_4			
	●		●	a_5		
●		●		●	a_6	
	●		●		●	a_7

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۱۷ بوجی ابتدا به جای هر یک از a_1 تا a_7 یک بیت می‌گذارد. سپس مقدار هر خانه‌ی دیگر مانند C برابر حاصل عمل $\oplus$ روی خانه‌های بالا و راست C خواهد شد. بوجی به چند طریق می‌تواند کارش را انجام دهد، طوری که مقدار خانه‌ی پایین‌ـچپ پلکان برابر ۱ شود؟ در این مسئله نقاط داخل خانه‌ها تأثیری ندارند.

۱) ۰ ۲) ۶۴ ۳) ۲ ۴) ۸ ۵) ۱۲۶

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

مقدار خانه‌ها بر حسب a_1 تا a_7 به شکل زیر مشخص می‌شود:

a_1						
$a_1 \oplus a_2$	a_2					
$a_1 \oplus a_3$	$a_2 \oplus a_3$	a_3				
$a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4$	$a_2 \oplus a_4$	$a_3 \oplus a_4$	a_4			
$a_1 \oplus a_5$	$a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5$	$a_3 \oplus a_5$	$a_4 \oplus a_5$	a_5		
$a_1 \oplus a_2 \oplus a_5 \oplus a_6$	$a_2 \oplus a_6$	$a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$	$a_4 \oplus a_6$	$a_5 \oplus a_6$	a_6	
$a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7$	$a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7$	$a_3 \oplus a_7$	$a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7$	$a_5 \oplus a_7$	$a_6 \oplus a_7$	a_7

پس در صورتی مقدار خانه‌ی پایین‌ـچپ پلکان برابر ۱ خواهد شد که تعداد فردی از اعداد a_1، a_3، a_5 و a_7 برابر ۱ باشند. کافی است اعداد a_1 تا a_6 را به 2^6 حالت انتخاب کنیم؛ عدد a_7 به طور یکتا مشخص خواهد شد. پس پاسخ برابر ۶۴ است. □

۱۸ بوجی ابتدا به جای هر یک از a_1 تا a_7 یک بیت می‌گذارد. سپس مقدار هر خانه‌ی دیگر مانند C به صورت زیر مشخص می‌شود:

- اگر C نقطه داشته باشد، مقدار آن برابر حاصل عمل $\wedge$ روی خانه‌های بالا و راست C خواهد شد.
- اگر C نقطه نداشته باشد، مقدار آن برابر حاصل عمل $\vee$ روی خانه‌های بالا و راست C خواهد شد.

بوجی به چند طریق می‌تواند کارش را انجام دهد، طوری که مقدار خانه‌ی پایین‌ـچپ پلکان برابر ۱ شود؟

۱) ۱ ۲) ۸۰ ۳) ۱۲۶ ۴) ۱۶ ۵) ۴۸

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

با مشخص کردن مقادیر خانه‌ها بر حسب a_1 تا a_7، مقدار خانه‌ی پایین‌ـچپ پلکان برابر ۱ خواهد شد، اگر و تنها اگر a_4 و هم‌چنین دست کم یکی از a_3 و a_5 برابر ۱ باشند. پس پاسخ برابر

$$2^4 \times (2^2 - 1) \times 1 = 48$$

است. □

۱۹ همان مسئله‌ی قبل را حل کنید، با این تفاوت که عملکرد خانه‌های نقطه‌دار و بدون نقطه جابه‌جا شود؛ یعنی مقدار هر خانه‌ی نقطه‌دار با عمل $\vee$ و مقدار هر خانه‌ی بدون نقطه با عمل $\wedge$ به دست آید.

۱) ۸۰ ۲) ۴۸ ۳) ۶۴ ۴) ۱ ۵) ۱۶

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

با مشخص کردن مقادیر خانه‌ها بر حسب a_1 تا a_7، مقدار خانه‌ی پایین‌ـچپ پلکان برابر ۱ خواهد شد، اگر و تنها اگر a_4 برابر ۱ باشد یا هر دوی a_3 و a_5 برابر ۱ باشند. پس پاسخ برابر است با:

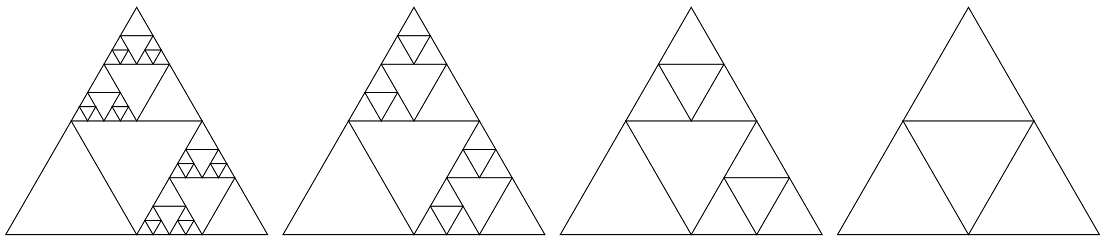
$$2^6 + 2^4 = 80$$

□

مثلثال شکلی است که مرحله به مرحله تکمیل می‌شود. مثلثال در مرحله‌ی صفرم از یک مثلث متساوی‌الاضلاع بزرگ تشکیل شده است که به چهار مثلث متساوی الاضلاع کوچک‌تر و هم‌اندازه تقسیم شده است. به یک مثلث **کال** گوییم، اگر داخل آن کاملاً خالی باشد. مثلثی را که دقیقاً شامل چهار مثلث کال باشد، **جوان** می‌گوییم. در هر مرحله تمام مثلث‌های جوان را در نظر می‌گیریم و عملیات زیر را بر روی هر کدام از آن‌ها انجام می‌دهیم:

> چهار مثلث کال داخل را مثلث‌های بالا، وسط، پایین‌راست و پایین‌چپ می‌نامیم. دو تا از این چهار مثلث، به چهار مثلث کوچک‌تر تقسیم می‌شوند که انتخاب مثلث‌ها بستگی به باقی‌مانده‌ی شماره‌ی مرحله به سه دارد:
>
> - اگر باقی‌مانده برابر یک باشد، مثلث پایین‌راست و مثلث بالا را تقسیم می‌کنیم.
> - اگر باقی‌مانده برابر دو باشد، مثلث پایین‌چپ و مثلث بالا را تقسیم می‌کنیم.
> - اگر باقی‌مانده برابر صفر باشد، مثلث پایین‌راست و مثلث پایین‌چپ را تقسیم می‌کنیم.

سه مرحله‌ی اول در شکل زیر نشان داده شده است:



با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۲۰ پس از مرحله‌ی iاُم، چند مثلث کال وجود دارد؟

۱) $۲^{i+۲}$ ۲) $۳ \times ۲^{i+۱} - ۲$ ۳) $۲^{i+۱} + ۲$ ۴) $۳^{i+۱} + ۱$ ۵) $۲ \times ۳^{i+۱} - ۲$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

به راحتی با استقرا می‌توانید ثابت کنید پس از مرحله‌ی iاُم ۲^i مثلث جوان در شکل وجود دارد؛ از این رو در مرحله‌ی iاُم به تعداد مثلث‌های کال $۲^i \times ۳$ تا اضافه خواهد شد. پس پاسخ برابر است با:

$$۴ + ۳ \times (۲^۱ + ۲^۱ + \ldots + ۲^i) = ۳ \times ۲^{i+۱} - ۲$$

□

۲۱ به یک نقطه در صفحه **تیز** گوییم، اگر رأس دست کم یکی از مثلث‌های شکل باشد (نه لزوماً مثلث‌های کال). پس از مرحله‌ی iاُم، تعداد نقاط تیز چند تاست؟

۱) $۳ \times ۲^{i+۱}$ ۲) $۲ \times ۳^{i+۲} - ۴$ ۳) $۶^{i+۱}$ ۴) $۲ \times ۳^{i+۱}$ ۵) $۲ + ۳^{i+۱}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

هر مثلث کالی که به یک مثلث جوان تبدیل می‌شود، ۳ نقطه‌ی تیز جدید ایجاد می‌کند. پس در مرحله‌ی iاُم به تعداد نقاط تیز ۳×۲^i تا اضافه خواهد شد. پس پاسخ برابر است با:

$$۶ + ۳ \times (۲^۱ + ۲^۱ + \ldots + ۲^i) = ۳ \times ۲^{i+۱}$$

□

۲۲ به یک خط افقی در صفحه **مشغول** گوییم، اگر شامل حداقل یک نقطه‌ی تیز باشد. لزومی ندارد این خط در مثلثال رسم شده باشد. پس از مرحله‌ی ۶اُم، تعداد خط‌های افقی مشغول در صفحه چیست؟

۱) ۶۳ ۲) ۵۳ ۳) ۱۲۸ ۴) ۷۹ ۵) ۵۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

با استقرا می‌توانید ثابت کنید تعداد خطوط افقی مشغول در صفحه‌ی جدید در مراحل مطابق الگوی زیر پیش می‌رود:

$$۲, ۴, ۴, ۸, ۱۶, ۱۶, ۳۲, ۶۴, ۶۴, \ldots$$

پس پاسخ برابر است با:

$$۳ + ۲ + ۴ + ۴ + ۸ + ۱۶ + ۱۶ = ۵۳$$

□

پشته یکی از داده‌ساختارهای پرکاربرد در علوم کامپیوتر است که دنباله‌ای از عناصر را ذخیره می‌کند. تغییرات در عناصر پشته فقط از دو نوع می‌تواند باشد:

- یک عضو به انتهای پشته اضافه شود.
- یک عضو از انتهای پشته حذف شود.

برای مثال فرض کنید پشته‌ای به صورت $\langle ۳, ۴, ۵, ۱ \rangle$ باشد. با اضافه کردن عضوی با مقدار ۷ به انتها، پشته به صورت $\langle ۳, ۴, ۵, ۱, ۷ \rangle$ خواهد شد. هم‌چنین اگر از انتهای پشته‌ی $\langle ۲, ۱۰, ۳ \rangle$ یک عنصر را حذف کنیم، پشته به صورت $\langle ۲, ۱۰ \rangle$ خواهد شد.
اکنون می‌خواهیم یکی از روش‌های ذخیره‌سازی پشته در کامپیوتر را شرح دهیم. در این روش، عمل‌های زیر را می‌توان انجام داد:

- **عمل ساختن پشته:** با دستور $create(S)$ پشته‌ای با نام S ساخته می‌شود و یک خانه در حافظه به آن اختصاص پیدا می‌کند که در ابتدا این خانه مقداری ندارد. اجرای این عمل یک واحد زمان مصرف می‌کند.

$$S\,\square$$

- **عمل اضافه کردن به پشته:** با دستور $push(S,x)$ مقدار x به انتهای پشته‌ی S اضافه می‌شود. دو حالت داریم:

  – حافظه‌ی مربوط به S دارای خانه‌ی خالی باشد؛ در این صورت عدد x در نخستین خانه‌ی خالی حافظه‌ی مربوط به پشته‌ی S قرار می‌گیرد. برای مثال اگر حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $push(S, ۶)$ اجرا شود، حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت راست در خواهد آمد:

S	۲	۳	۵	۱	۳			

S	۲	۳	۵	۱	۳	۶		

  اجرای عمل بالا یک واحد زمان مصرف می‌کند.

  – حافظه‌ی مربوط به S دارای خانه‌ی خالی نباشد؛ در این صورت جایی جدید از حافظه با دو برابر تعداد خانه‌های حافظه‌ی فعلی به S اختصاص داده شده و سپس عمل اضافه کردن انجام می‌شود. برای مثال اگر حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $push(S, ۱۰)$ اجرا شود، حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت راست خواهد آمد:

S	۱	۱	۵	۲

S	۱	۱	۵	۲	۱۰			

  اجرای چنین عملی به اندازه‌ی تعداد خانه‌های حافظه‌ی جدید اختصاص داده شده زمان مصرف می‌کند. برای نمونه، در مثال بالا ۸ واحد زمان مصرف می‌شود.

- **عمل حذف کردن از پشته:** با دستور $pop(S)$ یک عنصر از انتهای پشته‌ی S حذف می‌شود. برای مثال اگر حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $pop(S)$ اجرا شود، حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت راست در خواهد آمد:

S	۲	۳	۵	۲	۱۰	۱۰		

S	۲	۳	۵	۲	۱۰			

  در حالتی که با خالی کردن آخرین خانه‌ی پر حافظه‌ی مربوط به S، دست کم نیمی از خانه‌ها خالی شود، حافظه‌ای جدید به S اختصاص داده می‌شود که خانه‌های خالی آن حذف شده‌اند (مگر اینکه S تنها یک خانه داشته باشد که در این صورت آن خانه حذف نمی‌گردد). برای مثال اگر حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $pop(S)$ اجرا شود، حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت راست در خواهد آمد:

S	۱	۱	۵	۲	۱۰			

S	۱	۱	۵	۲

  اجرای عمل حذف عنصر در حالاتی که تعداد خانه‌ی حافظه‌ی مربوط به S تغییر کند (نصف شود)، به اندازه‌ی تعداد خانه‌های حافظه‌ی جدید اختصاص داده شده زمان مصرف می‌کند. برای نمونه در مثال بالا ۴ واحد زمان مصرف می‌شود. در حالاتی نیز که تعداد خانه‌های حافظه‌ی مربوط به S تغییر نمی‌کند، یک واحد زمان مصرف خواهد شد.

- **عمل کپی:** با دستور $copy(A,B)$ حافظه‌ای به اندازه‌ی حافظه‌ی پشته‌ی A به پشته‌ی B اختصاص می‌یابد و مقادیر خانه‌های حافظه‌ی B نیز برابر مقادیر خانه‌های حافظه‌ی A خواهند شد. اجرای این عمل به اندازه‌ی تعداد خانه‌های حافظه‌ی مربوط به A زمان مصرف می‌کند.

توجه کنید قبل از عملیات روی پشته، باید آن پشته در خطوط قبلی برنامه با دستور $create$ ساخته شده باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۲۳ برنامه‌ی زیر چند واحد زمان مصرف می‌کند؟

$create(X)$
$push(X, ۱)$
$push(X, ۱)$
$push(X, ۱)$
$pop(X)$
$push(X, ۱)$
$push(X, ۱)$
$pop(X)$
$push(X, ۱)$

۱) ۱۴ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۱۱ ۵) ۱۵

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

- در خط یکم برنامه، پشته‌ی X با یک خانه‌ی خالی ساخته می‌شود. اجرای این خط **۱** واحد زمان می‌برد.
- در خط دوم برنامه، در تنها خانه‌ی خالی پشته‌ی X عدد ۱ قرار می‌گیرد. اجرای این خط **۱** واحد زمان می‌برد.
- در خط سوم برنامه، تعداد خانه‌های پشته‌ی X دو برابر شده و سپس در تنها خانه‌ی خالی آن عدد ۱ قرار می‌گیرد. اجرای این خط **۲** واحد زمان می‌برد.
- در خط چهارم برنامه، عداد خانه‌های پشته‌ی X دو برابر شده (از دو به چهار خانه) و سپس در خانه‌ی سوم آن عدد ۱ قرار می‌گیرد. اجرای این خط **۴** واحد زمان می‌برد.
- در خط پنجم برنامه، عدد ۱ از خانه‌ی سوم پشته حذف و به دنبال آن تعداد خانه‌های پشته نیز نصف می‌شود (از چهار به دو خانه). اجرای این خط **۲** واحد زمان می‌برد.
- خط ششم مانند خط چهارم عمل کرده و اجرای آن **۴** واحد زمان می‌برد.
- در خط هفتم برنامه، عدد ۱ در تنها خانه‌ی خالی پشته‌ی X قرار می‌گیرد. اجرای این خط **۱** واحد زمان می‌برد.
- در خط هشتم برنامه، عدد ۱ از آخرین خانه‌ی پر پشته (خانه‌ی چهارم) حذف می‌شود. اجرای این خط **۱** واحد زمان می‌برد.
- خط نهم مانند خط هفتم عمل کرده و اجرای آن **۱** واحد زمان می‌برد.

پس اجرای کل برنامه

$$۱ + ۱ + ۲ + ۴ + ۲ + ۴ + ۱ + ۱ + ۱ = ۱۷$$

واحد زمان مصرف می‌کند. □

۲۴ در برنامه‌ای ابتدا با دستور $create(S)$ پشته‌ی S ساخته می‌شود. در ادامه‌ی این برنامه ۱۳۹۸ دستور $push(S, ۱)$ وجود دارد. این برنامه چند واحد زمان مصرف می‌کند؟

۱) ۵۴۹۳   ۲) ۴۰۹۵   ۳) ۵۴۸۲   ۴) $۲^{۱۳۹۸} + ۱۳۹۷$ ۵) $۲^{۱۳۹۹} + ۱۳۹۹$

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

در مراحل $۲^i + ۱$اُم اندازه‌ی پشته دو برابر شده و $۲^{i+۱}$ واحد زمان مصرف می‌شود. در مراحل دیگر (از جمله مرحله‌ی ساختن پشته با دستور $create$) یک واحد زمان مصرف خواهد شد. پس پاسخ برابر است با:

$$۱ + (۲^۱ + ۲^۲ + \ldots + ۲^{۱۱}) + (۱۳۹۸ - ۱۱) = ۵۴۸۲$$

□

۲۵ یک برنامه حداقل چند خط باید داشته باشد تا در انتهای آن دست کم ۱۰۰ واحد حافظه (در مجموع برای پشته‌ها) وجود داشته باشد؟

۱) ۲۷   ۲) ۳۵   ۳) ۵۱   ۴) ۲۲   ۵) ۲۳

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

می‌توانیم فرض کنیم برنامه‌ی بهینه دستور pop ندارد، زیرا با حذف دستورهای pop حافظه‌ی اشغال شده کم نمی‌شود.
هم‌چنین با بهینه‌سازی موضعی می‌توانید فرض کنید در برنامه‌ی بهینه، تمام عمل‌های $push$ برای یک پشته انجام شده و سپس تمام عمل‌های $copy$ انجام خواهند شد. با حالت‌بندی روی تعداد عمل‌های $push$ اولیه، حالت بهینه به دست خواهد آمد. در حالت بهینه ۹ عمل $push$ برای یک پشته انجام شده، سپس آن را در ۶ پشته‌ی دیگر کپی می‌کنیم. این برنامه ۲۲ خط (۷ خط برای ساختن پشته‌ها، ۹ خط برای اضافه کردن اعضا و ۶ خط برای کپی کردن) خواهد داشت.
□