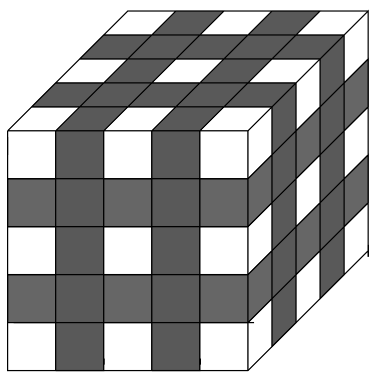
مسأله‌ی ۱ .... ۱۰ نمره

ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n می‌توان 7^n دایره به شعاع واحد را درون یک دایره به شعاع 3^n جا داد به‌طوری که هیچ دو دایره‌ای متقاطع نباشند. (هر دو دایره حداکثر در یک نقطه می‌توانند با هم اشتراک داشته باشند.)

مسأله‌ی ۲ .... ۱۰ نمره

یک مکعب با اضلاع به طول $2n+1$ از $(2n+1)^3$ مکعب با اضلاع به طول واحد تشکیل شده است. وجوه خارجی این مکعب را با نوارهای یک در میان رنگ می‌زنیم. به عنوان مثال در شکل زیر یک مکعب $5 \times 5 \times 5$ به طور مطلوب رنگ آمیزی شده است:



تعداد مکعبهای به ضلع واحد که هیچ یک از وجوه آنها رنگ نشده است را بیابید.

مسأله‌ی ۳ .... ۲۰ نمره

سیزده گلوله سفید رنگ در یک ردیف با فاصله مساوی از یکدیگر قرار داده شده‌اند. A و B بازی زیر را با همدیگر انجام می‌دهند:

ابتدا A تعداد k گلوله سفید رنگ را انتخاب کرده، با رنگ آبی رنگ می‌کند. سپس B تعداد k گلوله سفید رنگ را انتخاب کرده، با رنگ قرمز رنگ می‌کند. پس از این کار A گلوله‌های سفیدی را برمی‌دارد که به یک گلوله آبی نزدیکتر باشند تا به یک گلوله قرمز. همچنین B گلوله‌های سفیدی را برمی‌دارد که به یک گلوله قرمز نزدیکتر باشند تا به یک گلوله آبی. گلوله سفیدی که نزدیکترین فاصله‌اش با گلوله‌های آبی و قرمز مساوی باشد برداشته نمی‌شود. برنده بازی کسی است که بیشترین تعداد گلوله‌های سفید را بردارد.

اثبات کنید که به‌ازای $k = ۱, ۲, ٦$، A می‌تواند در این بازی برنده شود.

در بیان اثبات دقیق بوده و حتی‌الامکان با رسم شکل توضیح دهید.

مسأله‌ی ۴ .... ۱۰ نمره

شش نفر با نامهای A، B، C، D، E و F را در نظر بگیرید. از این افراد تعدادی راستگو و تعدادی دروغگو هستند. برای تشخیص افراد دروغگو سؤال‌هایی از این افراد پرسیده‌ایم. بدین صورت که از فرد X پرسیده‌ایم که آیا Y راستگو است و یا دروغگو. این را هم می‌دانیم که راستگو همواره درست جواب می‌دهد ولی دروغگو ممکن است درست یا نادرست جواب دهد. از این سؤالات اطلاعات زیر بدست آمده است:

۱) A می‌گوید: C دروغگو است.

۲) B می‌گوید: C راستگو و A دروغگو است.

۳) C می‌گوید: D راستگو و E دروغگو است.

۴) D می‌گوید: F راستگو است.

۵) E می‌گوید: F راستگو و C دروغگو است.

٦) F می‌گوید: B دروغگو است.

اگر بدانیم که تعداد دروغگوها از دو نفر بیشتر نیست، افراد دروغگو را با ذکر استدلال مشخص کنید.

مسأله ۵ .... ۲۰ نمره

n یک عدد طبیعی دلخواه است. یک ترتیب دلخواه از اعداد ۱ تا n که در آن هر یک از اعداد ۱ تا n دقیقاً یک بار آمده باشد را یک جایگشت از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ می‌نامیم. می‌گوییم جایگشت $p_۱, p_۲, \ldots, p_n$ در دنباله $a_۱, a_۲, \ldots, a_k$ ظاهر شده است اگر اندیسهای $۱ \le i_۱ < i_۲ < \cdots < i_n \le k$ وجود داشته باشند به طوری که برای

هر $n \leq j \leq ۱$ داشته باشیم $a_{i_j} = p_j$. به‌عنوان مثال جایگشت ۱,۳,۲ در دنباله ۳ , ۲ , ۳ , ۲ , ۱ , ۳ ظاهر شده است.

یک دنباله از اعداد ۱ تا n یک **دنباله جالب** نامیده می‌شود اگر هر جایگشت دلخواهی از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ در این دنباله ظاهر شده باشد.

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n حداقل یک دنباله جالب به طول $۲^n - ۱$ وجود دارد.

مسأله‌ی ۶ .... ۱۵ نمره

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید. این الگوریتم روی سه آرایه a و b و c عملیاتی را انجام می‌دهد. عنصر i ام آرایه a را در این الگوریتم با نماد a[i] نشان داده‌ایم.

۱) عدد n را از ورودی دریافت کن.

۲) برای هر $۰ \leq \texttt{i} \leq ۵$ ، a[i] را مساوی $۵ - \texttt{i}$ و b[i] را مساوی باقیمانده تقسیم $\texttt{i} + ۳$ بر 6 قرار بده.

۳) مراحل زیر را n بار تکرار کن:

۳−۱) برای هر $۰ \leq \texttt{i} \leq ۵$ قرار بده: `c[i] = a[b[i][]`

۳−۲) برای هر $۰ \leq \texttt{i} \leq ۵$ قرار بده: `a[i] = c[i]`

۳−۳) برای هر $۰ \leq \texttt{i} \leq ۵$ قرار بده: `c[i] = b[a[i]]`

۳−۴) برای هر $۰ \leq \texttt{i} \leq ۵$ قرار بده: `b[i] = c[i]`

۴) مقدار a[۱] را چاپ کن.

۵) پایان

اگر ورودی برنامه $n = ۱۳۷۳$ باشد، خروجی برنامه چند است؟

مسأله‌ی ۷ .... ۱۵ نمره

یک صفحه شطرنجی ۴ × ۴ با دو خانه A و B مطابق شکل زیر داده شده است. یک روبات می‌خواهد طبق شرایط زیر از A به B برود:

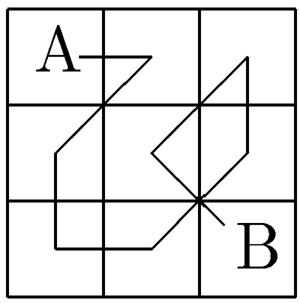
۱) روبات در هر مرحله فقط می‌تواند از یک خانه به یکی از خانه‌های مجاورش (در یکی از جهتهای افقی، عمودی و یا مورب) برود.

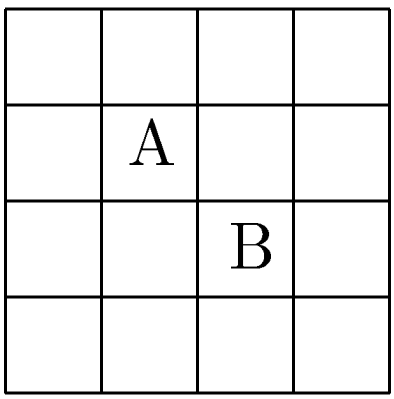
۲) روبات پس از هر حرکت باید جهت حرکتش در مرحله بعد را عوض کند.

۳) روبات در مسیر حرکتش از A به B باید به هر یک از خانه‌ها دقیقاً یک بار برسد.

به عنوان مثال شکل زیر یک مسیر برای رسیدن از A به B در یک صفحه شطرنجی ۳ × ۳ را نشان می‌دهد.

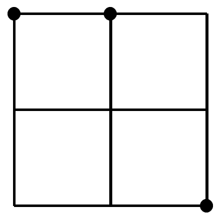
یک مسیر برای رسیدن از A به B در صفحه شطرنجی ۴ × ۴ زیر پیدا کرده، شکل آن را در برگه پاسخنامه رسم کنید.





مسأله‌ی ۸ .... ۱۵ نمره

یک شبکه $n \times n$ مجموعه نقاطی از صفحه است که دارای مختصات صحیح هستند و هر یک از مختصات آنها عددی بزرگتر یا مساوی با ۱ و کوچکتر یا مساوی با n است. یک زیرمجموعه از نقاط یک شبکه را یک می‌نامیم اگر در بین تمام پاره خطهایی که می‌توان بین دو به دوی آنها کشید هیچ دو تایی دارای طول مساوی نباشند. به عنوان مثال شکل زیر یک مجموعه عجیب در شبکه ۳ × ۳ را نشان می‌دهد:



۱) در یک شبکه ۴ × ۴ یک مجموعه عجیب شامل ۴ نقطه پیدا کنید.

۲) ثابت کنید که در هر شبکه $n \times n$ هر مجموعه عجیب حداکثر دارای n نقطه است.

مسأله‌ی ۹ .... ۳۰ نمره

یک ماتریس از اعداد طبیعی داده شده است. ابتدا هریک از سطرهای این ماتریس را از سمت چپ به راست به صورت صعودی مرتب می‌کنیم. سپس هر یک از ستونهای این ماتریس را از بالا به پایین به صورت صعودی مرتب می‌کنیم.

ثابت کنید که در ماتریس حاصل سطرها به صورت صعودی مرتب شده باقی می‌مانند. توضیحات خود را دقیق و با رسم شکل ارائه نمایید.

مسأله‌ی ۱۰ .... ۲۰ نمره

یک صفحه شطرنج 8×8 را در نظر بگیرید. یک قرار دادن ۸ مهره در این صفحه است به طوری که هیچ دو تایی از این مهره‌ها در یک سطر یا در یک ستون قرار نگرفته باشند.

۶۴ عدد صحیح متفاوت را در خانه‌های صفحه شطرنج قرار دهید به طوری که برای هر چیدن پراکنده مجموع اعداد نوشته شده در خانه‌هایی که در آنها مهره قرار گرفته است برابر با مقدار ثابت ۱۰۰ باشد.

مسأله‌ی ۱۱ .... ۳۵ نمره

یک جایگشت $p_1, p_2, \ldots, p_n$ از مجموعه $\{1, 2, \ldots, n\}$ یک نامیده می‌شود اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ شرایط زیر برقرار باشد:

الف) اگر $2i \leq n$ ، آنگاه $p_i \leq p_{2i}$ ،

ب) اگر $2i + 1 \leq n$ ، آنگاه $p_i \leq p_{2i+1}$.

۱) ثابت کنید که اگر p یک جایگشت خوب باشد، برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $p_1 \leq p_i$.

۲) ثابت کنید که اگر p یک جایگشت خوب باشد، تعداد اعضای مجموعه

$$\{i \mid 1 \leq i \leq n, p_i \geq p_2\}$$

بزرگتر یا مساوی با $\frac{n-1}{2}$ است.

۳) اگر $n = 2^k - 1$ باشد، T_k را مساوی با تعداد جایگشتهای خوب مجموعه $\{1, 2, \ldots, n\}$ تعریف می‌کنیم. یک رابطه بازگشتی برای محاسبه T_k پیدا کنید.