حل تشریحی آزمون مرحله‌ی دوم دوازدهمین المپیاد فیزیک

۱ — **الف)** فشار وارد بر یک آینه بر اثر بازتابش نور از روی آن برابر $P = \frac{2I}{c}\cos\theta^2$ است که در حالت تابش عمودی بر سطح آینه مقدار آن $\frac{2I}{c}$ می‌شود (زیرا در این حالت $\theta = 0$ است.). از طرفی شدت نور، I، در فاصله‌ی d از یک منبع برابر توان تابش منبع، L، تقسیم بر مساحت کره‌ای به شعاع d است. بنابراین $I = \frac{L}{4\pi d^2}$ می‌شود. از این رو نیروی وارد بر یک مترمربع از بادبان می‌شود:

$$F = PA = \frac{2I}{c}A = \frac{2(\frac{L}{4\pi d^2})}{c}A = \frac{L}{2\pi d^2 c}A$$

$$= \frac{4 \times 10^{26} \times 1}{2 \times 3/14 \times (2 \times 10^{11})^2 \times 3 \times 10^8}$$

$$= 5/3 \times 10^{-6} N$$

ب) فرض کنیم مساحت سطح بادبان A و چگالی جرمی آن σ باشد، همچنین جرم سفینه $M_c = 20kg$ است. بنابراین جرم کل بادبان و سفینه برابر $(M_c + \sigma A)$ است. نیروی دافعه‌ی تابش برابر $F_r = \frac{2I}{c}A = \frac{LA}{2\pi d^2 c}$ و نیروی جاذبه‌ی گرانشی برابر $F_g = \frac{GM_s(M_c+\sigma A)}{d^2}$ است. از تساوی این دو نیرو داریم:

$$F_g = F_r$$

$$\frac{GM_s(M_c+\sigma A)}{d^2} = \frac{LA}{2\pi d^2 c}$$

$$\Rightarrow \quad GM_sM_c + GM_s\sigma A = \frac{L}{2\pi c}A \quad A = \frac{GM_sM_c}{L/mc - GM_s\sigma} \approx 1/97 \times 10^4 m^2$$

ج) با توجه به قسمت «ب» می‌بینیم که هم نیروی گرانشی و هم نیروی تابشی متناسب با $\frac{1}{d^2}$ هستند و از تساوی آنها d حذف می‌شود و مساحت سطح A بستگی به d ندارد. بنابراین با دو برابر شدن فاصله‌ی سفینه از خورشید، مساحت سطح بادبان همان $1/97 \times 10^4 m^2$ باقی می‌ماند.

د) در حالتی که نور خورشید همواره عمود بر بادبان بتابد، نیروی کل (تابشی و گرانشی) وارد بر بادبان و سفینه با شرایط قسمت «ب» صفر خواهد بود. بنابراین هیچ نیروی خالصی به مجموعه وارد نشده و مطابق قانون اول نیوتن، مسیر حرکت بادبان و سفینه مستقیم‌الخط یکنواخت خواهد بود.

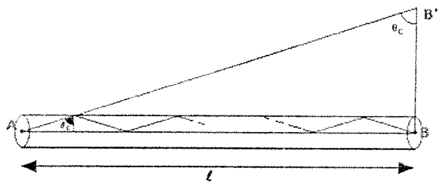
۲) برای حل این مسئله باید زمان رسیدن اولین و آخرین پرتوی یک علامت نوری را به انتهای دیگر تار

نوری محاسبه کنیم. اختلاف این دو زمان پهن شدگی علامت نوری را نشان می‌دهد. برای اینکه گیرنده بتواند به خوبی علایم نوری را تفکیک کند باید بازه‌ی زمانی ارسال علایم (Δt)، بیشتر از این پهن‌شدگی باشد.
زمان رسیدن اولین پرتو که خط مستقیم AB را طی می‌کند برابر است با:

$$t_۱ = \frac{l}{v} = \frac{l}{c/n} = \frac{nl}{c}$$

که در آن $v = \frac{c}{n}$ سرعت نور در تار نوری با ضریب شکست n است و c سرعت نور در خلأ می‌باشد.
همچنین طولانی‌ترین مسیر برای پرتویی که از A به B می‌رسد مسیری است که پرتو تحت زاویه‌ی بحرانی $\hat{\theta}_c$ به سطح جانبی تار نوری برخورد می‌کند. زیرا برای زوایای کوچکتر از آن، پرتو از سطح جانبی تار خارج می‌شود و طول تار را طی نمی‌کند. طول این مسیر معادل با طول AB' است، که مطابق شکل برابر $\overline{AB'} = \frac{l}{\sin\hat{\theta}_c}$ است.
بنابراین مدت زمان طی این پرتو داخل تار نوری برابر است با:

$$t_۲ = \frac{\overline{AB'}}{v} = \frac{l/\sin\hat{\theta}_c}{c/n} = \frac{n^۲ l}{c}$$



که در آن از $\sin\hat{\theta}_c = \frac{۱}{n}$ استفاده شده است. تفاضل این دو زمان برابر است با:

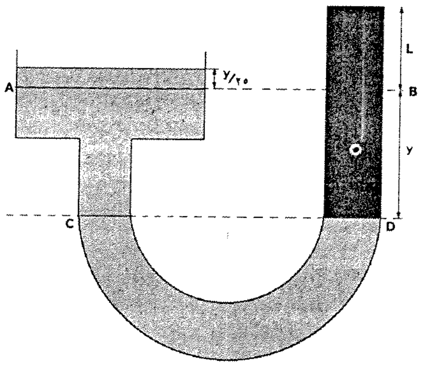
$$t_۲ - t_۱ = \frac{n^۲ l}{c} - \frac{nl}{c} = \frac{nl}{c}(n-۱) = \frac{۱/۳۶ \times ۸۰}{۳ \times ۱۰^۸}(۱/۳۶ - ۱) \approx ۱/۳ \times ۱۰^{-۷} s = ۱۳۰ ns$$

چون پهنای زمانی علامت ورودی یک نانوثانیه است، بنابراین می‌توان از آن در مقابل $۱۳۰ns$ صرف نظر کرد. بنابراین فاصله‌ی ارسال علایم باید تقریباً بیش از $۱۳۰ns$ باشد.

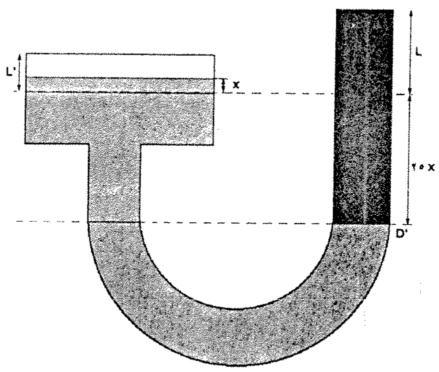
۳ — الف) فرض کنید سطح اولیه‌ی جیوه، امتداد افقی AB باشد. پس از ریختن آب در لوله، جیوه در داخل آن به اندازه‌ی y پایین می‌آید. چون قطر ظرف استوانه‌ای ۵ برابر قطر لوله است، بنابراین جیوه‌ی داخل ظرف استوانه‌ای به اندازه‌ی $y/۲۵$ بالا می‌رود. اگر فشار را در سطح CD از هر دو طرف بدست آورده و آنها را با هم مساوی قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \rho_{Hg} g(\tfrac{y}{۲۵} + y) &= \rho_{H_۲O} g(L+y) \\ \tfrac{۲۶}{۲۵}\rho_{Hg} y &= \rho_{H_۲O}(L+y) \\ \Rightarrow y = \frac{\rho_{H_۲O} L}{\frac{۲۶}{۲۵}\rho_{Hg} - \rho_{H_۲O}} &= \frac{۱ \times ۶۵/۲}{\frac{۲۶}{۲۵} \times ۱۳/۵ - ۱} = ۵cm \end{aligned}$$

بنابراین ارتفاع آب در لوله برابر $۶۵/۲ + ۵ = ۷۰/۲\ cm$ است.



ب) در این حالت که بالای ظرف استوانه‌ای بسته است ، با ریختن آب در لوله سطح جیوه در ظرف استوانه‌ای به اندازه‌ی x بالا می‌رود.



با فرض اینکه هوای داخل ظرف یک گاز کامل است می‌توان فشار هوای بالای ظرف را بدست آورد. فشار اولیه‌ی هوا، فشار جو است که برابر $۷۵cmHg$ است. با فرض دمای ثابت برای هوای بالای ظرف داریم:

$$P_\circ AL' = PA(L'-x)$$

$$\Rightarrow P = \frac{P_\circ L'}{L'-x} = \frac{P_\circ}{۱-\frac{x}{L'}} \approx P_\circ(۱+\frac{x}{L'})$$

$$\Rightarrow P = P_\circ(۱+\frac{x}{L'}) = ۷۵\times(۱+\frac{x}{۲۰})cmHg$$

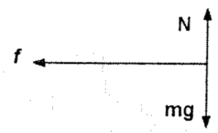
که در آن x بر حسب سانتیمتر است.

ج) اگر فشار را در سطح $C'D'$ از هر دو طرف بدست آوریم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
P + \rho_{Hg} g(x + 25x) &= P_0 + \rho_{H_2O} g(L + 25x) \\
P_0(1 + \tfrac{x}{L'}) - P_0 &= \rho_{H_2O} g(L + 25x) - \rho_{Hg} g(x + 25x) \\
P_0 \tfrac{x}{L'} &= \rho_{H_2O} gL + gx(25\rho_{H_2O} - 26\rho_{Hg}) \\
\Rightarrow \quad x &= \frac{\rho_{H_2O} gL}{\frac{P_0}{L'} + (26\rho_{Hg} - 25\rho_{H_2O})g} \approx 0.17 cm
\end{aligned}$$

بنابراین ارتفاع آب در لوله در این حالت $65.2 + 25 \times 0.17 = 69.45\ cm$ است.

۴ — الف) نمودار جسم آزاد جعبه به صورت روبرو است:



که در آن f نیروی اصطکاک وارد به جعبه از کف تریلی است. برای اینکه جعبه روی کف تریلی نلغزد، باید نیروی اصطکاک ایستایی برابر جرم جعبه ضربدر شتاب ماکزیمم تریلی شود.

$$ma_{max} = \mu_s mg \ \Rightarrow\ a_{max} = \mu_s g = 0.3 \times 10 = 3\ m/s^2$$

ب) چون شتاب تریلی $a = 4m/s^2$ است، بنابراین جعبه روی کف آن سر می‌خورد. اگر شتاب جعبه نسبت به تریلی a' باشد، قانون دوم نیوتن برای جعبه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$m(a - a') = f_k$$

$$a' = a - \frac{f_k}{m} \Rightarrow \ a' = a - \frac{\mu_k mg}{m} \Rightarrow \ a' = a - \mu_k g = 4 - 0.15 \times 10 = 2.5 m/s^2$$

بنابراین مسافتی که جعبه روی کف تریلی در مدت $t = 2s$ طی می‌کند به صورت زیر است:

$$d' = \frac{1}{2}a't^2 = \frac{1}{2} \times 2.5 \times 2^2 = 5m$$

توجه: سرعت اولیه‌ی جعبه نسبت به تریلی صفر است.
چون فاصله‌ی اولیه‌ی جعبه از عقب تریلی $6m$ است، بنابراین در مدت شتاب داشتن تریلی، جعبه به انتهای آن نمی‌رسد. همچنین در مدت این ۲ ثانیه سرعت جعبه نسبت به تریلی برابر است با:

$$V' = a't = 2.5 \times 2 = 5m/s$$

سرعت تریلی نیز پس از مدت زمان ۲ ثانیه نسبت به زمین برابر است با:

$$V = V_0 + at = 3 + 4 \times 2 = 11m/s$$

چون پس از مدت زمان ۲ ثانیه، جعبه نسبت به تریلی سر می‌خورد و دارای سرعت $5m/s$ است و فاصله‌ی آن نسبت به عقب تریلی نیز $۶ - ۵ = 1m$ است، بنابراین سرعت آن نسبت به تریلی وقتی به انتهای تریلی می‌رسد به صورت زیر محاسبه می‌شود. ابتدا شتاب جعبه را در این حالت محاسبه می‌کنیم:

$$ma'_1 = -m\mu_k g \Rightarrow a'_1 = -\mu_k g \Rightarrow a'_1 = -0/15 \times 10 = -1/5 m/s^2$$

بنابراین سرعت آن در انتها برابر است با:

$$V_f'^2 - V'^2 = 2a'_1 d'_1$$

$$V_f'^2 - 5^2 = 2 \times (-1/5) \times 1$$

$$V_f'^2 = 22 \Rightarrow V_f' \approx 4/7 m/s$$

بنابراین سرعت جعبه نسبت به زمین برابر است با:

$$V_b = V - V_f' = 11 - 4/7 = 6/3 m/s$$

۵) معادله‌ی مربوط به مدار به صورت زیر است:

$$E = RI + \frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} \qquad (1)$$

الف) در لحظه‌ی $t = 0$ جریان I برابر صفر است و شیب جریان نسبت به زمان، مطابق نمودار داده شده، تقریباً برابر است با:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{2mA}{0/1ms} = 20 A/s$$

همچنین بار خازن (q) برابر صفر است. بنابراین مطابق معادله‌ی (۱) داریم:

$$E = L\frac{dI}{dt} \Rightarrow 5 = L \times 20 \Rightarrow L = 0/25H$$

ب) اول بار خازن تا لحظه‌ی t_2 برابر سطح زیر نمودار است. تعداد خانه‌های زیر این نمودار تا این لحظه ۱۰۲ خانه است که چون سطح هر یک $0/1\mu C$ است، بنابراین بار خازن برابر خواهد شد با:

$$q = 102 \times 0/1 = 10/2 \mu C$$

از طرفی مقدار $\frac{dI}{dt}$ تقریبا برابر است با:

$$\frac{dI}{dt} \approx -\frac{3mA}{0/2ms} = -15 A/s$$

$t_۲$ I)1($t_۲$:

$$E=\frac{q}{c}+L\frac{dI}{dt} \Rightarrow ۵=\frac{۱۰/۲}{c}-۰.۲۵\times ۱۵ \Rightarrow c=۱/۱۷\mu F$$

ج) $t_۱$ $\frac{dI}{dt}$ I $۹/۵mA$. 49 f , $q=۴۹\times ۰/۱$ (1) :

$$E=RI+\frac{q}{C}$$

$$۵=R\times ۹/۵\times ۱۰^{-۳}+\frac{۴/۹}{۱/۱۷}$$

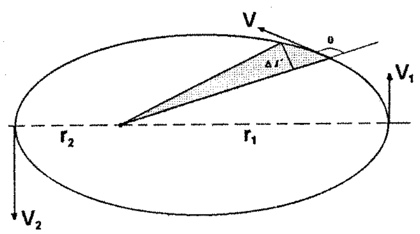
$$\Rightarrow R\approx ۸۵/۵\Omega$$

د) $t_۳$ $\frac{dI}{dt}$ $I\approx -۷mA$. (1) :

$$E=RI+\frac{q}{C}$$

$$۵=۸۵/۵\times(-۷\times ۱۰^{-۳})+\frac{q}{C} \Rightarrow V_c=\frac{q}{C}\approx ۵/۶V$$

۶—الف) Δt $\Delta l=V\Delta t$. , , $\Delta S=\frac{۱}{۲}r\Delta l'=\frac{۱}{۲}r\Delta l\sin\theta$.



بنابراین مساحت جاروب شده در واحد زمان، $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ می‌شود:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{\frac{۱}{۲}r\Delta l\sin\theta}{\Delta t}=\frac{۱}{۲}rV\sin\theta$$

ب) در حالتی که r کوتاهترین یا بزرگترین مقدار است، سرعت بر r عمود است؛ یعنی $\theta=\frac{\pi}{۲}$ است. با استفاده از قانون دوم کپلر داریم:

$$\frac{۱}{۲}r_۱V_۱\sin\frac{\pi}{۲}=\frac{۱}{۲}r_۲V_۲\sin\frac{\pi}{۲}$$

$$r_1V_1 = r_2V_2 \Rightarrow V_2 = V_1\frac{r_1}{r_2}$$

از طرفی با استفاده از بقای انرژی مکانیکی داریم:

$$\frac{1}{2}mV_1{}^2 - \frac{GM_em}{r_1} = \frac{1}{2}mV_2{}^2 - \frac{GM_em}{r_2}$$

$$V_1{}^2 - V_2{}^2 = 2GM_e(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

که با جایگزین کردن مقدار $V_2 = V_1\frac{r_1}{r_2}$ به دست می آوریم:

$$V_1{}^2 - V_2{}^2\frac{r_1{}^2}{r_2{}^2} = 2GM_e(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1})$$

$$V_1{}^2 = \frac{2GM_e(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1})}{1 - \frac{r_1{}^2}{r_2{}^2}} = \frac{2GM_er_2}{r_1(r_1 + r_2)}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2GM_er_2}{r_1(r_1 + r_2)}}$$

و همچنین مقدار V_2 می‌شود:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2GM_er_1}{r_2(r_1 + r_2)}}$$

۷–الف) با توجه به اینکه جرم داخل کره، $m = \rho V = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$، ثابت است، با مشتق گیری از طرفین این رابطه داریم:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{4}{3}\pi(3r^2\frac{dr}{dt}\rho + r^3\frac{d\rho}{dt})$$

طرف سمت چپ رابطه‌ی اخیر صفر است زیرا m ثابت است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= 3\rho\tfrac{dr}{dt} + r\tfrac{d\rho}{dt} \\ \Rightarrow \frac{\frac{dr}{dt}}{r} &= -\frac{1}{3}\frac{\frac{d\rho}{dt}}{\rho} \\ \Rightarrow H &= -\frac{1}{3}\frac{\frac{d\rho}{dt}}{\rho} \end{aligned}$$

ب) مطابق قانون دوم نیوتن داریم:

$$-\frac{GMm}{r^2} = ma \Rightarrow a = -\frac{GM}{r^2}$$

ج) انرژی جنبشی جرم m عبارت است از:

$$K = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m(\frac{dr}{dt})^2 = \frac{1}{2}mr^2H^2$$

که در آن از $H = \frac{\frac{dr}{dt}}{r}$ استفاده شده است. انرژی کل جرم m نیز برابر است با:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mr^2H^2 - \frac{GMm}{r}$$

د) برای اینکه جرم m بتواند تا بی‌نهایت برود باید انرژی کل آن بزرگتر یا مساوی صفر باشد، یعنی:

$$E \geq 0$$

با جایگزین کردن مقدار E از قسمت (ج) در رابطه‌ی اخیر داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mr^2H^2 &- \frac{GMm}{r} \geq 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{2}mr^3H^2 &\geq GM \\
\Rightarrow \frac{1}{2}mr^3H^2 &\geq G(\frac{4}{3}\pi r^3\rho) \\
\Rightarrow H^2(t) &\geq \frac{8}{3}\pi G\rho(t)
\end{aligned}$$

در مورد پاسخ سؤال عملی مرحله‌ی دوم دوازدهمین المپیاد فیزیک چند نکته حائز اهمیت بود:

- **مهم‌ترین نکته این بود که با داشتن دقت زیاد، عدد آخر با خطای کم‌به دست آید.**
- **و درعین حال رعایت چند نکته ضروری بود که رعایت هر یک از آنهادارای امتیاز بود.**
- **توضیح نحوه‌ی انجام آزمایش و نحوه‌ی چیدن مجموعه‌ی آزمایش.**
- **پرکردن جدول پاسخ (در واقع تکرار آزمایش به تعدادی که در جدول پاسخ‌نامه از دانش‌آموزان خواسته شده بود.)**
- **انجام محاسبات به پایان رساندن آنها (رها کردن اعداد به صورتی کسری قابل قبول نبود).**
- **ذکر این خطا در آزمایش که ما از وزن گیره‌ها صرف‌نظر کرده‌ایم.**