

به نام خدا

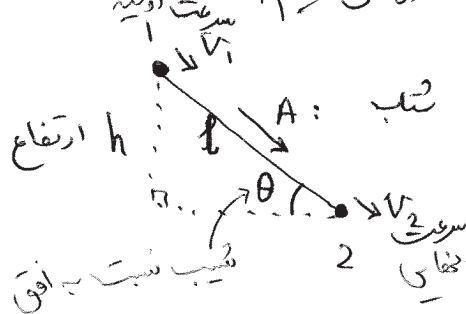
با استفاده تشریحی مرحله دوم

دوره ۲۷ المپیاد فیزیک ایران

« امیر برتوی »

- ۱- این سؤال به عنوان پرسش در کتاب « فیزیک هالیدی - جلد ۱ - ویرایش ۳ یا ۴ - فصل حرکت دوبعدی » مطرح شده است !!!

از یستگی انرژی و رابطه سرعت زمان نیماژک استفاده می کنیم:



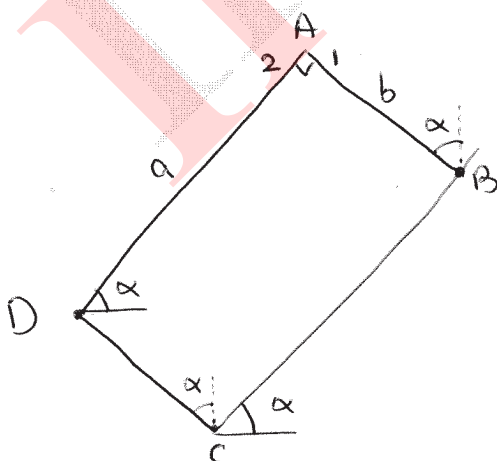
$$v_2^2 - v_1^2 = 2gh \quad \text{یستگی انرژی:}$$

$$v_2 = v_1 + at_{12}$$

$$A = g \sin \theta, \quad h = l \sin \theta$$

با ترکیب روابط بالا، مقدار t_{12} بدست می آید:

$$t_{12} = \frac{\sqrt{v_1^2 + 2gl \sin \theta} - v_1}{g \sin \theta} \quad \star$$



برای مسیرهای توب ما:

$$AB = CD = b, \quad AD = BC = a$$

$$\theta_{AB} = \theta_{DC} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\theta_{AD} = \theta_{BC} = \alpha$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$v_A = 0, \quad v_B = \sqrt{2gb \cos \alpha}, \quad v_D = \sqrt{2ga \sin \alpha}$$

« ۱ »

نیابراین برای زمان‌های مسیریها:

$$t_{AB} = \frac{\sqrt{V_A^2 + 2gb \sin \theta_{AB}} - V_A}{g \sin \theta_{AB}} \Rightarrow t_{AB} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{\sqrt{b \cos \alpha}}{\cos \alpha} \quad (1)$$

$$t_{BC} = \frac{\sqrt{V_B^2 + 2ga \sin \theta_{BC}} - V_B}{g \sin \theta_{BC}} \Rightarrow t_{BC} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{\sqrt{a \sin \alpha + b \cos \alpha} - \sqrt{b \cos \alpha}}{\sin \alpha}$$

$$T_1 = t_{AB} + t_{BC} \Rightarrow T_1 = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \left[\frac{\sqrt{b \cos \alpha}}{\cos \alpha} + \frac{\sqrt{a \sin \alpha + b \cos \alpha} - \sqrt{b \cos \alpha}}{\sin \alpha} \right] \quad (2)$$

$$t_{AD} = \frac{\sqrt{V_A^2 + 2ga \sin \theta_{AD}} - V_A}{g \sin \theta_{AD}} \Rightarrow t_{AD} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{\sqrt{a \sin \alpha}}{\sin \alpha} \quad (3)$$

$$t_{DC} = \frac{\sqrt{V_D^2 + 2gb \sin \theta_{DC}} - V_D}{g \sin \theta_{DC}} \Rightarrow t_{DC} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{\sqrt{a \sin \alpha + b \cos \alpha} - \sqrt{a \sin \alpha}}{\cos \alpha}$$

$$T_2 = t_{AD} + t_{DC} \Rightarrow T_2 = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \left[\frac{\sqrt{a \sin \alpha}}{\sin \alpha} + \frac{\sqrt{a \sin \alpha + b \cos \alpha} - \sqrt{a \sin \alpha}}{\cos \alpha} \right] \quad (4)$$

$$T_1 - T_2 = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \left[\frac{\sqrt{a \sin \alpha} + \sqrt{b \cos \alpha} - \sqrt{a \sin \alpha + b \cos \alpha}}{\cos \alpha} + \frac{\sqrt{a \sin \alpha + b \cos \alpha} - \sqrt{a \sin \alpha} - \sqrt{b \cos \alpha}}{\sin \alpha} \right] \quad (5)$$

$$\Rightarrow T_1 - T_2 = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \left[\sqrt{a \sin \alpha} + \sqrt{b \cos \alpha} - \sqrt{a \sin \alpha + b \cos \alpha} \right] \cdot \left[\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right] \quad (6)$$

$$f(a, b, \alpha) = \sqrt{a \sin \alpha} + \sqrt{b \cos \alpha} - \sqrt{a \sin \alpha + b \cos \alpha}$$

س:

برای قس علامت $f(a, b, \alpha)$: $p = a \sin \alpha$, $q = b \cos \alpha$, $p, q > 0$

$$\Rightarrow f(a, b, \alpha) = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{p+q}$$

درست است $\sqrt{p} + \sqrt{q} > \sqrt{p+q} \Rightarrow p+q+2\sqrt{pq} > p+q \Rightarrow 2\sqrt{pq} > 0$

دس نتیجه می گیریم که $(\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{p+q})$ همواره غیر منفی است.

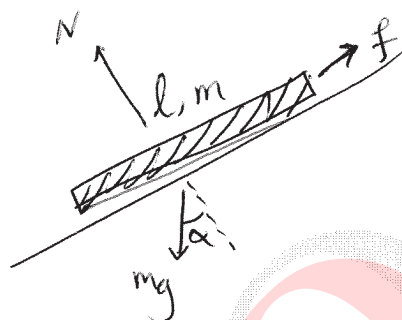
$$\Rightarrow f(a, b, \alpha) > 0$$

یعنی علامت $T_1 - T_2$ فقط به علامت $(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha})$ بستگی دارد.

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos \alpha > \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} < \frac{1}{\sin \alpha} \Rightarrow T_1 < T_2 \quad \star \\ \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \Rightarrow T_1 = T_2 \quad \star \\ \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} > \frac{1}{\sin \alpha} \Rightarrow T_1 > T_2 \quad \star \end{cases}$$

۲- ایده طرح این سوال از کتاب های «مقدمه ای بر مکانیک کلاسیک - هورن» و هم چنین کتاب «مسابقات فیزیک دانشگاه بوستون» گرفته شده است!

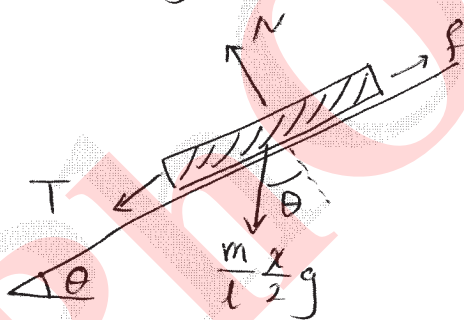
$$\left. \begin{aligned} mg \sin \alpha &= f \\ N &= mg \cos \alpha \\ f &= \mu N \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu = \tan \alpha$$



$$N = \frac{m}{l} \frac{x}{2} g \cos \theta$$

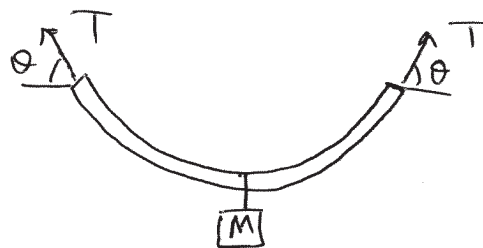
$$f = \mu N = \frac{m}{2} g \frac{x}{l} \tan \alpha \cdot \cos \theta$$

$$T + \frac{m}{2} \frac{x}{l} g \sin \theta = f$$



$$\Rightarrow T = \frac{m}{2} g \cdot \frac{x}{l} (\tan \alpha \cdot \cos \theta - \sin \theta)$$

$$2T \sin \theta = \left[M + m \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right] g$$



$$\Rightarrow mg \frac{x}{l} \sin \theta [\tan \alpha \cdot \cos \theta - \sin \theta] = \left(M + m - m \frac{x}{l} \right) g$$

$$\Rightarrow \frac{x}{l} \left[1 + \tan \alpha \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta - \sin^2 \theta \right] = 1 + \frac{M}{m}$$

$$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2l} \left[1 + \cos 2\theta + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin 2\theta \right] = 1 + \frac{M}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2l} \left[1 + \frac{\cos(\alpha - 2\theta)}{\cos \alpha} \right] = 1 + \frac{M}{m}$$

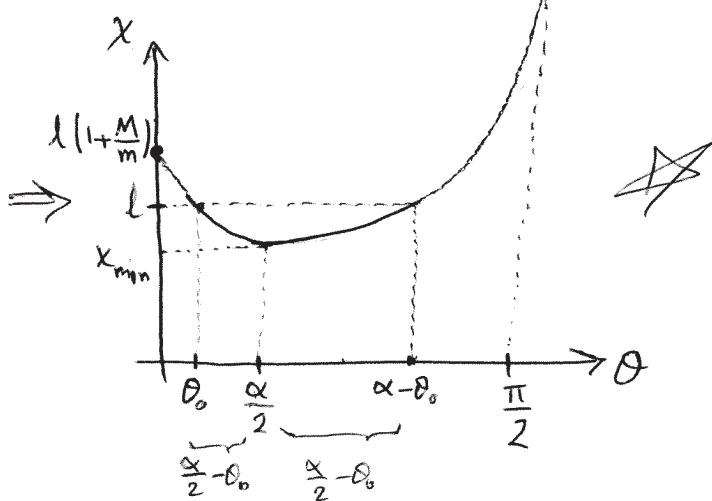
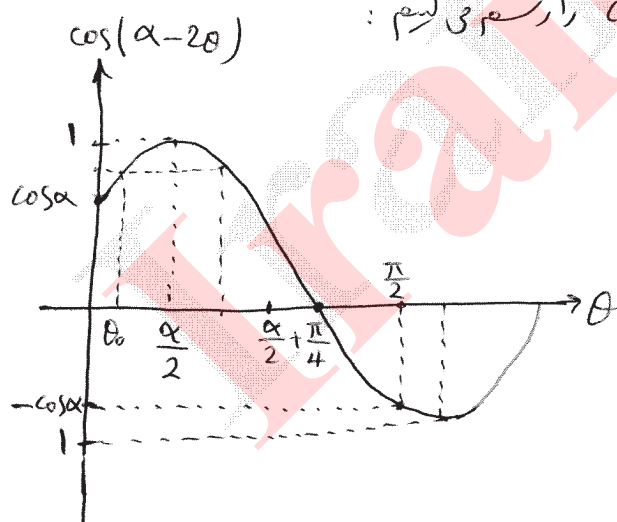
$$\Rightarrow x = l \cdot \frac{2 \left(1 + \frac{M}{m} \right)}{1 + \frac{\cos(\alpha - 2\theta)}{\cos \alpha}} \quad \star$$

برای بدست آوردن حداقل x باید مخرج حداکثر شود، یعنی $\cos(\alpha - 2\theta)$ برابر با یک شود:

$$\cos(\alpha - 2\theta) = 1 \Rightarrow \alpha - 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\alpha}{2} \quad \longleftrightarrow x_{\min} \quad \star$$

$$x_{\min} = l \cdot \frac{2 \left(1 + \frac{M}{m} \right)}{1 + \frac{1}{\cos \alpha}} \quad \star$$

برای نمودار x بر حسب θ ، ابتدا نمودار $\cos(\alpha - 2\theta)$ را رسم می‌کنیم:



$$\theta_0 = \frac{\alpha}{2} - \cos^{-1} \left(\left(1 + \frac{2M}{m} \right) \cos \alpha \right)$$

$$x_{\min} \leq l$$

$$x \leq l$$

(ب) دو شرط باید برقرار باشد:

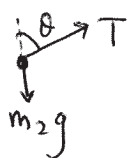
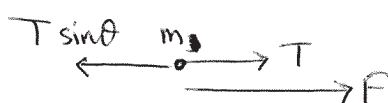
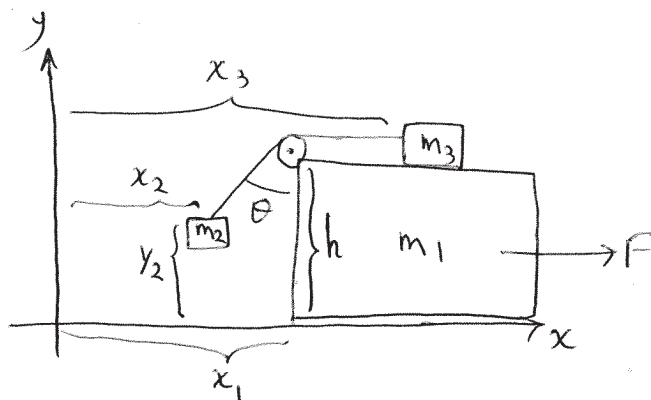
$$x \leq l \Rightarrow l \frac{2(1+\frac{M}{m})}{1+\frac{\cos(\alpha-2\theta)}{\cos\alpha}} \leq l \Rightarrow 2+\frac{2M}{m} \leq 1+\frac{\cos(\alpha-2\theta)}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha-2\theta) \geq (1+\frac{2M}{m})\cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} \theta \geq \frac{\alpha}{2} - \cos^{-1}\left((1+\frac{2M}{m})\cos\alpha\right) \\ \theta \leq \frac{\alpha}{2} + \cos^{-1}\left((1+\frac{2M}{m})\cos\alpha\right) \end{cases}$$

$$x_{\min} \leq l \Rightarrow l \frac{2(1+\frac{M}{m})}{1+\frac{1}{\cos\alpha}} \leq l \Rightarrow (1+\frac{2M}{m})\cos\alpha \leq 1$$

اگر شرط آخر برقرار نباشد، در هیچ زاویه‌ای تعادل نخواهیم داشت!

۳-



$$F + T(1 - \sin\theta) = m_1 a_1$$

$$T \sin\theta = m_2 a_{2x}$$

$$T \cos\theta - m_2 g = m_2 a_{2y}$$

$$-T = m_3 a_3$$

(۱)

$$l = (x_3 - x_1) + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (h - y_2)^2}$$

(ب)

با توجه به اینکه هدف این قسمت یافتن رابطه‌ای بین a_1 ، a_{2x} ، a_3 ، θ است، بار دیگر مشتق

گرفتن از رابطه بالا به این هدف می‌رسیم ولی وقت زیادی لازم است!

بین رابطه‌ای برای l می‌نویسیم که y_2 نداشته باشد: (θ ثابت است)

$$l = (x_3 - x_1) + \frac{x_1 - x_2}{\sin\theta} \longrightarrow a_3 - a_1 + \frac{a_1 - a_{2x}}{\sin\theta} = 0$$

(ج) به نظری رسیدیم استباه تایپی در این قسمت لزوم سوال وجود دارد! و منظور سوال

a_{2y} بوده است و نه a_{2x} !

$$\tan\theta = \frac{x_1 - x_2}{h - y_2} \Rightarrow -a_{2y} \tan\theta = a_1 - a_{2x}$$

«۴»

$$\Rightarrow a_{2y} = \frac{a_{2x} - a_1}{\tan\theta}$$

(۵)

$$\left. \begin{array}{l} T \sin\theta = m_2 a_{2x} \\ -T = m_3 a_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = -\frac{m_2}{m_3 \sin\theta} a_{2x} \\ T = -m_3 a_3 = \frac{m_2 a_{2x}}{\sin\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F + \left(m_2 \frac{a_{2x}}{\sin\theta} \right) (1 - \sin\theta) = m_1 a_1$$

$$\Rightarrow \frac{-m_2}{m_3} \frac{a_{2x}}{\sin\theta} - a_1 + \frac{a_1}{\sin\theta} - \frac{a_{2x}}{\sin\theta} = 0 \Rightarrow a_{2x} = \frac{a_1 (1 - \sin\theta)}{1 + \frac{m_2}{m_3}}$$

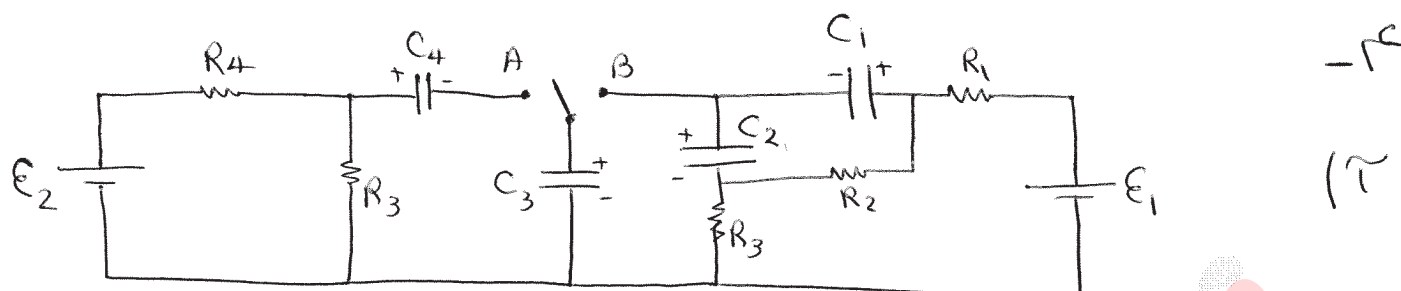
$$\Rightarrow F + \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} \frac{(1 - \sin\theta)^2}{\sin\theta} a_1 = m_1 a_1 \Rightarrow F = \left[m_1 - \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} \frac{(1 - \sin\theta)^2}{\sin\theta} \right] a_1 \quad \checkmark$$

$$\left. \begin{array}{l} T \sin\theta = m_2 a_{2x} \\ T \cos\theta = m_2 (g + a_{2y}) \end{array} \right\} \tan\theta = \frac{a_{2x}}{g + a_{2y}} \Rightarrow g \tan\theta + \tan\theta a_{2y} = a_{2x}$$

$$\Rightarrow a_{2y} \tan\theta = a_{2x} - g \tan\theta \Rightarrow a_1 = g \tan\theta \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow F = \left[m_1 - \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} \frac{(1 - \sin\theta)^2}{\sin\theta} \right] g \tan\theta \quad \checkmark$$

(۱۷)



صفا می‌دهد کلید A وصل است پس از گذشت زمان طولانی:

$$\mathcal{E}_2 = (R_3 + R_4)I \rightarrow I = \frac{\mathcal{E}_2}{R_3 + R_4}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_4}{C_3} + \frac{q_3}{C_3} &= R_3 I \\ q_3 &= q_4 \end{aligned} \right\} q_3 \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right) = R_3 I \Rightarrow q_3 = \frac{R_3 \mathcal{E}_2 C_3 C_4}{(R_3 + R_4)(C_3 + C_4)}$$

$$\mathcal{E}_1 = (R_1 + R_2 + R_3)I' \rightarrow I' = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} &= R_2 I' \\ q_1 &= q_2 \end{aligned} \right\} q_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = R_2 I' \Rightarrow q_1 = \frac{R_2 \mathcal{E}_1 C_1 C_2}{(R_1 + R_2 + R_3)(C_1 + C_2)}$$

ب) پس از قطع کلید A، اتصال کلید B و پس از گذشت زمان طولانی:

$$\mathcal{E}_1 = (R_1 + R_2 + R_3)I'' \Rightarrow I'' = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$\frac{q'_3}{C_3} = \frac{q'_2}{C_2} + R_3 I''$$

$$\frac{q'_1}{C_1} + \frac{q'_2}{C_2} = R_2 I''$$

$$-q_1 + q_2 + q_3 = -q'_1 + q'_2 + q'_3$$

$$(q_1 = q_2)$$

(ب) با فرض اینکه همهٔ مقاومت‌ها R و همهٔ خازن‌ها C هستند، معادلات را بازنویسی می‌کنیم:

$$\epsilon_1 = 3RI'' \rightarrow I'' = \frac{\epsilon_1}{3R}$$

$$\frac{q'_3}{C} = \frac{q'_2}{C} + RI''$$

$$\frac{q'_1}{C} + \frac{q'_2}{C} = RI''$$

$$-q_1 + q_2 + q_3 = -q'_1 + q'_2 + q'_3$$

$$q_1 = q_2, \quad q_3 = \frac{C\epsilon_2}{4}$$

$$\Rightarrow q'_3 - q'_2 = \frac{C\epsilon_1}{3}$$

$$q'_2 + q'_1 = \frac{C\epsilon_1}{3} \rightarrow q'_2 = \frac{C\epsilon_1}{3} - q'_1$$

$$-q'_1 + q'_2 + q'_3 = \frac{C\epsilon_2}{4}$$

$$\Rightarrow q'_1 + q'_3 = \frac{2}{3} C\epsilon_1$$

$$\Rightarrow q'_1 + q'_3 = \frac{2C\epsilon_1}{3}$$

$$-q'_1 + \frac{C\epsilon_1}{3} - q'_1 + q'_3 = \frac{1}{4} C\epsilon_2 \Rightarrow -2q'_1 + q'_3 = \frac{C\epsilon_2}{4} - \frac{C\epsilon_1}{3}$$

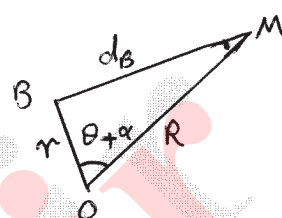
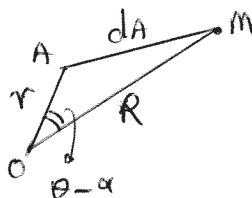
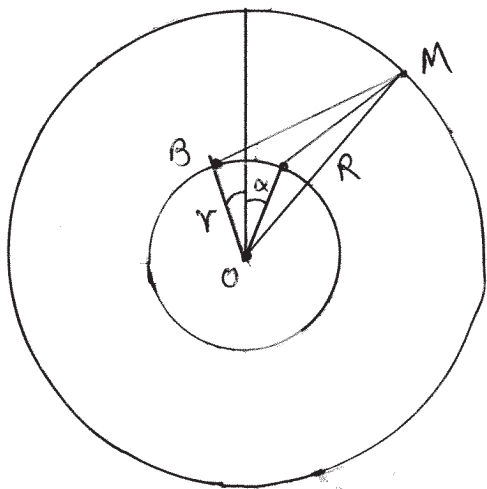
$$\Rightarrow 3q'_1 = C\epsilon_1 - \frac{C\epsilon_2}{4}$$

$$\Rightarrow 3q'_3 = C\epsilon_1 + \frac{C\epsilon_2}{4}$$

$$q'_1 = \frac{C}{3} \left(\epsilon_1 - \frac{\epsilon_2}{4} \right)$$

$$q'_3 = \frac{C}{3} \left(\epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{4} \right)$$

- ۵



با استفاده از رابطه کسینوس ها:

$$d_A = [R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \alpha)]^{1/2}$$

$$d_B = [R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta + \alpha)]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_A = R \left[1 - 2 \frac{r}{R} \cos(\theta - \alpha) + \frac{r^2}{R^2} \right]^{1/2} \\ d_B = R \left[1 - 2 \frac{r}{R} \cos(\theta + \alpha) + \frac{r^2}{R^2} \right]^{1/2} \end{cases}$$

$$d = d_B - d_A$$

$$\Rightarrow d = R \left[\left[1 - 2 \frac{r}{R} \cos(\theta + \alpha) + \frac{r^2}{R^2} \right]^{1/2} - \left[1 - 2 \frac{r}{R} \cos(\theta - \alpha) + \frac{r^2}{R^2} \right]^{1/2} \right]$$

$$r \ll R \Rightarrow \frac{r}{R} \ll 1, \quad \frac{r^2}{R^2} \approx 0, \quad (1 + \epsilon)^\delta = 1 + \delta \epsilon \quad (\text{ب})$$

$$\Rightarrow d = R \left[1 - \frac{r}{R} \cos(\theta + \alpha) - 1 + \frac{r}{R} \cos(\theta - \alpha) \right] = R \left[\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta + \alpha) \right] \frac{r}{R}$$

$$\Rightarrow \underline{d = (2r \sin \alpha) \sin \theta}$$

$$\text{نکته: } \cos(\theta \pm \alpha) = \cos \theta \cdot \cos \alpha \mp \sin \theta \cdot \sin \alpha$$

(۱۱/۱۰)

$$\Delta \varphi = 2\pi \cdot \frac{d}{\lambda} \Rightarrow \Delta \varphi = (2\pi) \left(\frac{2r \sin \alpha}{\lambda} \right) \sin \theta \quad (*) \quad (ت)$$

ب) اگر اختلاف فاز، مضرب π باشد، پرتوهای رسیده هم فاز هستند و

بیشترین شدت نور در نقطه M خواهد بود:

$$\Delta \varphi = 2n\pi \Rightarrow \sin \theta \cdot 2\pi \cdot \frac{2r \sin \alpha}{\lambda} = n(2\pi)$$

$$\Rightarrow \sin \theta = (n) \left[\frac{\lambda}{2r \sin \alpha} \right] \quad n \in W \quad \text{عدد صحیح} \quad (*)$$

به ازای n های مختلف، θ های مختلف بدست می آید. در همه این θ ها، شدت نور حداکثر است.

ج) اگر اختلاف فاز، مضرب فردی از π باشد، پرتوهای رسیده دفااز مخالف هستند و

کمترین شدت نور در نقطه M خواهد بود:

$$\Delta \varphi = (2n-1)\pi = 2\pi \cdot \left(\frac{2r \sin \alpha}{\lambda} \right) \sin \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta = (n - \frac{1}{2}) \left[\frac{\lambda}{2r \sin \alpha} \right], \quad n \in W \quad \text{عدد صحیح}$$

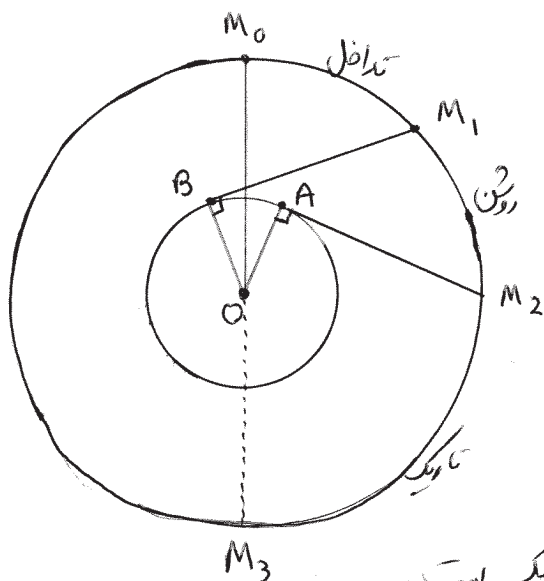
به ازای n های مختلف، θ های مختلف بدست می آید. در همه این θ ها، شدت نور حداقل است.

ج) با توجه به اینکه پرده، دایره ای به شعاع R است، پس قسمتهایی وجود دارد که یا تاریک هستند

و یا روشن هستند. یعنی در محدوده خاصی از پرده تناوب رخ می دهد. این محدوده همان

محدوده ای است که پرتوهای هر دو ریزه به آن می رسد.

((۱۱))



در شکل مقابل :

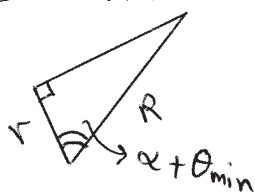
ناصیه $M_0 M_1$: تناظر رخ می دهد و نورهای روشن و تاریک وجود دارد.

ناصیه $M_1 M_2$: فقط پرتوهای نقطه A به آن می رسد و روشن است.

ناصیه $M_2 M_3$: هیچ پرتو نوری به آن نمی رسد و تاریک است.

همین حالت را در طرف دیگر برده (نیمایره چپ) نیز رخ می دهد.

اگر زاویه خط واصل نقطه M_1 به مرکز O را با راستای عمود (OM_0) مقدار θ_{min} بنامیم :



$$\Rightarrow \cos(\alpha + \theta_{min}) = \frac{r}{R}$$

$$\Rightarrow \theta_{min} = \cos^{-1}\left(\frac{r}{R}\right) - \alpha$$

برای محاسبه تعداد کل نورهای روشن $N+1$ ، باید $\frac{N}{2}$ در عبارت قسمت ب صدق کند و از طرفی

مقدار زاویه بدست آمده باید از θ_{min} کوچکتر باشد. (چرا $(N+1)$ ؟)

$$\frac{N}{2} \left(\frac{\lambda}{2r \sin \alpha} \right) \ll \sin \theta_{min}$$

$$\sin \theta_{min} = \sin \left(\cos^{-1}\left(\frac{r}{R}\right) - \alpha \right) = \sin \left(\cos^{-1}\left(\frac{r}{R}\right) \right) \cdot \cos \alpha - \cos \left(\cos^{-1}\left(\frac{r}{R}\right) \right) \cdot \sin \alpha$$

$$= \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \cdot \cos \alpha - \frac{r}{R} \cdot \sin \alpha \approx \cos \alpha - \frac{r}{R} \sin \alpha$$

$$\Rightarrow N = \left[\frac{2r}{\lambda} \cdot \left(\sin 2\alpha - \frac{r}{R} 2\sin^2 \alpha \right) \right] \xrightarrow{\text{جزء صحیح}} \Rightarrow \frac{\text{تعداد کل نورها}}{N+1}$$

۱۶) ۳

تدب هر توبه که دارای بار q و جرم m است

هواره به است و برابر $a = \frac{qE}{md}$ می باشد.

اگر در ابتدا هر توبه به سرعت صفر از صفحه پایین جدا شود

و سرعت اش در است هنگام رسیدن به صفحه بالایی می باشد:

$$v_1^2 - 0^2 = 2ad$$

و اگر t_1 زمان رسیدن این توبه به صفحه بالایی باشد:

$$d = \frac{1}{2}at_1^2$$

$$\Downarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2qE}{m}} \quad \text{و} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2md^2}{qE}}$$

ب) با توجه به شکل در دفعه n ، توبه به سرعت ev_{n-1} از یک صفحه جدا می شود

و به سرعت v_n به صفحه دیگر می رسد به صورتی که

$$v_n^2 - e^2v_{n-1}^2 = 2ad$$

این رابطه را از دفعه اول $n=1$ تا دفعه k ام $n=k$ می نویسیم. به خاطر داشته باشیم

$$v_1^2 - e^2v_0^2 = 2ad \quad \times (e^2)^{k-1}$$

که $v_0 = 0$ است

$$v_2^2 - e^2v_1^2 = 2ad \quad \times (e^2)^{k-2}$$

اگر معادله ها را به ترتیب از آخر به اول

$$\vdots$$

$$v_{k-1}^2 - e^2v_{k-2}^2 = 2ad \quad \times (e^2)^1$$

در $(e^2)^1, \dots, (e^2)^{k-1}$

$$v_k^2 - e^2v_{k-1}^2 = 2ad \quad \times (e^2)^0$$

ضرب در پس بهم جمع کنیم خواهیم

$$v_k^2 = 2ad (1 + e^2 + e^4 + \dots + e^{2(k-1)})$$

نمی بدین

$$v_k = \sqrt{\frac{2qE}{m}} \sqrt{\frac{1 - (e^2)^k}{1 - e^2}}$$

و اگر t_k زمان طی مسافت بین دو صفحه در دفعه k ام باشد

$$v_k = at_k + ev_{k-1} \Rightarrow t_k = \sqrt{\frac{2md^2}{qE}} \left(\sqrt{\frac{1 - e^{2k}}{1 - e^2}} - e \sqrt{\frac{1 - e^{2(k-1)}}{1 - e^2}} \right)$$

پس اگر مساحت هر صفحه A باشد، کل بار که در هر مرحله بین دو صفحه انتقال می یابد

$Q = nAq$ است. در مرحله k ام به صورت متوسط پس از زمان t_k بار Q منتقل

$$I_k = \frac{Q}{t_k} \quad \text{نمی بدین طبق} \quad I_k = nA \sqrt{\frac{q^3 E}{2md^2}} \left(\sqrt{\frac{1 - e^{2k}}{1 - e^2}} + e \sqrt{\frac{1 - e^{2(k-1)}}{1 - e^2}} \right)$$

ت) از آنجا که $0 < e^2 < 1$ لذا $(e^2)^\infty = 0$ و در نتیجه

$$I_\infty = nA \sqrt{\frac{q^3 \epsilon}{2md^2}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$



ث) اندازه انتقال انرژی در برخورد کام

برای یک توده :

$$\Delta K_k = \frac{1}{2} m v_k^2 - \frac{1}{2} m (e v_k)^2$$

$$= q\epsilon (1 - e^{2k})$$

و برای همه توده ها $| nA q\epsilon (1 - e^{2k}) |$ است.

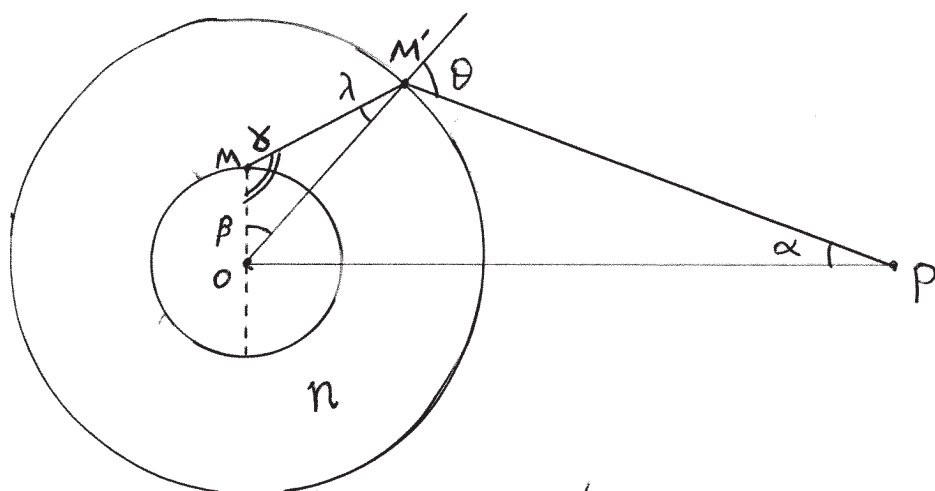
$$P_k = \frac{nA q\epsilon (1 - e^{2k})}{t_k}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_\infty = nA \sqrt{\frac{(q\epsilon)^3}{2md^2}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}}$$

ج) آهنگ انجمن کار به وسیله I_∞ است که برابر است با

$$\epsilon I_\infty = nA \sqrt{\frac{(q\epsilon)^3}{2md^2}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

که با P_∞ برابر است.



-V

$$OM' = R$$

$$OP = D$$

$$M'P = x$$

$$MM' = y$$

(۲) با استفاده از قانون سینوس ها و قانون اسنل کارت :

$$\frac{M'P}{\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)} = \frac{OP}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{OM'}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{D}{\sin \theta} = \frac{R}{\sin \alpha} \Rightarrow \boxed{\sin \theta = \frac{D}{R} \sin \alpha}$$

$$n \sin \lambda = \sin \theta \rightarrow \boxed{\sin \lambda = \frac{D}{R} \cdot \frac{\sin \alpha}{n}} \quad \star$$

$$\left. \begin{aligned} x \cos \alpha + R \sin \beta &= D \rightarrow x = \frac{D - R \sin \beta}{\cos \alpha} \\ \frac{x}{\cos \beta} &= \frac{R}{\sin \alpha} \rightarrow x = \frac{R}{\sin \alpha} \cdot \cos \beta \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow (D - R \sin \beta) \sin \alpha = R \cos \alpha \cdot \cos \beta \Rightarrow D \sin \alpha = R (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta)$$

$$\Rightarrow \frac{D}{R} \sin \alpha = \cos(\beta - \alpha) \Rightarrow \beta = \alpha + \cos^{-1}\left(\frac{D}{R} \sin \alpha\right)$$

$$\cos^{-1} p = q \rightarrow \cos q = p \rightarrow \sin q = \sqrt{1 - \cos^2 q} = \sqrt{1 - p^2} \quad \text{نکته:}$$

$$\sin \beta = \sin\left(\alpha + \cos^{-1}\left(\frac{D}{R} \sin \alpha\right)\right) = \sin \alpha \cdot \cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{D}{R} \sin \alpha\right)\right) + \cos \alpha \cdot \sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{D}{R} \sin \alpha\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin \beta = \frac{D}{R} \sin^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \sqrt{1 - \frac{D^2}{R^2} \sin^2 \alpha}} \quad \star$$

$$\gamma + \beta + \lambda = \pi \Rightarrow \gamma = \pi - (\beta + \lambda) \Rightarrow \sin \gamma = \sin(\pi - (\beta + \lambda))$$

$$\Rightarrow \sin \gamma = \sin(\beta + \lambda) = \sin \beta \cdot \cos \lambda + \cos \beta \cdot \sin \lambda$$

$$\cos \lambda = \sqrt{1 - \sin^2 \lambda} = \sqrt{1 - \frac{D^2}{R^2} \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}$$

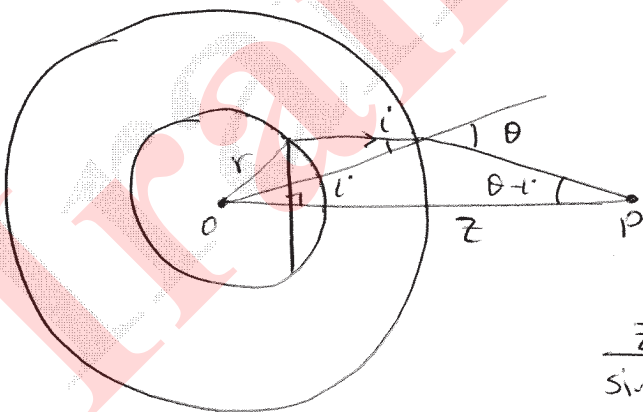
$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sin \alpha \left(\frac{D}{R} \cos \alpha - \sqrt{1 - \frac{D^2}{R^2} \sin^2 \alpha} \right)$$

$$\boxed{\sin \gamma = \sin \beta \cdot \cos \lambda + \cos \beta \cdot \sin \lambda} \quad \#$$

با جایگذاری مقادیر سینوس و کسینوس λ ، β ، و γ می‌یابیم.

$$\frac{r}{\sin \lambda} = \frac{R}{\sin \gamma} \Rightarrow \boxed{d = 2r = 2R \frac{\sin \lambda}{\sin \gamma}} \quad \# \quad (ب)$$

$$\Rightarrow d = 2R \frac{D}{R} \frac{\sin \alpha}{n \sin \gamma} \Rightarrow \boxed{d = \frac{2D}{n} \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}} \quad \#$$



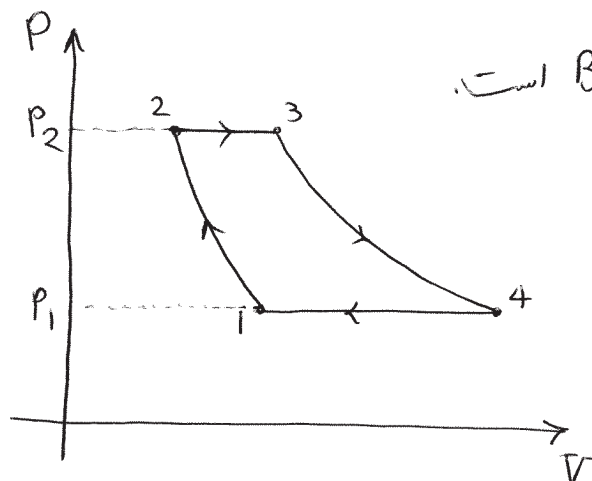
$$\sin i = \frac{l}{R}$$

$$OP = Z$$

$$\frac{Z}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{R}{\sin(\theta - i)}, \quad n \sin i = \sin \theta$$

$$\Rightarrow Z = R \frac{\sin \theta}{\sin(\theta - i)} \Rightarrow Z = R \frac{\sin \theta}{\sin \theta \cdot \cos i - \cos \theta \cdot \sin i} = R \frac{n \sin i}{n \sin i \cdot \cos i - \sin i \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}}$$

$$\Rightarrow Z = R \frac{1}{\cos i - \sqrt{\frac{1}{n^2} - \sin^2 i}} \Rightarrow \boxed{Z = R \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{R^2}} - \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{l^2}{R^2}}}} \quad \#$$



۸- این سیکل، صرف به سیکل برایتون Brayton است.

۱→۲ : بی دررو
۲→۳ : هم فشار
۳→۴ : بی دررو
۴→۱ : هم فشار

$$PV = nRT \rightarrow \frac{PV}{T} = C \rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{P^\gamma V^\gamma}{T^\gamma} &= C \\ PV^\gamma &= C \end{aligned} \right\} \begin{aligned} P^{\gamma+1} T^{-\gamma} &= C \end{aligned} \quad (\pi)$$

$$\Rightarrow P T^{-\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)} = C \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{-\gamma}{\gamma-1}}$$

ب) با توجه به چرخه مشخص است که کمترین دما در نقطه ۱ و بیشترین دما در نقطه ۳ می باشد.

$$P_1 T_1^\alpha = P_2 T_2^\alpha \rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow$$

$$P_2 T_3^\alpha = P_1 T_4^\alpha \rightarrow T_4 = T_3 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} T_1 &= T_c \\ T_2 &= T_c \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\ T_3 &= T_H \\ T_4 &= T_H \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \end{aligned}}$$

* با توجه به نتایج بدست آمده مشخص است:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$\Delta U = Q - W$: Q : گرمای داده شده به گاز ، W : کار انجام شده توسط گاز :

$$1 \rightarrow 2 : Q_{12} = 0 , \Delta U_{12} = nC_{mv}(T_2 - T_1) \quad \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow W_{12} = nC_{mv}(T_1 - T_2)$$

$$2 \rightarrow 3 : Q_{23} = nC_{mp}(T_3 - T_2) , \Delta U_{23} = nC_{mv}(T_3 - T_2)$$

$$\Rightarrow W_{23} = nR(T_3 - T_2) \quad (C_{mp} - C_{mv} = R)$$

$$3 \rightarrow 4 : Q_{34} = 0 , \Delta U_{34} = nC_{mv}(T_4 - T_3)$$

$$\Rightarrow W_{34} = nC_{mv}(T_3 - T_4)$$

$$4 \rightarrow 1 : Q_{41} = nC_{mp}(T_1 - T_4) , \Delta U_{41} = nC_{mv}(T_1 - T_4)$$

$$\Rightarrow W_{41} = nR(T_1 - T_4)$$

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$$

$$= nC_{mp}(T_1 - T_2 + T_3 - T_4) \Rightarrow W = nC_{mp} \left[T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) + T_3 \left(1 - \frac{T_4}{T_3} \right) \right]$$

$$\Rightarrow W = nC_{mp} \left[T_c \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) + T_H \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \right]$$

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{W}{Q_{23}} = \frac{nC_{mp}(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)}{nC_{mp}(T_3 - T_2)} = \frac{(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)}{T_3 - T_2}$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} \times \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (1.3)$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - r^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

با توجه به شبیه * سمت ب

ت) با توجه به سمت ب :

$$W = nC_{mp} \left[T_c \left(1 - r^{\frac{\delta-1}{\delta}} \right) + T_H \left(1 - r^{-\frac{\delta-1}{\delta}} \right) \right]$$

فرض کنید $x = r^{\frac{\delta-1}{\delta}}$

$$\Rightarrow W = nC_{mp} \left[T_c (1 - x) + T_H \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right], \quad W = 0$$

$$\Rightarrow T_c - T_c x + T_H - \frac{T_H}{x} = 0 \Rightarrow (T_c + T_H)x - T_c x^2 - T_H = 0$$

$$\Rightarrow T_c x^2 - (T_H + T_c)x + T_H = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{(T_H + T_c) \pm \sqrt{(T_H + T_c)^2 - 4T_H T_c}}{2T_c} = \frac{(T_H + T_c) \pm (T_H - T_c)}{2T_c}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \frac{T_H}{T_c} \\ 1 \end{cases} \Rightarrow r^{\frac{\delta-1}{\delta}} = \begin{cases} \frac{T_H}{T_c} \\ 1 \end{cases} \Rightarrow r = \begin{cases} \left(\frac{T_H}{T_c} \right)^{\frac{\delta}{\delta-1}} \\ 1 \end{cases} \quad \text{با ضرب کردن در } \frac{\delta}{\delta-1}$$

$$1 \leq r \leq \left(\frac{T_H}{T_c} \right)^{\frac{\delta}{\delta-1}}, \quad \eta = 1 - r^{-\left(\frac{\delta-1}{\delta} \right)} \quad (2)$$

$$\frac{d\eta}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{d\eta}{dr} = + \left(\frac{\delta-1}{\delta} \right) r^{-\left(\frac{\delta-1}{\delta} \right) - 1} = + \left(\frac{\delta-1}{\delta} \right) r^{-2 + \frac{1}{\delta}} > 0$$

چون مشتق تابع η نسبت به r درباره مورد نظر، همواره مثبت است پس حداکثر تابع در

انتهای بازه بدست می آید :

$$r^{\left(\frac{\delta-1}{\delta} \right)} = \frac{T_H}{T_c}$$

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_c}{T_H}$$

$$W = nC_{mp} \left[T_c \left(1 - r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) + T_H \left(1 - r^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \right] \quad (ج)$$

$$\frac{dW}{dr} = 0 \Rightarrow -T_c \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) r^{1-\frac{1}{\gamma}-1} + T_H \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) r^{-1+\frac{1}{\gamma}-1} = 0$$

$$\Rightarrow T_c r^{-\frac{1}{\gamma}} = T_H r^{\frac{1}{\gamma}-2} \rightarrow r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \sqrt{\frac{T_H}{T_c}}$$

$$\rightarrow r = \sqrt{\left(\frac{T_H}{T_c} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \rightarrow W_{max} = nC_{mp} (\sqrt{T_H} - \sqrt{T_c})^2$$

$$r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \sqrt{\frac{T_H}{T_c}}, \quad \eta = 1 - r^{-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)} \quad (ج)$$

$$\Rightarrow \eta_{w_{max}} = 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T_H}}$$

$$\eta_c = 1 - \frac{T_c}{T_H}, \quad \eta_{w_{max}} = 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T_H}} \quad (ج)$$

$$\Rightarrow \frac{\eta_c}{\eta_{w_{max}}} = 1 + \sqrt{\frac{T_c}{T_H}}$$

در صورت وجود اشکال در راه حل‌های ارائه شده، لطفاً طریق ایمیل iranpho@gmail.com

اطلاع دهید.