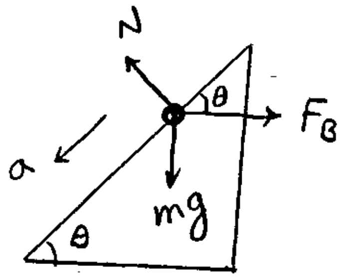


۱) پس از شروع حرکت میله، بنابه قانون فارادی یک جریان القایی در مدار خواهیم داشت که وقتی از روبرو نگاه کنیم جهت آن پادساعتگرد است. در نتیجه یک نیروی مغناطیسی به میله حامل جریان مانند F_B وارد می‌شود.

آ)

$$mg\sin\theta - F_B\cos\theta = ma$$

$$F_B = iBd$$

اگر ε نیروی محرکه القایی باشد $q(t) = C\,\varepsilon(t)$ و $i = \frac{dq}{dt}$ که

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = Bdv\cos\theta$$

$$i = CBda\cos\theta$$

v سرعت لحظه‌ای میله و $a = \frac{dv}{dt}$ شتاب لحظه‌ای میله است.

از روابط فوق:

$$mg\sin\theta - CB^2d^2a\cos^2\theta = ma$$

$$a = \frac{m\sin\theta}{m + CB^2d^2\cos^2\theta}\,g \Rightarrow v = \sqrt{2al} \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{\frac{2lg\sin\theta}{1+\frac{C}{m}(Bd\cos\theta)^2}}}$$

ب)

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2l\left(1+\frac{C}{m}(Bd\cos\theta)^2\right)}{g\sin\theta}}}$$

پ)

$$q_f = CBdv_f\cos\theta \Rightarrow \boxed{q_f = (CBd\cos\theta)\sqrt{\frac{2lg\sin\theta}{1+\frac{C}{m}(Bd\cos\theta)^2}}}$$

ت)

$$\boxed{v_f = 0.96\ m/s \qquad t = 0.21\ s \qquad q_f = 662\ \mu C}$$

۲)

اگر P_r ، V_r و T_r فشار، حجم و دمای مطلق نهایی گاز محفظه‌ی سمت راست باشد:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_r V_r}{T_r}$$

همچنین گاز محفظه‌ی سمت راست طی یک فرآیند بی دررو به وضعیت نهایی رسیده است، پس

$$P_0 V_0^{\gamma} = P_r V_r^{\gamma}$$

که $P_r = \frac{27}{8} P_0$ است و $\gamma = \frac{3}{2}$. از معادلات اخیر خواهیم داشت

آ) $\boxed{T_r = \frac{3}{2} T_0}$ و $V_r = \frac{4}{9} V_0$

ب) برای گاز سمت راست بنا به قانون اول ترمودینامیک

$$\Delta U = Q + W$$

از آنجا که در فرآیند بی دررو $Q = 0$ ، لذا

$$\Delta U = W$$

$$\Delta U = n C_V \left(\frac{3}{2} T_0 - T_0 \right)$$

اما برای گاز کامل $C_P - C_V = R$ و $\frac{3}{2} = \gamma = \frac{C_P}{C_V}$ در نتیجه

$$C_V = 2R \quad , \quad C_P = 3R$$

سرانجام

$$\boxed{W = nRT_0}$$

پ) اگر P_L ، V_L و T_L فشار، حجم و دمای نهایی گاز محفظه‌ی سمت چپ باشد

$$P_L = \frac{27}{8} P_0 \quad \text{و} \quad V_L = V_0 + \frac{5}{9} V_0 = \frac{14}{9} V_0$$

$$\frac{P_L V_L}{T_L} = \frac{P_0 V_0}{T_0} \Rightarrow \boxed{T_L = \frac{21}{4} T_0}$$

ت) $\Delta U_r = W_r + Q_r \quad \Leftarrow \quad Q_r = \Delta U_r - W_r$

$$\begin{aligned} Q_r &= \Delta U_r - W_r \\ &= \Delta U_r + W_L \\ &= n C_v \left(\frac{21}{4} T_0 - T_0 \right) + nRT_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{Q_r = \frac{19}{2} nRT_0}$$

ث) اگر $\bar{C}_v$ و $\bar{C}_p$ ظرفیت گرمایی مولی در حجم ثابت و فشار ثابت برای مخلوط دو گاز باشند:

$$n_1 C_{v_1} \Delta T + n_2 C_{v_2} \Delta T = (n_1 + n_2) \bar{C}_v \Delta T$$

اما برای هر گاز، مثلاً نوع ۱: $C_{p_1} - C_{v_1} = R$ و $\frac{C_{p_1}}{C_{v_1}} = \gamma_1 \quad \Leftarrow \quad C_{v_1} = \frac{R}{\gamma_1 - 1}$

برای گاز نوع ۲ به طور مشابه: $C_{v_2} = \frac{R}{\gamma_2 - 1}$

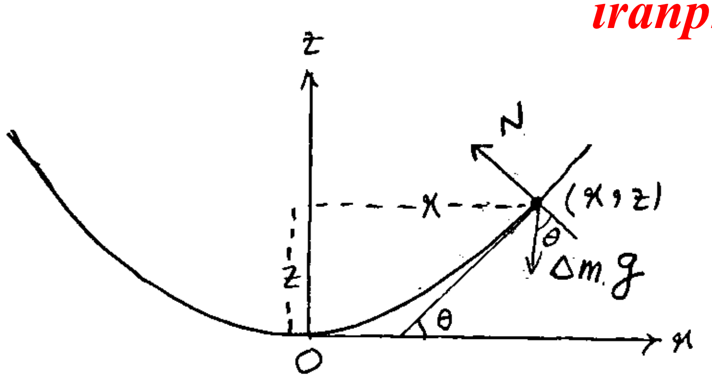
و برای مخلوط دو گاز: $\bar{C}_v = \frac{R}{\gamma - 1}$

بنابراین با قرار دادن در معادلهٔ اول قسمت ث)

$$\frac{n_1 R}{\gamma_1 - 1} + \frac{n_2 R}{\gamma_2 - 1} = \frac{(n_1 + n_2) R}{\gamma - 1}$$

اما $\gamma = \frac{3}{2}$، $\gamma_1 = \frac{5}{3}$ و $\gamma_2 = \frac{7}{5}$، در نتیجه

$$\boxed{\frac{n_2}{n_1} = 1}$$



۳) نیروهای وارد بر جزء کوچکی از جیوه به جرم Δm واقع بر سطح جیوه $\Delta m g$ و N هستند که N بر سطح جیوه عمود است. اگر مماس بر سهمی در این نقطه زاویه‌اش با محور x، θ باشد داریم

الف)

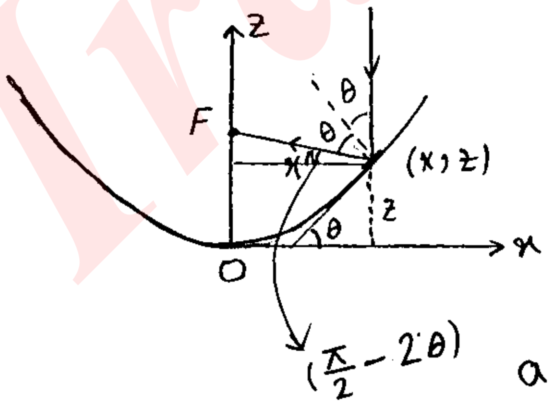
$$N - \Delta m\, g \cos\theta = 0$$
$$N \sin\theta = \Delta m\, x\omega^2$$
$$\Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{x\omega^2}{g}}$$

ب) طبق گفته مسئله $\tan\theta = 2ax$ در نتیجه بدار سهمی این مسئله $a = \frac{\omega^2}{2g}$ است و معادله سهمی خواهد شد $z = \frac{\omega^2}{2g}x$

ب) با توجه به مبدأ مختصات، در نقطه‌ای به مختصه z داخل جیوه فشار نسبت به سطح جیوه باید بیشتر باشد. از طرفی روی تمام نقاط سهمی فشار باید P_0 باشد،

با توجه به معادله سهمی یعنی $z = \frac{\omega^2}{2g}x$ تنها امکان خواهد بود:

$$\boxed{P(x,z) = P_0 + \frac{\rho\omega^2 x^2}{2} - \rho g z}$$



پ) مطابق شکل $OF = z + x\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$

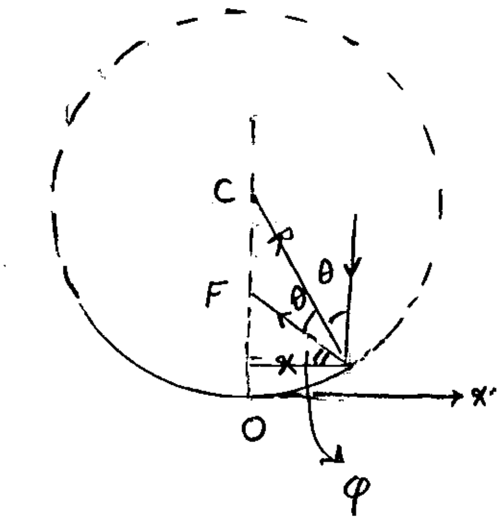
$$= z + x\cot 2\theta$$

$$OF = z + x\,\frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}$$

اما $z = ax^2$ و $\tan\theta = 2ax$ ، $a = \frac{\omega^2}{2g}$

در نتیجه:

$$OF = \frac{1}{4a} \Rightarrow \boxed{OF = \frac{g}{2\omega^2}}$$



ت) اگر R شعاع دایره‌ای باشد که در گودترین نقطهٔ سهمی، بر سهمی مماس است.

مطابق شکل $\cos(\varphi+\theta) = \frac{x}{R}$

که $\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\theta$

در نتیجه $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{x}{R}$

$$\sin\theta = \frac{x}{R}$$

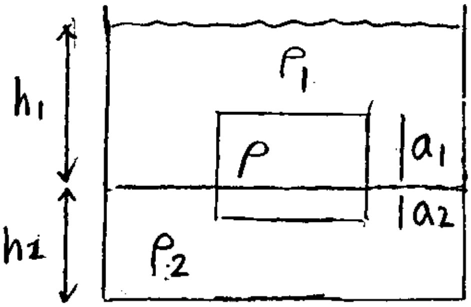
اما برای پرتوهایی که به نزدیکی گودترین نقطه می‌تابد θ کوچک است و لذا

$$tg\theta \approx \sin\theta$$

در نتیجه $tg\theta \approx \frac{x}{R}$ ، اما $tg\theta = 2ax = \frac{\omega^2}{g}x$

در نتیجه $\boxed{R \approx \frac{g}{\omega^2}}$

۴)



۳) در حالت تعادل وزن مکعب مستطیل با نیروی ارشمیدس خنثی می‌شود، یعنی

$$\rho abcg = \rho_1 a_1 bcg + \rho_2 a_2 bcg$$

همچنین

$$a_1 + a_2 = a$$

در نتیجه

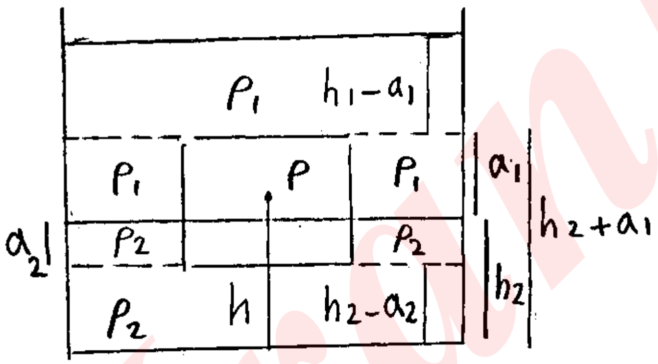
$$\boxed{a_1 = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1} a \quad \text{و} \quad a_2 = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} a}$$

ب) انرژی پتانسیل هر قطعه، مکعب مستطیل (شامل مکعب به چگالی ρ و مایع های ρ_1 و ρ_2)

برابر است با: انرژی پتانسیل = (جرم)(g)(فاصله مرکز مکعب مستطیل تا کف)

با توجه به شکل زیر

$$U_a = \rho abc\, gh + \rho_2 A (h_2 - a_2) g \frac{1}{2}(h_2 - a_2)$$
$$+ \rho_1 A (h_1 - a_1) g \left(h_2 + a_1 + \frac{1}{2}(h_1 - a_1)\right) + \rho_1 (A - bc) a_1 g \left(h_2 + \frac{a_1}{2}\right)$$
$$+ \rho_2 (A - bc) a_2 g \left(h_2 - a_2 + \frac{a_2}{2}\right)$$



که

$$h = h_2 - a_2 + \frac{a}{2}$$

پس از ساده کردن

$$\boxed{U_a = \frac{Ag}{2}\left(\rho_1 h_1^2 + \rho_2 h_2^2 + 2\rho_1 h_1 h_2\right) + g\left(\frac{abc(\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho)}{2(\rho_2 - \rho_1)}\right) a}$$

پ) با توجه به رابطه اخیر و این که $a < b < c$ خواهیم داشت

$$\boxed{U_a < U_b < U_c}$$

ت) در وضعیتی که مکعب به اندازهٔ x بالاتر از وضعیت تعادل خود است برآیند نیروهای وارد بر مکعب صفر نیست، در نتیجه

$$-\rho abcg + \rho_1 (a_1 + x) bcg + \rho_2 (a_2 - x) bcg = \alpha m \ddot{x}$$

با توجه به قسمت آ) که $-\rho abcg + \rho_1 a_1 bcg + \rho_2 a_2 bcg = 0$ و دانستن که $m = \rho abc$ است خواهیم داشت

$$\boxed{\alpha \rho a \ddot{x} + (\rho_2 - \rho_1) g x = 0}$$

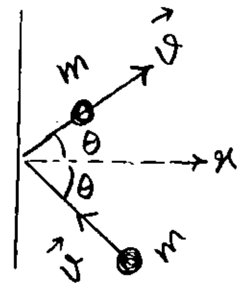
ث)

$$\boxed{\omega_a = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{\alpha \rho a}}}$$

ج)

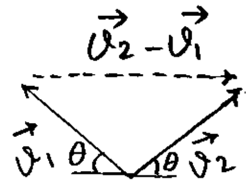
$$\boxed{\omega_c < \omega_b < \omega_a}$$

۵)



با توجه به این که دیوار فقط نیروی عمودی به ذره وارد می‌کند و انرژی ذره تلف نمی‌شود ذره با همان زاویه برخورد به دیوار، باید دیوار را ترک کند

آ) طبق قانون دوم نیوتن : $\vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$



$$F_x = m\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{F_x = \frac{m\,2v\cos\theta}{t_2-t_1}}$$

ب) مانند قبل اگر در مدت T_2-T_1 ، تعداد n ذره هر یک با سرعت v به دیوار برخورد کنند، که l فاصله‌ی بین دو ذره هست : $(T_2-T_1)\,v = nl$

در نتیجه مانند قبل

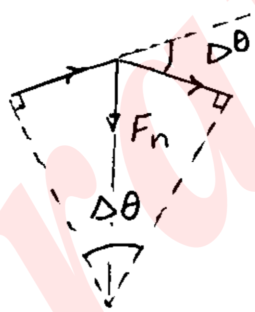
$$F'_x = \frac{(nm)\,2v\cos\theta}{T_2-T_1}$$

$$\boxed{F'_x = \frac{2mv^2\cos\theta}{l}}$$

پ) در حد $l \to 0$ و $\dfrac{m}{l} \to \lambda$

$$\boxed{F'_x = 2\lambda v^2\cos\theta}$$

ت) از تشابه با قسمت قبل و شکل مقابل



$$F_n = 2\lambda v^2\cos\left(\frac{\pi-\Delta\theta}{2}\right)$$

$$F_n = 2\lambda v^2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

اما $\Delta\theta \ll 1$ ، در نتیجه $\sin\dfrac{\Delta\theta}{2} \approx \dfrac{\Delta\theta}{2}$

$$F_n = \lambda v^2\Delta\theta$$

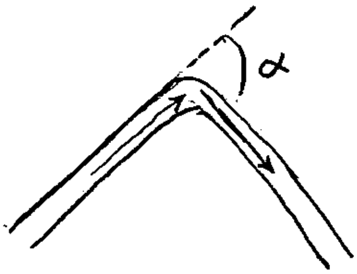
اما $\lambda = \dfrac{m}{l}$ جرم واحد طول شاره است ، اگر سرعت آب v ، عرض نهر w و چگالی آب ρ باشد ، $\lambda = \dfrac{m}{l} = \dfrac{whv\Delta t\rho}{v\Delta t}$ یعنی $\lambda = \rho wh$

در نتیجه

$$\boxed{F_n = \rho w h v^2 \Delta\theta}$$

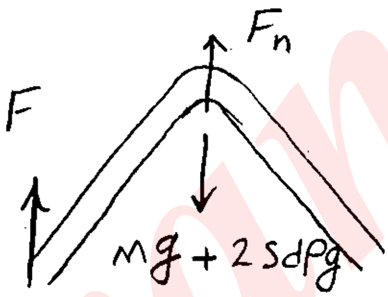
$P = \dfrac{F_n}{A}$ ، $A = (R\Delta\theta)h$ مساحت دیواره پیرونی

$$\boxed{P = \frac{\rho w v^2}{R}}$$



ث) از قسمت ت) دیدیم
نیروی وارد بر جریان آب داخل
لوله هنگام تغییر جهت به اندازه α
برابر است با $F_n = 2\lambda v^2 \sin\frac{\alpha}{2}$

نیروهای وارد بر لوله عبارت از Mg وزن لوله، $2ds\rho g$ وزن آب داخل لوله
و نیروی $2\lambda v^2 \sin\frac{\alpha}{2}$ و نیروی وارد بر نقطهٔ A که جهت آن ما
به صورت زیر است

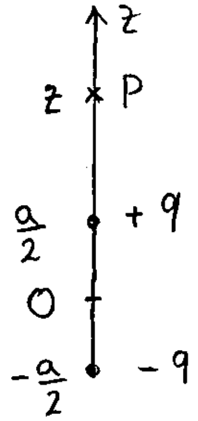


$$F = Mg + 2sd\rho g - F_n$$

و $\lambda = \rho s$

$$\boxed{F = (M + 2sd\rho)g - 2\rho s v^2 \sin\frac{\alpha}{2}}$$

۴)



آ) میدان الکتریکی در نقطه‌ی P به مختصات $(0,0,z)$:

$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{(z-\frac{a}{2})^2} - \frac{q}{(z+\frac{a}{2})^2}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\left(\left(1-\frac{a}{2z}\right)^{-2} - \left(1+\frac{a}{2z}\right)^{-2}\right)$$

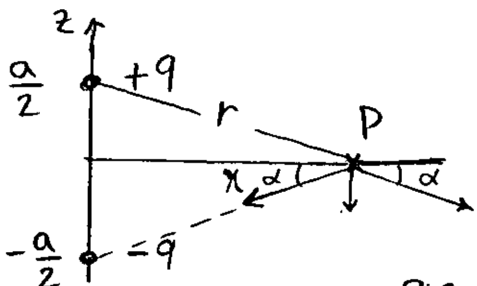
با استفاده از بسط داده شده در راهنمای مسئله:

$$E_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\left(\frac{2a}{z} + \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \cdots\right)$$

در حد $a \to 0$ و $aq \to P$ خواهیم داشت:

$$\boxed{E = \frac{2P}{4\pi\epsilon_0 |z|^3}}$$

ب)



$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}(-2\sin\alpha)$$

که $r = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$ ، $\sin\alpha = \frac{a}{2r}$

$$E_P = \frac{-qa}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{(x^2+\frac{a^2}{4})^{3/2}} = \frac{-qa}{4\pi\epsilon_0 x^3}\left(1+\frac{a^2}{4x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

در حد $a \to 0$ ، $aq \to P$

$$\boxed{E_P = \frac{-P}{4\pi\epsilon_0 |x|^3}}$$

پ)

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(2\frac{q_1 q_2}{x} - 2\frac{q_1 q_2}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q_1 q_2}{x}\left(1 - \left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q_1 q_2}{x}\left(\frac{a^2}{2x^2} - \frac{3}{8}\frac{a^4}{x^4} + \cdots\right)$$

در حد $a \to 0$ ، $q_1 a \to P_1$ ، $q_2 a \to P_2$

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{P_1 P_2}{|x|^3}}$$

ت)

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{x} - \frac{q_1 q_2}{x+a} - \frac{q_1 q_2}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{q_1 q_2}{\sqrt{(x+a)^2+a^2}}\right)$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x}\left(1 - \left(1+\frac{a}{x}\right)^{-1} - \left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\left(1+\frac{a}{x}\right)^2+\frac{a^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{x}\right)^4 + \cdots\right)$$

در حد $a \to 0$ و $q_1 a \to P_1$ ، $q_2 a \to P_2$

$$\boxed{U = 0}$$