۱)

الف) برای مجموعه‌ی دو محفظه: $\Delta U = W + Q$ اما $Q=0$ و لذا

$$(1)\quad \left(\frac{3}{2} n_1 R T_1 + \frac{3}{2} n_2 R T_2\right) - \left[\frac{3}{2} n_1 R T_f + \frac{3}{2} n_2 R T_f\right] = (mg + P_0 A)h$$

که T_f دمای تعادل نهایی و h مقداری است که پیستون بالا رفته.

در ابتدا که دمای محفظه‌ی ۲، T_2 است پیستون در تعادل مکانیکی است یعنی

$$(2)\quad (mg + P_0 A)/A = \frac{n_2 R T_2}{V_2}$$

که V_2 حجم محفظه‌ی ۲ قبل از جابجایی پیستون به اندازه‌ی h است.

بعد از تعادل نیز:

$$(3)\quad (mg + P_0 A)/A = \frac{n_2 R T_f}{V_2 + Ah}$$

از معادلات ۱ و ۲ و ۳:

$$(4)\quad \boxed{T_f = \frac{3n_1 T_1 + 5n_2 T_2}{3n_1 + 5n_2}}$$

ب)

$$Q_{1\to 2} = \frac{3}{2} n_1 R (T_1 - T_f)$$

$$\boxed{Q_{1\to 2} = \frac{15R}{2}\,\frac{n_1 n_2 (T_1 - T_2)}{3n_1 + 5n_2}}$$

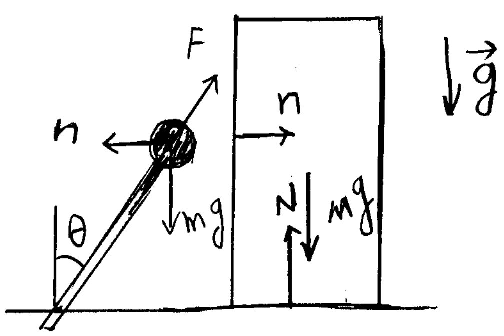
پ) از معادلات ۲ و ۳ و ۴:

$$\boxed{h = \frac{3n_1 n_2 (T_1 - T_2) R}{(3n_1 + 5n_2)(mg + P_0 A)}}$$

ت)

$$\boxed{h = 7.3\ \text{cm} \quad \text{و} \quad Q_{1\to 2} = 9.3\times 10^{1}\ \text{J} \quad \text{و} \quad T_f = 4.5\times 10^{2}\ \text{K}}$$

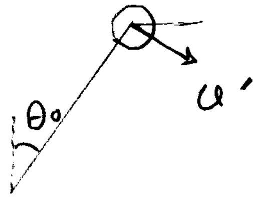
۲)



نیروهای وارد بر m و M تا وقتی دو جسم با هم در تماس‌اند. F نیروی وارد بر m از طرف میله است.

الف) با توجه به بدون اصطکاک بودن سطوح و لولا:

$$mgl = mgl\cos\theta_0 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv'^2$$



اما در لحظه جدا شدن دو جسم $v'\cos\theta_0 = v$

در نتیجه

$$\boxed{\frac{v^2}{lg} = \frac{2(1-\cos\theta_0)\cos^2\theta_0}{1+\frac{M}{m}\cos^2\theta_0}}$$

ب) معادلات حرکت به ازای $\theta<\theta_0$ در راستای افق

$$M: \quad n = Ma$$

$$m: \quad F\sin\theta - n = ma$$

که a شتاب مشترک دو جسم در راستای افق است

در لحظه جدا شدن دو جسم $\theta=\theta_0$ و $n=0$. در نتیجه $a=0$ و بنابراین $\boxed{F=0}$

پ) با توجه به اینکه در $\theta=\theta_0$، $n=0$ و $F=0$ است پس

$$mg\cos\theta_0 = \frac{mv'^2}{l}$$

که $v'\cos\theta_0 = v$، در نتیجه $\cos^3\theta_0 = \frac{v^2}{lg}$ که با قرار دادن در پاسخ الف

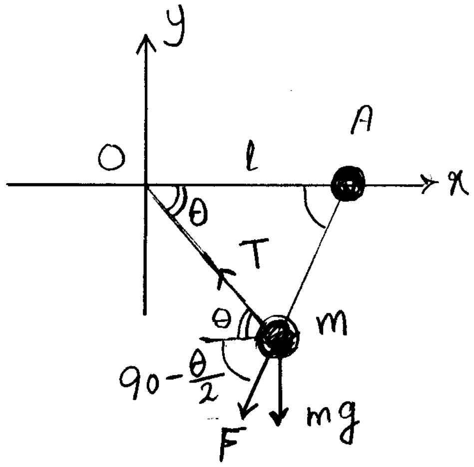
$$\boxed{\frac{M}{m} = \frac{2-3\cos\theta_0}{\cos^3\theta_0}}$$

ت) به ازای $\theta_0 = 60^\circ$:

$$\boxed{\frac{v^2}{lg} = \frac{1}{8} \quad \text{و} \quad \frac{M}{m} = 4}$$

۳)

الف)



$x:\quad F_x = -T\cos\theta - F\sin\frac{\theta}{2}$

$y:\quad F_y = -mg + T\sin\theta - F\cos\frac{\theta}{2}$

که $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{4l^2\sin^2\frac{\theta}{2}}$

ب) در حالت تعادل: $\theta=\theta_0$، $F_x=0$ و $F_y=0$ است. با حذف T بین دو معادله خواهیم داشت:

$$F\left(\cot\theta_0 \sin\frac{\theta_0}{2} + \cos\frac{\theta_0}{2}\right) = -mg$$

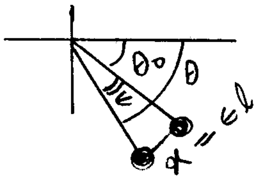
اگر بنویسیم $\cot\theta_0 = \frac{2\cot\theta_0/2}{1-\cot^2\theta_0/2}$ و ساده کنیم

$$(1)\quad \cot\theta_0 = -mg\left(\frac{32\pi\epsilon_0 l^2}{Q^2}\right)\sin^3\frac{\theta_0}{2}$$

یعنی

$$(۲)\quad \boxed{a = -mg\left(\frac{32\pi\epsilon_0 l^2}{Q^2}\right) \quad \text{و} \quad n=3}$$

پ) درباره‌ی $0<\theta_0<2\pi$ همواره $\sin^3\frac{\theta_0}{2}>0$. با توجه به علامت $-\cot\theta_0$ در هر ناحیه پس نواحی ۲ و ۴ امکان‌پذیر نیست. ناحیه‌ی ۱ هم امکان‌پذیر نیست زیرا با توجه به نمودار جسم آزاد، مؤلفه‌ی x نیروهای وارد بر m نمی‌تواند با هم خنثی شود، پس θ_0 فقط در ناحیه‌ی ۳ می‌تواند باشد.



ت) در راستای عمود بر نخ و به ازای $\theta=\theta_0$ حالت تعادل داریم

یعنی $F_x\sin\theta_0 + F_y\cos\theta_0 = 0$

$$(۳)\quad \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2}\,\frac{\cos\frac{\theta_0}{2}}{\sin^2\frac{\theta_0}{2}} + mg\cos\theta_0 = 0$$

اگر جسم m از حالت تعادل منحرف شده باشد: $F_x\sin\theta + F_y\cos\theta = ma$

که a شتاب در راستای عمود بر نخ است. $-F\cos\frac{\theta}{2} - mg\cos\theta = m\frac{d^2x}{dt^2}$

و $\theta=\theta_0+\epsilon$.

پس از بسط حول θ_0 و تا مرتبه‌ی ϵ و استفاده از رابطه‌ی (۲) :

$$\left[\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2}\,\frac{1}{2\sin^3\frac{\theta_0}{2}}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}+2\cos^2\frac{\theta_0}{2}\right)+mg\sin\theta_0\right]\epsilon=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

که $x=\epsilon l$.

با توجه به این که
$$\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2}\,\frac{1}{2\sin^3\frac{\theta_0}{2}}=-\frac{mg}{tg\,\theta_0}$$
خواهیم داشت

$$\left[-\frac{mg}{tg\,\theta_0}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}+2\cos^2\frac{\theta_0}{2}\right)+mg\sin\theta_0\right]\frac{x}{l}=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$$ که $$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{2-3\cos\theta_0-3\cos^2\theta_0}{2\sin\theta_0}}$$

۴) الف)

چون نورها هم زمان از A_i به B_{i+1} می‌رسند، پس

$$A_iB_{i+1} = \frac{c}{n_i}t$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{b}{\sin\alpha_i} = \frac{c}{n_i}t \Rightarrow \frac{n_i}{\sin\alpha_i} = \text{ثابت}$$

یعنی:

$$(1) \quad \frac{n_i}{\sin\alpha_i} = \frac{n_{i+1}}{\sin\alpha_{i+1}}$$

چون α_i ها زاویه حد هستند، پس

$$(2) \quad n_i \sin\alpha_i = n_{i+1}$$

از معادله (۱) و (۲)

$$(3) \quad \boxed{n_{i+2}\, n_i^2 = n_{i+1}^3}$$

ب)

$$\cot\alpha_i = \frac{d_i}{b}$$

$$b\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha_i} - 1} = d_i \Rightarrow d_i = b\sqrt{\left(\frac{n_i}{n_{i+1}}\right)^2 - 1}$$

از معادله (۱):

$$\frac{n_1}{\sin\alpha_1} = \frac{n_{i+1}}{\sin\alpha_{i+1}}$$

و با استفاده از معادله (۲):

$$= \frac{n_{i+1}^2}{n_{i+2}}$$

و با توجه به (۳):

$$= \frac{n_i^2}{n_{i+1}}$$

بنابراین

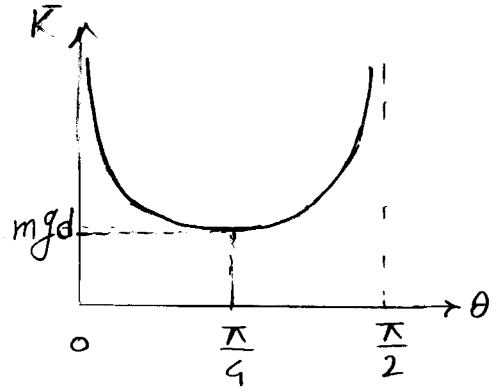
$$\boxed{d_i = b\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_i \sin\alpha_1}\right)^2 - 1}}$$

۵)

آ)

(۱) $2d = \dfrac{v^2 \sin 2\theta}{g}$

(۲) $K = \dfrac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$ $\boxed{K = \dfrac{mgd}{\sin 2\theta}}$



ب) ارتفاع اوج باید بزرگتر یا مساوی h باشد یعنی

(۳) $\dfrac{v^2 \sin^2\theta}{2g} \geqslant h$

که با استفاده از معادله (۱) : $\tan\theta \geqslant \dfrac{2h}{d}$ یا $\boxed{\theta \geqslant \tan^{-1}\left(\dfrac{2h}{d}\right)}$

پ) به ازای $\dfrac{2h}{d} < 1$ و با توجه به نتیجه قسمت ب) ، با انتخاب $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

انرژی جنبشی کمینه می‌شود: $K_{min} = mgd$

به ازای $\dfrac{2h}{d} > 1$

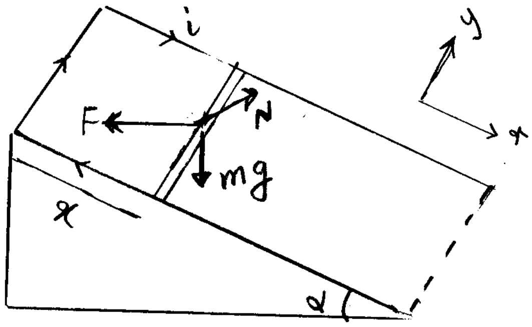
$$K_{min} = \frac{mgd}{\sin\left[2\tan^{-1}\left(\frac{2h}{d}\right)\right]} = \frac{mg}{4h}\left(d^2 + 4h^2\right)$$

$$\boxed{K_{min} = \begin{cases} mgd & \text{اگر} \quad \frac{2h}{d} < 1 \\ \frac{mg}{4h}\left(d^2+4h^2\right) & \text{اگر} \quad \frac{2h}{d} > 1 \end{cases}}$$

ت) با توجه به نمودار قسمت آ) به ازای $\dfrac{2h}{d} < 1$ یا $K > mgd$ دو جواب برای زاویه پرتاب θ داریم، یکی کوچکتر از $\dfrac{\pi}{4}$ و دیگری بزرگتر از $\dfrac{\pi}{4}$ و به ازای $\dfrac{2h}{d} > 1$ یک جواب که بزرگتر از $\dfrac{\pi}{4}$ است.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tan^{-1}\frac{2h}{d} < \theta_1 < \frac{\pi}{4} \,,\quad \frac{\pi}{4} < \theta_2 < \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{2h}{d} & \text{اگر} \quad \frac{2h}{d} < 1 \\ \frac{\pi}{4} < \tan^{-1}\frac{2h}{d} < \theta & \text{اگر} \quad \frac{2h}{d} > 1 \end{array}}$$

۴



آ)

$$\phi_B = B l x \cos\alpha$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -l\cos\alpha \frac{d}{dt}(Bx)$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{-l\cos\alpha}{R}\frac{d}{dt}(Bx)$$

$$F = ilB = \frac{-l^2\cos\alpha}{R} B \frac{d}{dt}(Bx)$$

ب)

$$mg\sin\alpha + F\cos\alpha = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$mg\sin\alpha - \frac{(l\cos\alpha)^2}{R} B \frac{d}{dt}(Bx) = \frac{m\,d^2x}{dt^2}$$

پ) داریم: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}B^2x^2\right) = (Bx)\frac{d}{dt}(Bx)$

با ضرب طرفین جواب قسمت ب) در x واستفاده از معادله اخیر:

$$mgx\sin\alpha - \frac{(l\cos\alpha)^2}{R}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}B^2x^2\right) = mx\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}B^2x^2\right) = \frac{R\,mx}{(l\cos\alpha)^2}\left(g\sin\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

ت) $x = vt$, $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{dx}{dt} = v$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2t^2B^2\right) = \frac{Rmg\sin\alpha\, vt}{(l\cos\alpha)^2}$$

$$\frac{1}{2}v^2t^2B^2 = \frac{Rmg\sin\alpha\, v t^2}{2(l\cos\alpha)^2} \Rightarrow \boxed{B = \sqrt{\frac{mgR\sin\alpha}{v\,l^2\cos^2\alpha}}}$$

ث) $x = \frac{1}{2}at^2$, $\frac{dx}{dt} = at$, $\frac{d^2x}{dt^2} = a$

$$B = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{m(g\sin\alpha - a)R}{at\; l^2\cos^2\alpha}}$$

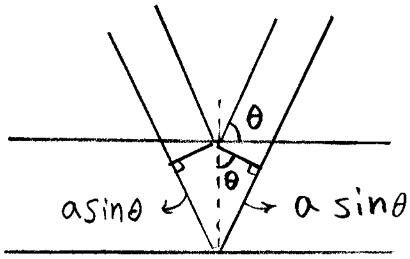
آ)

$$E_e = \frac{hc}{\lambda_{min}} \Rightarrow E_e = \frac{12400\ eV.\AA}{0.25\ \AA}$$

$$\boxed{E_e = 4.96 \times 10^4\ eV}$$

ب)

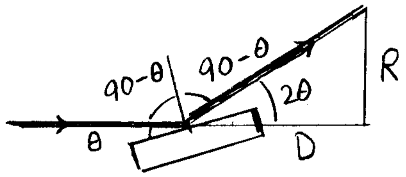
$$\boxed{\lambda_\alpha = 1.55\ \AA}$$



پ) اختلاف راه مطابق شکل، $2a\sin\theta$ است.

برای تداخل سازنده: $\lambda_\alpha = 2a\sin\theta$

$$\boxed{a = \frac{\lambda_\alpha}{2\sin\theta}}$$



ت) مطابق شکل $\cot 2\theta = \frac{D}{R}$

و از قسمت پ) $\sin\theta = \frac{\lambda_\alpha}{2a}$

همچنین $\cot 2\theta = \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta} \Leftarrow \cot^2\theta - \frac{2D}{R}\cot\theta - 1 = 0$

$$\cot\theta = \frac{1}{R}\left(D + \sqrt{D^2+R^2}\right)$$

از سوی دیگر $\frac{1}{\sin\theta} = \sqrt{1+\cot^2\theta}$ در نتیجه

$$\boxed{a = \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{D^2}{R^2}+\frac{D}{R}\sqrt{1+\frac{D^2}{R^2}}}}$$

ث) $\sin\theta = \frac{\lambda_\alpha}{2a} = \frac{\lambda_\alpha}{2d}\sqrt{h^2+k^2+l^2}$

قله ۱ کوچکترین θ را دارد، پس $\boxed{(hkl)_1 = (111)}$

برای قله ۲: $\boxed{(hkl)_2 = (200)}$ و برای قله ۳: $\boxed{(hkl)_3 = (220)}$

ج) برای قله ۲، $2\theta = 32°$. همچنین از قسمت ب) $\lambda_\alpha = 1.55\ \AA$، بنابراین

$$d = \frac{\lambda_\alpha}{2\sin\theta}\sqrt{h^2+k^2+l^2} \Rightarrow d = \frac{(1.55\ \AA)\sqrt{2^2+0^2+0^2}}{2\,(0.27)} \approx 5.7\ \AA$$

از روی نمودار $\sin 16° \approx 0.27$

$$\boxed{d \approx 5.7\ \AA}$$

۸)

۳) چون ذرات را مثل کره‌ای در نظر گرفتیم بار اضافه q به طور یکنواخت روی سطح ذره توزیع می‌شود، بنابراین چگالی بار کل در هر نقطه برابر است با:

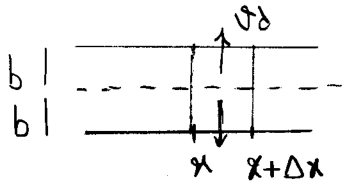
$$\sigma_t = \sigma(\theta) + \frac{q}{4\pi a^2}$$

بیشینهٔ $\sigma(\theta)$ مربوط به $\theta = 0$ است، بنابراین

$$\boxed{q = -12\pi\epsilon_0 E_0 a^2}$$

ب) $$qE_0 + 6\pi\eta a v_d = 0 \Rightarrow \boxed{v_d = \frac{2\epsilon_0 E_0^2 a}{\eta}}$$

پ)



$$2W\,\Delta x\, v_d\, n(x)$$

ت) $$U(2bW)\,n(x) = U(2bW)\,n(x+\Delta x) + 2W v_d\, n(x)\Delta x$$

$$\frac{n(x+\Delta x) - n(x)}{\Delta x} = -\frac{v_d}{bU} n(x) \underset{\Delta x \to 0}{\Rightarrow} \frac{dn}{dx} = -\frac{v_d}{bU} n(x)$$

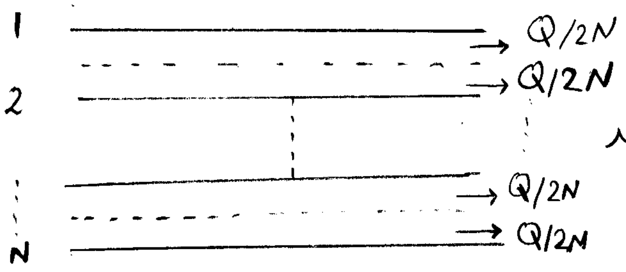
$$\boxed{c = -\frac{v_d}{bU}}$$

ث) $$n(x) = n_0 e^{-\frac{v_d}{bU} x}$$

ج) $$\text{بازده فیلتر} = \frac{n(0) - n(L)}{n(0)} = 1 - e^{-\frac{v_d}{bU} L}$$

چ) $$v_d = \frac{2(9.0\times10^{-12})(5.0\times10^{4})^2(1.0\times10^{-6})}{2.0\times10^{-5}}$$

$$\boxed{v_d = 2.25\times10^{-3}\ m/s}$$



ح) اگر Q حجم کل دود باشد و بین N صفحه تقسیم شود و مساحت هر طرف هر صفحه Wl باشد

سهم هر دو صفحه از جذب دود $Q = 2bWUN$ است

$$\text{بازده} = 1 - e^{-\frac{v_d WL}{Q/2N}}$$

$$Q = 1800 \ \frac{m^3}{min}$$

$$0.99 = 1 - e^{-\frac{v_d WL}{Q/2N}}$$

$$-\frac{v_d WL}{Q/2N} = \log_e 0.01 = -4.6$$

$$\Downarrow$$

$$N = \frac{4.6}{2} \frac{Q}{v_d WL}$$

$$= \frac{(2.3)\left(\frac{1800}{60} \ m^3/s\right)}{(2.25 \times 10^{-3} \ m/s)(20 m^2)}$$

$$\boxed{N = 1533 \ \text{صفحه}}$$