پاسخ تشریحی

یازدهمین المپیاد کامپیوتر

۱. بزرگترین عدد ممکن ۱۱۱۱ و کوچکترین آنها $\overline{1}\,\overline{1}\,\overline{1}\,\overline{1}$ می‌باشد که به‌ترتیب ارزش ۱۵ و ۱۵- دارند. بین این دو عدد نیز همهٔ اعداد صحیح قابل تولید می‌باشند، بنابراین ۳۱ عدد متمایز با ارقام مورد اشاره قابل ساخت می‌باشد.

۲. دسته اعداد زیر، تصاعدهایی هستند که قدرنسبت هر یک از آنها عددی صحیح می‌باشد.

۲,۴,۸	۱,۲,۴
۱,۳,۹	۴,۸,۱۶
۵,۱۰,۲۰	۲,۶,۱۸
۳,۶,۱۲	۱,۴,۱۶
۱,۵,۲۵	۶,۱۲,۲۴
۷,۱۴,۲۸	۳,۹,۲۷

و اما دسته اعداد زیر تصاعدهایی هستند که قدرنسبت هر یک از آنها عددی غیرصحیح می‌باشد:

۱۲,۱۸,۲۷	۸,۱۲,۱۸	۴,۶,۹
۱۶,۲۰,۲۵	۹,۱۵,۲۵	۴,۱۰,۲۵

بنابراین مجموعاً ۱۸ تصاعد هندسی پیدا می‌شود که متأسفانه در گزینه‌ها نیامده است.

منبع: المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)، تألیف رسول حاجی زاده، انتشارات دانش پژوه، ۱۳۸۵

۳. شرط لازم آن است که طول B مضربی از ۴ باشد.

۴. با توجه به داده‌های مسأله ترتیب LMNQJ به‌دست می‌آید، که قبل از L باید فقط یک نفر قرار گیرد، اگر K قبل از L باشد، آنگاه ترتیب افراد به شکل زیر، در می‌آید:

KL □ M □ N □ Q □ J □

که اگر دو نفر P و O پیش هم باشند، آنگاه یک خانه از مربع‌ها را انتخاب کرده و آن دو حرف را در آنجا قرار می‌دهیم (ابتدا P و سپس O)، که این کار به ۵ طریق ممکن است. اما اگر دو نفر P و O پیش هم نباشند آنگاه دو خانه از مربع را به $\binom{۵}{۲}$ ؛ یعنی ۱۰ طریق انتخاب کرده و در اولی P و در دومی O را قرار می‌دهیم.

اگر P قبل از L باشد، آنگاه ترتیب افراد به شکل PL □ M □ N □ Q □ J □ در می‌آید که اگر دو نفر O و K پیش هم باشند، آنگاه یک خانه از مربع‌ها را انتخاب کرده و آن دو حرف را به !۲ طریق در آن مربع قرار می‌دهیم (چون باید K قبل از J باشد، پس مربع آخر نمی‌تواند انتخاب شود)، این کار به $\binom{۴}{۱}\times$!۲ ؛ یعنی ۸ طریق ممکن است. اما اگر دو نفر O و K پیش هم نباشند، آنگاه یکی از چهار مربع اول را انتخاب K را در آن قرار می‌دهیم و سپس یکی از چهار مربع باقی‌مانده را انتخاب کرده و O را در آن قرار می‌دهیم که این کار نیز به ۴ × ۴ طریق ممکن است. بنابراین تعداد کل حالات برابر ۱۶ + ۸ + ۱۰ + ۵ ؛ یعنی ۳۹ خواهد شد.

۵. ارزش عدد ۱۰۱۰۱۰۱۰ در مبنای ۱۰ برابر ۱۷۰ می‌باشد، در حالی که یک عدد هفت رقمی در مبنای ۲ حداکثر ارزشی برابر ۱۲۷ می‌تواند داشته باشد. اگر هر دو عددی که مجموعشان برابر ۱۷۰ می‌شود را مکمل هم بنامیم، آنگاه مکمل ۱۲۷ عدد ۴۳، مکمل ۱۲۶ عدد ۴۴ و ... و بالاخره مکمل ۸۵ خود ۸۵ می‌شود. همهٔ زوج‌های اشاره شده در مبنای دو که تعداد آنها برابر ۱ + ۴۳ - ۸۵ ؛ یعنی ۴۳ می‌باشد، در مبنای ۲ حداکثر ۷ رقمی هستند در حالی که سایر زوج‌های مکمل مثل ۴۰ و ۱۳۰، یکی از مؤلفه‌هایشان در مبنای ۲ هشت رقمی بوده و قابل قبول نیستند.

۶. تعداد a ها برابر ۳ و تعداد b ها برابر ۶ بوده و شروع هر یک از دنباله‌ها با a و پایان آن دنباله‌ها با دو عدد b می‌باشد که به شکل زیر می‌باشند:

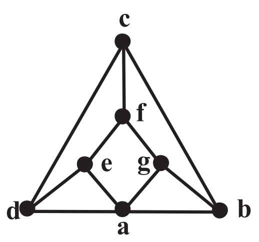
aaabbbbbb	aabbbbabb	ababbbabb
aababbbbb	abaabbbbb	abbaabbbb
aabbabbbb	abababbbb	abbababbb
aabbbabbb	ababbabbb	abbabbabb

۷. تعداد کل جایگشت‌های از ۱ تا ۱۰ برابر !۱۰ می‌باشد که در نصف آنها ۱ قبل از ۲ و در نصف دیگر ۲ قبل از ۱ می‌باشد. به‌همین ترتیب در نصف اعداد مطلوب ($\frac{۱۰!}{۲}$) عدد ۳ قبل از ۴ و در نصف دیگر ۴ قبل از ۳ می‌باشد. اگر به‌همین ترتیب ادامه دهیم، معلوم است که جواب مطلوب برابر $\frac{۱۰!}{۲^{۵}}$ خواهد شد.

۸. در کل جدول حداکثر سه لامپ قرمز، سه لامپ زرد و یک لامپ سبز موجود است، بنابراین وجود دو لامپ آبی الزامی است. مطابق جـدول مقابل وجود دو لامپ آبی کافی است.

قرمز	سبز	زرد
زرد	قرمز	آبی
آبی	زرد	قرمز

۹. به خاطر تقارن موجود در شکل اگر فرض کنیم ab زرد، ag قرمز، ae آبی و ad سبز باشند، کلیت مسأله به‌هم نمی‌خورد. در این صورت رنگ سایر یال‌ها به اجبار به شکل زیر خواهند بود.

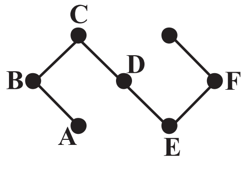


de = قرمز , ef = سبز , dc = آبی , fg = آبی

cf = قرمز , cb = سبز , gb = ?

همان‌طور که مشخص است برای gb رنگی پیدا نمی‌شود.

۱۰. اگر یک دورهٔ تناوب از شکل را درنظر بگیریم و مختصات نقطهٔ A به‌صورت (k , k) باشد، آنگاه اولاً K فرد است. ثانیاً در نقاط A، B، C، D،



E و F به‌ترتیب اعداد ۱ + ۳k ، ۲ + ۳k ، ۳ + ۳k ، ۴ + ۳k ، ۵ + ۳k و ۶ + ۳k قرار دارد. عدد ۱۳۷۹ به‌صورت ۲ + ۳k می‌باشد. بنابراین آن عدد در نقطهٔ B قرار دارد. چون از تساوی ۱۳۷۹ = ۲ + ۳k مقدار k برابر ۴۵۹ به‌دست می‌آید. پس مختصات نقطهٔ A به‌صورت (۴۵۹ , ۴۵۹) و مختصات نقطهٔ B به‌صورت (۴۶۰ , ۴۵۸) خواهد بود.

۱۱. افراد را A ، B و C می‌نامیم. $n(X)$ ، $n(\overline{X})$ ، $n(X \cap Y)$ و $n(X \cup Y)$ ، به‌ترتیب نشانگر تعداد افرادی است که به X رأی داده‌اند، به X رأی نداده‌اند، هم به X و هم به Y رأی داده‌اند و بالاخره به X یا Y رأی داده‌اند. حداقل مقدار عبارت $n(A \cap B \cap C)$ مطلوب مسأله می‌باشد.

$$n(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \le n(\overline{A}) + n(\overline{B}) + n(\overline{C}) = ۴ + ۸ + ۱۱ = ۲۳$$

$$\Rightarrow \quad n[(\overline{A \cap B \cap C})] \le ۲۳ \quad \Rightarrow \quad n(\text{کل}) - n(A \cap B \cap C) \le ۲۳$$

$$\Rightarrow \quad ۳۰ - n(A \cap B \cap C) \le ۲۳ \quad \Rightarrow \quad ۷ \le n(A \cap B \cap C)$$

۱۲. بهترین عدد ممکن عدد ۱۰۱۰۰۰۱۱۰ می‌باشد که شامل ۹ رقم می‌باشد.

۱۳. اگر نفر اول x متر را پیاده و مابقی x - ۱۳۰۰ متر را با دوچرخه برود معلوم است که نفر دوم x متر اول را با دوچرخه و مابقی مسافت را پیاده خواهد رفت. بهترین حالت آن است که هر دو هم‌زمان به مقصد برسند. بنابراین:

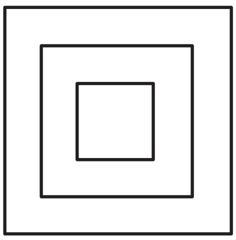
$$\frac{x}{۴} + \frac{۱۳۰۰ - x}{۱۲} = \frac{x}{۱۶} + \frac{۱۳۰۰ - x}{۶} \quad \Rightarrow \quad ۱۳x = ۴ \times ۱۳۰۰ \quad \Rightarrow \quad x = ۴۰۰$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{۴۰۰}{۴} + \frac{۱۳۰۰ - ۴۰۰}{۱۲} = ۱۰۰ + ۷۵ = ۱۷۵$$

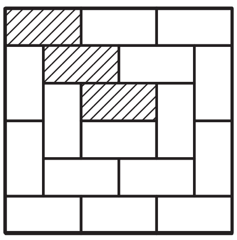
۱۴. گزینه‌ای مطلوب است که به‌ازای دو رشتهٔ موجود در آن یک رشتهٔ ۶ حرفی یافت نشود که هر دو رشتهٔ داده شده زیررشتهٔ آن باشند. به‌ازای ۱۰۱۰ و ۱۱۱ موجود در گزینهٔ الف رشتهٔ ۰۱۰۱۱۱۰ و به‌ازای ۱۰۱ و ۱۱۱ موجود در گزینهٔ ب رشتهٔ ۱۰۱۱۱۱ و به‌ازای ۱۱۰۱۱ و ۱۰۱۱۰ موجود در گزینهٔ ج رشتهٔ ۱۱۰۱۱۰ موجود هستند، بنابراین گزینه‌های مطلوب نمی‌باشند، به‌ازای ۰۱۰۱ و ۱۱۱۰ موجود در گزینهٔ د هیچ رشتهٔ ۶ حرفی که هر دوتای آنها زیررشتهٔ آن باشند یافت نمی‌شود.

۱۵. یک نفر حداکثر ۶ نفر می‌تواند آشنا داشته باشد. بنابراین A حتماً راست گفته است؛ یعنی A با همه دست داده است، از جمله B.G نمی‌تواند دروغ گفته باشد زیرا در این صورت با ۶ نفر دست داده است (با همه) که در این صورت G با هر دو نفر A و B دست داده است و جواب او «۱» دروغ است، در صورتی که تعداد دروغ‌گوها بیش از یک نفر نیست. پس B نیز راستگو می‌باشد؛ یعنی A با همه و B به غیر از G با همه دست داده‌اند. بنابراین E و F هر دو حداقل با هر دو نفر A و B دست داده‌اند. به طریق مشابه استدلال می‌شود که دو نفر C و D نمی‌توانند دروغگو باشند یعنی یکی از دو نفر E یا G دروغ گفته است.

۱۶. اگر بار اول تا دهم همگی سفید بیایند، حسین و در غیر این صورت علی برنده خواهد شد؛ یعنی به غیر از حالت اشاره شده، اگر حسین بخواهد برنده شود باید ۱۰ بار متوالی سفید بیاید که چون قبل از این سفیدها یک سیاه آمده است، قبل از پرتاب آمدن سفید دهم، علی برنده می‌شود، چون یک سیاه و نه سفید متوالی ظاهر شده است. بنابراین احتمال برد حسین $(\frac{۱}{۲})^{۱۰}$ و احتمال برد علی $۱ - (\frac{۱}{۲})^{۱۰}$ می‌باشد.



۱۷. اگر کف اتاق را به شکل مقابل در نظر بگیریم و در هیچ یک از سه ناحیه کاشی قرار ندهیم، آنگاه کودک به دو طریق می‌تواند کاشی‌ها را در هر یک از آن ناحیه قرار دهد. پس وجود حداقل سه کاشی الزامی است.



اگر سه عدد کاشی را مطابق شکل مقابل در کف اتاق بچینیم کودک فقط به یک طریق می‌تواند کار را ادامه دهد.

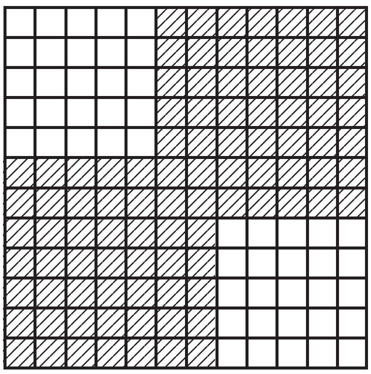
۱۸. تعداد کلماتی که حرف اول آنها برابر a است و یک حرفی، دو حرفی، ... و شش حرفی می‌باشند، به‌ترتیب برابر $۲^۰$، $۲^۱$، $۲^۲$، $۲^۳$، $۲^۴$، $۲^۵$ می‌باشند که مجموع آنها برابر $۲^۶ - ۱$؛ یعنی ۶۳ می‌شود. پس از کلمهٔ شصت و چهارم به بعد همهٔ کلمات با b شروع می‌شوند. تعداد کلماتی که با ba شروع می‌شوند $۲^۵ - ۱$؛ یعنی ۳۱ می‌باشد، بنابراین از کلمهٔ شصت و پنجم تا کلمهٔ نود و پنجم از جمله کلمهٔ هفتاد و نهم با ba شروع می‌شوند. تعداد کلماتی که با baa شروع می‌شوند برابر $۲^۴ - ۱$؛ یعنی ۱۵ می‌باشد، بنابراین از کلمهٔ

شصت و ششم تا کلمهٔ هشتادم، از جمله کلمهٔ هفتاد و نهم با baa شروع می‌شوند. با همین استدلال معلوم می‌شود که کلمهٔ هفتاد و نهم کلمهٔ baabba می‌شود.

۱۹. حالت مینیمم موقعی است که سطرهای دوم، چهارم، ششم و هشتم همگی ۱ و مابقی خانه‌ها ۰ باشند، که در این صورت تعداد ۱ ها، ۳۶ خواهد بود.

حالت ماکزیمم نیز موقعی است که سطرهای فرد همگی ۱ و سطرهای زوج نیز یک در میان ۱ باشند (با شروع از ۱) که در این صورت نیز تعداد ۱ ها $۵ \times ۴ + ۹ \times ۵$؛ یعنی ۶۵ خواهد بود.

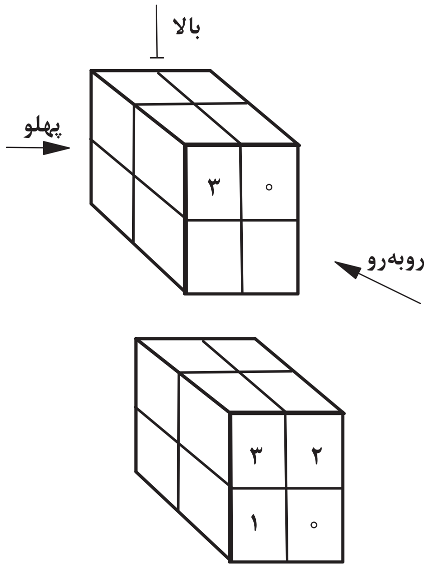
۲۰. خانه‌های هاشور خورده نشانگر O و سایر خانه‌ها نشانگر X می‌باشند. پس از مراحلی وضعیت جدول به شکل مقابل می‌باشد که ۹۴ خانه از آن O می‌باشد و تا آن مرحله هرگز تعداد O ها به بیش از ۹۴ نمی‌رسد. پس از این مرحله یک در میان وضعیت جدول به همین شکل می‌شود. پس هرگز تعداد O ها بیش از ۹۴ نخواهد رسید.



۲۱. اگر $A_۱$ راستگو باشد وضعیت حقیقی آن یازده نفر به ترتیب به‌صورت د، د، ر، د، ر، د، ر، ر، ر، ر، ر و اگر $A_۱$ دروغ‌گو باشد وضعیت حقیقی آن یازده نفر، به‌ترتیب به‌صورت ر، ر، د، ر، د، ر، د، د، د، د، د خواهد بود. پس تعداد دروغ‌گوها در این جمع حداقل برابر ۴ می‌باشد.

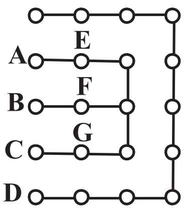
۲۲. در ابتدا آب موجود در هر یک از ظروف را $\frac{۳^k}{۳^k}$ در نظر می‌گیریم که در آن k به‌اندازهٔ کافی بزرگ است.

پس از گذشت مراحلی وضعیت سه ظرف چنان است که مخرج همان ۳^k بوده و صورت آنها به‌صورت $a \times ۳^i$ ، $b \times ۳^i$ و $c \times ۳^i$ در می‌آید. در مرحلهٔ بعد با فرض این که آب موجود در ظرف اول را تقسیم کنیم صورت سه کسر به‌ترتیب برابر $a \times ۳^{i-۱}$ ، $(۳b+a) \times ۳^{i-۱}$ و $(۳c+a) \times ۳^{i-۱}$ خواهد شد که اگر صورت هر یک از کسرها را با مخرج آنها ساده کنیم، صورت آن کسرها به‌ترتیب به‌صورت a ، $۳b+a$ و $۳c+a$ خواهد شد که باقی‌ماندهٔ آن سه عدد در تقسیم بر ۳ یکسان است. در بین گزینه‌ها فقط سه عدد موجود در گزینهٔ «د» چنان هستند که صورت هر سه عدد در تقسیم بر ۳ باقی‌ماندهٔ ۱ می‌آورد.



۲۳. فرض می‌کنیم اعداد ۰ و ۳ از وجه «روبه‌رو» مطابق شکل مقابل، پهلوی هم باشند در این صورت هر دو عدد نوشته شده در خانه‌های بالای وجه «پهلو» برابر ۲ خواهد بود که مطلوب نیست. اما اگر اعداد ۰ و ۳ از وجه «روبه‌رو» مطالب شکل مقابل پهلوی هم نباشند در این‌صورت، آنگاه اعداد موجود در ستون اول وجه «پهلو» هر دو برابر ۲ خواهد شد که باز مطلوب نیست. بنابراین هرگز حالت خواسته شده به‌دست نمی‌آید.

۲۴. ابتدا حمید پاره‌خط‌های EF ،AB و BC را کشیده و دو امتیاز کسب می‌کند، سپس امید پاره‌خط‌های FG را کشیده و دو امتیاز کسب می‌کند و جایزهٔ خود را یکی از پاره‌خط‌های باقی‌مانده انتخاب کرده و رسم می‌کند. این پاره‌خط هر پاره‌خطی (مانند CD) می‌تواند باشد، همهٔ امتیازات باقی‌مانده که ۸ امتیاز می‌باشد را نصیب حمید خواهد کرد.



۲۵. I. برای آن که A و B به مرحلهٔ نهایی برسند الگوریتم زیر اجرا می‌شود:

- C و D با هم قیاس می‌شوند که D برنده می‌شود.
- A و D با هم قیاس می‌شوند که A برنده شده و به همراه B به فینال می‌رسد.

II. برای آن که C و D به مرحلهٔ نهایی برسند الگوریتم زیر اجرا می‌شود:

- A و B با هم قیاس می‌شوند که B برنده می‌شود.
- B و D با هم قیاس می‌شوند که D برنده شده و به‌همراه C به فینال می‌رسد.

III. برای آن که B و C به مرحلهٔ نهایی برسند الگوریتم زیر اجرا می‌شود:

- A و D با هم قیاس می‌شوند که A برنده می‌شود.
- A و C با هم قیاس می‌شوند که C برنده شده و به‌همراه B به فینال می‌رسد.

IV. برای آن که A و C به مرحلهٔ نهایی برسند الگوریتم زیر اجرا می‌شود:

- B و D با هم قیاس می‌شوند که D برنده می‌شود.
- D و A با هم قیاس می‌شوند که A برنده شده و به‌همراه C به فینال می‌رسد.

۲۶. ۵ خط مرسوم از A مثلث را به ۶ ناحیه تقسیم می‌کند. ۱۵ خط مرسوم از B هر یک، خطوط مرسوم از A (۵ خط سوایی به همراه پاره‌خط AC) را قطع می‌کند و به‌ازای هر نقطهٔ تقاطع یک ناحیهٔ جدید ایجاد می‌شود. بنابراین کل ناحیه‌های به‌دست آمده تا این مرحله برابر ۱۵×۶+۶؛ یعنی ۹۶ می‌باشد. هر یک از ۱۰ خط مرسوم از C هر یک از ۲۱ خط قبلی (۵+۱۵ خط سوایی به همراه پاره‌خط AB) را در یک نقطه قطع می‌کند، بنابراین تعداد ناحیه‌های اضافه شده برابر ۱۰×۲۱؛ یعنی ۲۱۰ خواهد شد. معلوم می‌شود که تعداد کل ناحیه‌ها برابر ۲۱۰ + ۹۶؛ یعنی ۳۰۶ می‌باشد.

۲۷. تعداد طرقی که آن دو در نقطهٔ ۵ با هم ملاقات کنند برابر $۱^{۲}$ می‌باشد. تعداد طرقی که آن دو در نقطهٔ ۳ با هم ملاقات کنند برابر $\binom{۵}{۱}^{۲}$؛ یعنی ۲۵ می‌باشد. در حقیقت هر یک از آن دو نفر به $\binom{۵}{۱}$ طریق می‌توانند یکی از ۵ حرکت خود را به‌عنوان حرکت برگشتی انتخاب کنند.

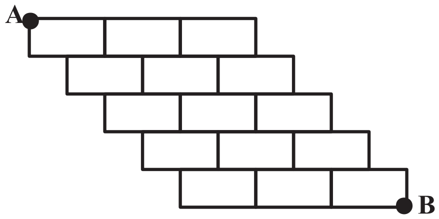
تعداد طرقی که آن دو در نقطهٔ ۱ با هم ملاقات کنند برابر $\binom{۵}{۲}^{۲}$؛ یعنی ۱۰۰ می‌باشد. در حقیقت هر یک از آن دو نفر به $\binom{۵}{۲}$ طریق می‌توانند دو تا از ۵ حرکت خود را به‌عنوان حرکت برگشتی انتخاب کنند.

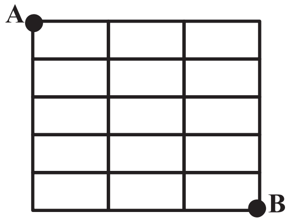
تعداد طرق ملاقات آن دو در نقاط ۵-، ۳- و ۱- نیز به همان صورت به‌دست می‌آید. پس جواب مطلوب برابر ۲(۱۰۰ + ۲۵ + ۱)؛ یعنی ۲۵۲ می‌باشد.

یادآوری می‌شود که امکان ملاقات آن دو در نقاط زوج غیرممکن است.

۲۸. اگر M + N زوج باشد کامپیوتر و در غیر این صورت بازی‌کن برنده می‌شود.

۲۹. بعضی از خطوط شبکه اضافه بوده و هرگز از آنها نمی‌توان عبور کرد. با حذف آن خطوط، شبکهٔ جدید به‌صورت مقابل در می‌آید:





تعداد مسیرهای مطلوب در شبکهٔ فوق با تعداد مسیرهای از A به B در شبکهٔ مقابل تفاوتی ندارد که این تعداد برابر $\binom{۳+۵}{۳}$ ؛ یعنی ۵۶ می‌باشد.

۳۰. برای آن که دو قورباغه به هم برسند لازم است برایند حرکت هر یک از آن دو ۳۴۷۵ سانتی‌متر به‌سمت دیگری باشد. عدد ۳۴۷۵ در مبنای ۲ به شکل ۱۱۰۱۱۰۰۱۰۰۱۱ = A می‌باشد. در هر جهش قورباغه به‌اندازهٔ ۲^{i} سانتی‌متر جهش می‌کند و این به آن معناست که به عدد A در مبنای ۲ به‌اندازهٔ ۰۰ ... ۱۰۰ اضافه و یا آن اندازه از A کم شده است. عمل موقعی به اتمام می‌رسد که عدد مورد نظر به ۰ برسد. بهترین الگوریتم به شکل زیر می‌باشد:

$$A - ۲^{۰} - ۲^{۲} - ۲^{۴} + ۲^{۷} + ۲^{۹} - ۲^{۱۲}$$

الگوریتم فوق پس از ۶ مرحله قورباغه‌ها را به هم خواهد رساند.

۳۱. تنوع حروف به‌کار رفته در هر یک از کلمات به یکی از چهار شکل زیر می‌باشد:

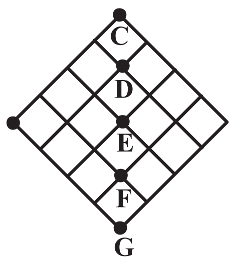
x , x , x , x , x , x , y , y

x , x , x , x , x , x , x , y

x , x , x , x , y , y , y , y

x , x , x , x , x , y , y , y

تعداد کلمات قابل ساخت در هر یک از چهار شکل فوق به‌ترتیب $\frac{۸!}{۷!}\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۱}$ ، $\frac{۸!}{۶!\,۲!}\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۱}$ ، $\frac{۸!}{۵!\,۳!}\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۱}$ و $\frac{۸!}{۴!\,۴!}\binom{۶}{۲}$ می‌باشد که مجموع آنها ۳۸۱۰ می‌شود.



۳۲. نقاط تقاطع دومتحرک یکی از نقاط C، D، E، F و G از شکل مقابل می‌باشد که احتمال ملاقات آن دو نفر در هر یک از نقاط مورد اشاره به شکل زیر می‌باشد:

$$P(C) = P(G) = \frac{۱}{۱۶} \times \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱}{۲۵۶}$$

$$P(D) = P(F) = \frac{۴}{۱۶} \times \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱۶}{۲۵۶}$$

$$P(E) = \frac{۶}{۱۶} \times \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳۶}{۲۵۶}$$

$$\Rightarrow \quad P = \sum P_i = \frac{۱}{۲۵۶} + \frac{۱۶}{۲۵۶} + \frac{۳۶}{۲۵۶} + \frac{۱۶}{۲۵۶} + \frac{۱}{۲۵۶} = \frac{۷۰}{۲۵۶} = \frac{۳۵}{۱۲۸}$$

۳۳. اگر دورهٔ ۱، ۲، ۳، ...، ۹ به تعداد چهار بار تکرار شود، آنگاه هر یک از آن ۹ عدد یک بار در سمت بالا، یک بار در سمت پایین، یک بار در سمت راست و یک بار در سمت چپ به کار می‌روند؛ یعنی بعد از طی چهار دوره به نقطهٔ اولیه خواهیم رسید که در این صورت مجموعاً $(۹ + ... + ۳ + ۲ + ۱) \times ۴$؛ یعنی ۱۸۰ دسی‌متر طی شده است.

۳۴. اگر تعداد رشته‌هایی به طول n که شامل ۰۰ نیستند را با $F(n)$ نمایش دهیم، آنگاه آن تعداد را به دو دسته تقسیم کنیم، رشته‌هایی که رقم آخرشان ۰ است و رشته‌هایی که رقم آخرشان ۱ است. رقم ماقبل آخر تمام رشته‌های موجود در دستهٔ اول ۱ می‌باشد چون در هیچ‌یک از آنها دو رقم ۰ پشت سر هم نیامده است، بنابراین تعداد آن رشته‌ها را $n - ۲$ رقم اول تعیین خواهد کرد که با توجه به تعریف این تعداد برابر $F(n - ۲)$ می‌باشد. تعداد رشته‌های موجود در دستهٔ دوم نیز برابر $F(n - ۱)$ می‌باشد. بنابراین رابطهٔ $F(n) = F(n - ۱) + F(n - ۲)$ برقرار است و با توجه به تساوی‌های $F(۲) = ۳$ و $F(۳) = ۵$ تساوی‌های زیر حاصل خواهند شد:

$$F(۴) = ۸ \quad , \quad F(۵) = ۱۳ \quad , \quad F(۶) = ۲۱ \quad , \quad F(۷) = ۳۴ \quad , \quad F(۸) = ۵۵$$

از طرف دیگر با توجه به اصل شمول و عدم شمول رابطهٔ زیر برقرار است:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

حاصل هر یک از عبارات $|A|$ و $|B|$ برابر ۵۵ به‌دست آمد. حاصل $|A \cap B|$ نیز برابر ۲ می‌باشد زیرا تنها دو رشتهٔ ۱۰۱۰۱۰۱۰ و ۰۱۰۱۰۱۰۱ می‌باشد که نه شامل ۰۰ است و نه شامل ۱۱. بنابراین:

$$|A \cup B| = ۵۵ + ۵۵ - ۲ = ۱۰۸$$

۳۵. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد بر ۳ برابر ۱ باشد، آنگاه یکی از ارقام ۱ موجود در جایگاه‌های فرد را از ۱ به ۰ تبدیل می‌کنیم و اگر آن جایگاه‌ها ۰ باشد می‌توانیم یکی از ارقام ۰ موجود در جایگاه‌های زوج را از ۰ به ۱ تبدیل کنیم، که اگر چنین چیزی نیز ممکن نبود دو تا از ۰ های موجود در جایگاه‌های فرد را از ۰ به ۱ تبدیل می‌کنیم. به همین شیوه ثابت می‌شود که اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد بر ۳ برابر ۲ باشد نیز بیشینهٔ عدد بخش‌پذیری ۲ است.

۳۶. وقتی جعبه‌ای مانند i (غیر از ۱) خالی شود به این معناست که هر چهار کارت با شمارهٔ i دور انداخته شده‌اند و هیچ کارتی با شمارهٔ i در بین کارت‌ها باقی نمانده است؛ یعنی هرگز به جعبهٔ خالی رجوع نخواهیم کرد. در مورد جعبهٔ ۱، مطلب فوق صدق نمی‌کند زیرا آخرین کارت جعبهٔ ۱ وقتی از آن جعبه خارج می‌شود که قبل از آن سومین ۱ از یکی از جعبه‌ها بیرون آمده باشد و با آمدن چهارمین ۱، مجبوریم به جعبهٔ ۱ مراجعه کنیم که قبل از این هر چهار کارت آن جعبه خارج شده‌اند. بنابراین به‌طور حتم جعبهٔ خواسته شده جعبهٔ ۱ می‌باشد.

۳۷. پس از مرحلهٔ صدم سطور دوم، چهارم، ششم و ... به‌ترتیب کمترین ۱ ها را دارند که پس از اجرای مراحل ۱۰۱ تا ۱۰۹ تعداد ۱ های سطور ۲ و ۴ به مراتب افزایش یافته و تعداد ۱ های سطر ششم که در آخر این سطر قرار دارند کمتر از مابقی سطور می‌باشد.

۳۸. اگر رئوس پایانی متناظر به اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ... را در نظر بگیریم، به‌ترتیب رئوس B، C، D، E، A، B، C، D، E، A، ... خواهد شد که با دورهٔ تناوب ۵ دنبالهٔ B، C، D، E، A تکرار می‌شود. چون باقی‌ماندهٔ عدد داده شده بر ۵ برابر ۴ می‌باشد، بنابراین رأس مورد نظر رأس E می‌باشد.

۳۹. چون رقم سمت چپ W همیشه ۱ است پس رقم سمت راست W^R همیشه ۱ خواهد بود؛ یعنی W^R همیشه عددی فرد است. با توجه به تساوی $W = 12W^R$ معلوم می‌شود که W مضرب ۴ بوده، ولی مضرب ۸ نمی‌باشد؛ یعنی W در سمت راست خود به دو رقم ۰ ختم می‌شود و این به آن معناست که W از

W^R فقط دو رقم بیشتر دارد. عددی که در مبنای ۲ از عدد دیگر ۲ رقم اضافی داشته باشد، حداکثر a برابر دیگری می‌تواند باشد که a کمتر از ۸ می‌باشد.

۴۰. شیوهٔ تولید مورد اول به شکل زیر می‌باشد:

(لازم به یادآوری است که در هر مرحله می‌توانیم به تعداد دلخواه A وارد عمل کنیم و در ضمن شمارهٔ عمل به کار رفته بر روی فلش نوشته شده است.)

$$۴A \xrightarrow{(۱)} ۴B\ ۴D = ۴B\ \ ۴(D\ A) \xrightarrow{(۲)} ۸B\ ۴C = ۶B\ ۴C\ ۲B \xrightarrow{(۳)} ۶B\ ۴C\ ۲D$$

شیوهٔ تولید مورد سوم به شکل زیر می‌باشد:

$$۲A \xrightarrow{(۱)} ۲B\ ۲D \xrightarrow{(۳)} ۲D\ ۲D = ۴D$$

شیوهٔ تولید مورد چهارم به شکل زیر می‌باشد:

$$۳A \xrightarrow{(۱)} ۳B\ ۳D = ۳B\ \ ۳(D\ A) \xrightarrow{(۲)} ۳B\ ۳B\ ۳C = ۲B\ ۴B\ ۳C$$

$$\xrightarrow{(۳)} ۲D\ ۴B\ ۳C = ۲(D\ B)\ ۲B\ ۳C \xrightarrow{(۱)} ۲B\ ۳C$$

مورد دوم قابل تولید نمی‌باشد.