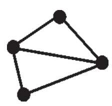
پاسخ تشریحی

چهاردهمین المپیاد کامپیوتر

۱. شبکه کامل شبکه‌ای است که در آن هر شهر به تمام شهرهای دیگر وصل باشد. در چنین شبکه‌ای ۴۵ جاده وجود دارد چون از هر شهر ۹ جاده خارج می‌شود که مجموع کل جاده‌های خارج شده از ۱۰ شهر ۱۰×۹ یعنی ۹۰ می‌شود و چون هر جاده برای دو شهر شمارش شده است، تعداد واقعیِ جاده‌ها برابر $\frac{۹۰}{۲}$ یعنی ۴۵ می‌شود (به طریق دیگر چون در شبکه کامل بین هر دو شهری جاده وجود دارد، بنابراین به‌ازای انتخاب هر دو شهر متمایز یک جاده معرفی خواهد شد، به این معنا که تعداد جاده‌ها برابر $\binom{۱۰}{۲}$ یعنی ۴۵ می‌باشد).

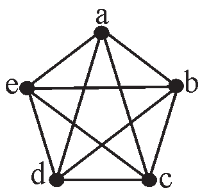
چون در استان داده شده ۴۰ جاده وجود دارد، بنابراین می‌توان تصور کرد که شبکه مورد نظر شبکه‌ای است که از شبکه کامل ۵ جاده برداشته شده باشد. باید آن ۵ جاده را چنان برداریم که تعداد شهرهای با ۹ جاده، ماکزیمم باشد. اگر آن پنج جاده را به‌صورت مقابل از شبکه برداریم تعداد ۶ شهر به‌صورت مرکز باقی می‌ماند.



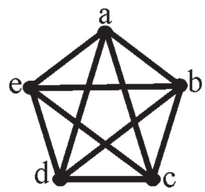
۲. بعد از حرکات اول X و O سطر و یا ستونی که در آن x قرار داشته و o قرار ندارد توسط X انتخاب شده و در کنار x قبلی یک x قرار می‌دهد. بعد از قرار داده شدن o در یکی از دو طرف xها توسط X، O در حرکتِ سومِ خود x را در طرف دیگر xهای قبلی قرار داده و برنده می‌شود.

منبع: المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)، تألیف رسول حاجی زاده، انتشارات دانش پژوه، ۱۳۸۵

۳. شرط لازم آن است که مجموع اعداد از ۱ تا n یعنی $\frac{n(n+۱)}{۲}$ زوج باشد، به‌عبارت دیگر $n(n+۱)$ مضرب ۴ باشد و آن موقعی است که یکی از دو عدد n و یا $n+۱$ مضرب ۴ باشد. در بین گزینه‌ها فقط به‌ازای $n=۲۰۰۳$ حاصل $n(n+۱)$ مضرب ۴ می‌شود.

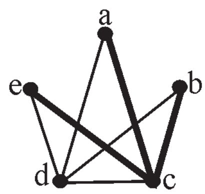


۴. دوستیِ بین دو میمون را با خط پررنگ و دشمنی بین آنها را با خط کم‌رنگ نشان می‌دهیم که به شکل مقابل خواهیم رسید، با این توضیح که قرار است تعدادی از ۱۰ خطِ کشیده شده پررنگ و مابقی کم‌رنگ شوند و در ضمن نمی‌توان در آن شکل مثلث‌هایی به‌شکل  و یا  ترسیم کرد.

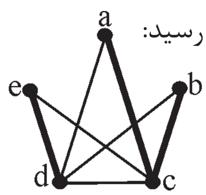


I) اگر هر پنج ضلعِ پنج‌ضلعی پررنگ باشند، آنگاه تمام قطرهای آن پنج‌ضلعی نیز پررنگ خواهد شد و به شکل مقابل خواهیم رسید:

II) اگر ضلعی مانند cd از پنج‌ضلعی کم‌رنگ باشد آنگاه دقیقاً یکی از دو ضلع bc و bd و نیز دقیقاً یکی از دو ضلع ac و ad و همچنین دقیقاً یکی از دو ضلع ec و ed کم‌رنگ خواهند بود. اگر سه ضلعِ کم‌رنگ همگی متصل به یک رأس (مانند d) متصل باشند و یا دو تا از آنها به یک رأس و سومی به رأس دیگر وصل باشند به‌ترتیب به دو شکل «۱» و «۲» خواهیم رسید:

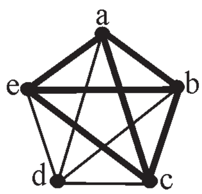


(۱)

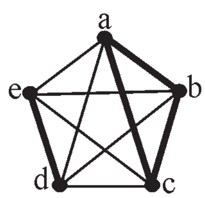


(۲)

بقیه پاره‌خط‌های مربوط به اشکال فوق به‌صورت منحصربه‌فرد، به شکل زیر معلوم می‌شوند:



(۱)

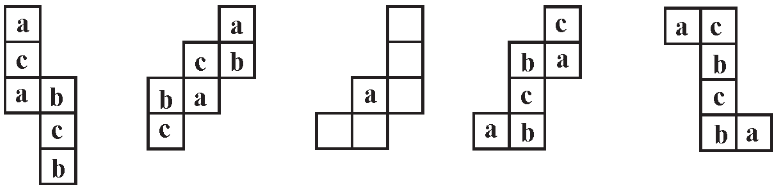


(۲)

۵. معلوم است که اگر همه ۱۰ نفر دروغ‌گو باشند، همه افراد می‌توانند جمله یاد شده را بیان کنند و نیز اگر ۴ نفر از آن ۱۰ نفر راستگو و ۶ نفر دیگر دروغ‌گو باشند، همه افراد می‌توانند جمله مورد نظر را بیان کنند.

تعداد طُرق اختصاص ۴ حرفِ «ر» و ۶ حرفِ «د» به دنباله از a_1 تا a_{10} برابر $\binom{10}{4}$ و نیز تعداد طُرق اختصاص ۱۰ حرفِ «د» به آن دنباله برابر $\binom{10}{10}$ می‌باشد، بنابراین جواب مورد نظر $\binom{10}{10} + \binom{10}{4}$ یعنی ۲۱۱ می‌باشد.

۶. همه اشکال به غیر از وسطی، قابل تبدیل هستند. وجوه مقابل را با حروف یکسان نام‌گذاری می‌کنیم. در شکل مورد اشاره برای وجهی که با a اسم‌گذاری شده است، وجه مقابلی یافت نمی‌شود.

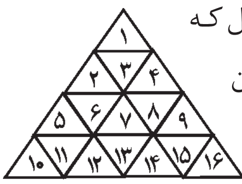


۷. مجموع اعداد از ۱ تا k را t نام‌گذاری می‌کنیم. بزرگترین عدد مضرب ۱۱ که کوچکتر یا مساوی t باشد را با t_1 و عدد مضرب ۱۱ ماقبل t_1 را t_2 می‌نامیم.

اگر $t-t_1$ زوج باشد آنگاه $\frac{t-t_1}{2}$ عددی صحیح بین ۰ تا ۵ خواهد بود که در این حالت با تبدیل علامت جمع به تفریق در پشت $\frac{t-t_1}{2}$ حاصلِ آن عبارات به‌جای t برابر t_1 خواهد شد که به ۱۱ بخش‌پذیر است، و اگر $t-t_1$ فرد باشد آنگاه $\frac{t-t_2}{2}$ عددی طبیعی بین ۶ تا ۱۰ خواهد شد که در این حالت نیز با تبدیل علامت جمع به تفریق در پشت عدد $\frac{t-t_2}{2}$ حاصلِ آن عبارات t_2 خواهد شد که باز مضرب ۱۱ است.

۸. فرض کنید بازیکنی در نوبت خود قادر باشد به تعداد k و یا $k+1$ خانه حرکت کند. اگر با حرکت k خانه او، بازیکن دیگر بتواند برنده شود (معلوم است که در این حالت بازیکن دوم مهره را k و یا $k+1$ خانه جابه‌جا کرده است)، آنگاه آن بازیکن به جای k خانه، $k+1$ خانه مهره را جابه‌جا می‌کند و نمی‌گذارد بازیکن دوم برنده شود زیرا در این حالت بازیکن دوم مهره را $k+1$ خانه و یا $k+2$ خانه جابه‌جا می‌کند که در هر حال از خانه مورد نظر می‌گذرد و در آن خانه متوقف نمی‌شود. و در حالتی که با حرکت $k+1$ خانه توسط بازیکن اول، بازیکن دوم بتواند برنده شود بازیکن اول حرکت خود را به جای $k+1$ حرکت به k حرکت تغییر می‌دهد.

۹. تبدیل یافته تمام اعداد از ۱۰۲۴ تا ۲۰۴۳ در مبنای ۲ عددی ۱۱ رقمی می‌شوند. بنابراین تبدیل یافته تمام اعداد داده شده در مبنای ۲ عددی ۱۱ رقمی می‌شود. از طرف دیگر معلوم می‌شود که رقم iام عدد حاصل از عمل یاد شده برای اعداد داده شده برابر ۱ است اگر تعداد ۱های موجود در جایگاه iام کل آن اعداد فرد باشد و در غیر این صورت آن رقم برابر ۰ است. تعداد اعداد داده شده برابر ۶۲۳ است که عددی فرد است، بنابراین در جایگاه یازدهم به تعداد ۶۲۳ رقم ۱ وجود دارد به این معنا که رقم یازدهم از عدد حاصل ۱ است و در نتیجه آن عدد بین ۱۰۲۴ و ۲۰۴۳ می‌باشد. رقم دهم از اعداد معادل اعداد ۱۰۲۴ تا ۱۵۳۵ در مبنای ۲ برابر ۰ و آن رقم در معادل‌های اعداد از ۱۵۳۶ تا ۲۰۴۳ برابر ۱ می‌باشد (۱۰۲۴/۲ + ۱۰۲۳ = ۱۵۳۵)، بنابراین رقم دهم از معادل‌های اعداد از ۱۳۸۲ تا ۱۵۳۵ (که تعداد آنها زوج است) برابر ۰ و آن رقم در معادل‌های اعداد از ۱۵۳۶ تا ۲۰۰۴ (که تعداد آنها فرد است) برابر ۱ می‌باشد و در نتیجه چون در تعداد فردی از ۶۲۳ عدد داده شده رقم دهم برابر ۱ است در عدد حاصل نیز آن رقم ۱ است. عددی که در مبنای ۲ هر دو رقم دهم و یازدهمش برابر ۱ باشد، بزرگتر یا مساوی ۵۱۲ + ۱۰۲۴ می‌باشد که در بین گزینه‌ها فقط گزینه آخر در این محدوده می‌گنجد.



۱۰. مثلث‌ها را مطابق شکل از ۱ تا ۱۶ نام‌گذاری می‌کنیم. در حالت اول که می‌خواهیم مجموع اعداد موجود در مثلث‌های مجاور هر مثلثی فرد باشد، چون تنها مثلث مجاور برای مثلث ۱ مثلث ۳ می‌باشد بنابراین علامت مثلث ۳ برابر «۱» می‌باشد. از طرف دیگر چون فقط دو خانه ۳ و ۶ مجاور خانه ۲ می‌باشد بنابراین علامت خانه ۶ برابر «۰» می‌شود. به همین ترتیب علامت خانه ۸ نیز «۰» می‌شود. علامت خانه ۱۳ برابر «۱» و علامت خانه‌های ۱۱ و ۱۵ برابر «۰» می‌شود که تناقض است.

در حالت دوم تمام مثلث‌های ۳، ۶، ۸، ۱۱، ۱۳ و ۱۵ علامتِ «۰» را به خود می‌پذیرند. هر یک از دسته مثلث‌های سه‌گانه ۱، ۲ و ۴ و نیز دسته مثلث‌های سه‌گانه ۹، ۱۴ و ۱۶ به‌طور مستقل از یکدیگر به چهار طریق «۰، ۰، ۰» یا «۰، ۱، ۱» یا «۱، ۰، ۱» و یا «۱، ۱، ۰» قابل علامت‌گذاری می‌باشند و بقیه مثلث‌ها وابسته به این‌ها به صورت منحصربه‌فرد پر می‌شوند، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر ۴×۴ می‌باشد.

۱۱. چون خانه وسط در تمام چهار پرانتز تکرار می‌شود پس برای بیشینه شدن آن حاصل، لازم است آن خانه با عدد ۹ پر شود. اگر ۸ عددِ دیگر را به چهار دسته {۲ , ۱} ، {۴ , ۳} ، {۶ , ۵} و {۸ , ۷} تقسیم کنیم آنگاه کاوه می‌تواند در هر مرحله با توجه به عملکرد هادی، در خانه مقابل خانه‌ای که هادی عددِ x را قرار داده است، هم دسته x را قرار دهد که در این صورت عدد به‌دست آمده برابر ۹۰۰ خواهد شد.

۱۲. اولین رقم از سمت راستِ A که با معادلش در B متفاوت باشد را i می‌نامیم. در هر مرحله، از اولین رقم از سمت چپ A شروع کرده و تا رقم i تمام ارقام را تعویض می‌کنیم که بعد از ۵ مرحله به شکل زیر به دنباله B خواهیم رسید.

$$A_0 = \underline{1011100100} \longrightarrow A_1 = \underline{0100011}010 \longrightarrow A_2 = \underline{10111}00010 \longrightarrow$$
$$A_3 = \underline{0100}010010 \longrightarrow A_4 = \underline{1}011010010 \longrightarrow A_5 = 0011010010 = B$$

۱۳. اگر اسب‌ها را مطابق شکل زیر از ۱ تا ۲۴ شماره‌گذاری کنیم، بیشینه مقدار k برابر ۲۴ به‌دست خواهد آمد:

۶	۱۱	۱۶	۲۱	۴
۱۷	۲۲	۵	۱۰	۱۵
۱۲	۷	۲۴	۳	۲۰
۲۳	۱۸	۱	۱۴	۹
	۱۳	۸	۱۹	۲

۱۴. اگر اعداد از ۱ تا n را به‌صورت زیر در یک ردیف بنویسیم همه اعداد از ۱ تا n - ۱ تولید خواهند شد:

n , ۱ , n - ۱ , ۲ , n - ۲ , ۳ , ...

۱۵. ***راه حل اول:*** در حالتی که اعداد از ۱ تا ۲۰ پشت سر هم نوشته شوند عددجای‌گشت مورد نظر برابر ۰ - ۰ یعنی ۰ به‌دست می‌آید. اگر در همان حال فقط جای دو عدد ۱ و ۲ را با هم عوض کنیم تا بـه جای‌گشت ۱۹۲۰...۲۱۳۴۵۶ برسیم عدد مورد نظر برابر ۰ - ۱ یعنی ۱ خواهد شد. از این جا به بعد به‌ازای هر دو عدد فردی که بخواهند در کنار هم قرار بگیرند لاجرم دو عدد زوج نیز پیش هم قرار خواهند گرفت و بنابراین عدد مورد نظر از برابر x - (x + ۱) یعنی ۱ خواهد شد.

راه حل دوم: دسته‌ای از اعداد فرد که در کنار هم هستند را O و دسته‌ای از اعداد زوج که در کنار هم هستند را E می‌نامیم. معلوم است که اگر در دسته‌ای m عدد موجود باشد، m - ۱ جفت عدد با زوجیت

یکسان در کنار هم قرار گرفته‌اند. جای‌گشت مورد نظر به یکی از چهار شکل زیر می‌باشد:

I) $E_1 O_1 E_2 O_2 \dots E_n O_n$

II) $E_1 O_1 E_2 O_2 \dots E_n O_n E_{n+1}$

III) $O_1 E_1 O_2 E_2 \dots O_n E_n$

IV) $O_1 E_1 O_2 E_2 \dots O_n E_n O_{n+1}$

فرض کنید $|E_i|$ و $|O_i|$ به‌ترتیب نشانگر تعداد اعداد موجود در هر یک از دسته‌های E_i و O_i باشد، آنگاه اولاً معلوم است که $\sum |O_i| = \sum |E_i| = 10$ و ثانیاً تعداد جفت عددهای متوالی که هر دو عدد آن از نظر زوجیت یکسان باشد در هر یک از آن دو دسته به‌ترتیب برابر $|E_i| - 1$ و $|O_i| - 1$ خواهد شد، بنابراین در هر یک از چهار حالت اشاره شده عددِ خواسته شده به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{I)}\ x_1 = (|O_1|-1)+(|O_2|-1)+\dots+(|O_n|-1)-[(|E_1|-1)+(|E_2|-1)+\dots+(|E_n|-1)]$$
$$= \sum |O_i| - \sum |E_i| = 0$$

$$\text{II)}\ x_2 = (|O_1|-1)+(|O_2|-1)+\dots+(|O_n|-1)-[(|E_1|-1)+(|E_2|-1)+\dots+(|E_{n+1}|-1)]$$
$$= \sum |O_i| - \sum |E_i| - 1 = -1$$

$$\text{III)}\ x_3 = x_1 = 0$$

$$\text{IV)}\ x_4 = (|O_1|-1)+(|O_2|-1)+\dots+(|O_{n+1}|-1)-[(|E_1|-1)+(|E_2|-1)+\dots+(|E_n|-1)]$$
$$= \sum |O_i| - \sum |E_i| + 1 = 1$$

در بین اعداد به‌دست آمده عددِ ۱ از همه بیشتر است.

۱۶. چون یکی از مؤلفه‌های زوج مرتب داده شده، زوج است پس در هر مرحله به هر مؤلفه مقداری زوج اضافه و یا کم می‌شود که زوجیت عدد اولیه را تغییر نمی‌دهد، بنابراین جواب نهایی جوابی است که مؤلفه اولش زوج و مؤلفه دومش فرد باشد که در بین گزینه‌ها فقط گزینه «د» چنین ویژگی را دارد. البته این شرط، شرط لازم بوده و کافی نیست. در هر مرحله نقطه (m, n) به یکی از نقاط $(m, n(1+m))$، $(m, n(1-m))$، $(m(1+n), n)$، $(m(1-n), n)$ تبدیل می‌شود به این معنا که یکی از مؤلفه‌ها ثابت مانده و مؤلفه دیگر در (۱ + مؤلفه ثابت) و یا (مؤلفه ثابت - ۱) ضرب می‌شود. اگر مؤلفه‌های اولیه غیر مساوی با ۱ باشند، قدر مطلق مؤلفه‌های نقاط بعدی از قدرمطلق نقاط قبلی بیشتر

می‌شود. بنابراین نقطه اولیه متناظر به زوج مرتب موجود در گزینه د به شکل زیر به‌دست می‌آید:

(۹ × ۳۱- , ۳۲) = یا (۹ × ۳۳ , ۳۲) = نقطه قبلی ⇐ (۹ × ۳۳ × ۳۱- , ۳۲) = (۹۲۰۷- , ۳۲)

⇐ نقطه قبلی = (۳۲ , ۹) = ((۴-) × (۸-) , ۹)

⇐ نقطه قبلی = (۴- , ۹) = (۴- , (۳-) × (۳-))

⇐ نقطه قبلی = (۴- , ۳-) = (۴- , (۱) × (۳-)) یا ((۱-) × ۴ - , ۳-) یا ((۲-) × ۲ - , ۳-)

⇐ نقطه قبلی = (۴- , ۱)

یا = (۱- , ۳-)

یا = (۲ , ۳-)

معلوم است که هیچ‌یک از نقاط به‌دست آمده به نقطه (۳ , ۲) نخواهد رسید، بنابراین جواب درست در گزینه‌های نیامده است.

۱ ۰	۲ ۳	۸ ۷	۱۷ ۱۸	۳۵ ۳۵
۰ ۱	۲ ۲	۵ ۵	۱۰ ۱۰	۱۸ ۱۷
۱ ۰	۲ ۱	۳ ۳	۵ ۵	۸ ۷
۰ ۱	۱ ۱	۱ ۲	۲ ۲	۳ ۲
۱ ۰	۱ ۰	۱ ۰	۱ ۰	۱ ۰

۱۷. برای هر رأس، خانه‌ای را مطابق شکل مقابل متناظر می‌کنیم. عدد بالایی در هر خانه نشانگر تعداد مسیرهایی از A تا به رأس متناظر به آن خانه می‌باشد که تعداد علامت‌های - در آن مسیرها، زوج باشد و عدد پایینی نشانگر تعداد مسیرهای از A به آن مقصد می‌باشد که تعداد علامت‌های - در آن مسیرها، فرد است. اگر علامت رأسی + باشد (رئوس متناظر به خانه‌های سفید)، آنگاه عدد بالایی خانه متناظرش با مجموع دو عدد بالایی خانه‌های پایین و چپش و عدد پایینی آن با مجموع دو عدد پایین آن دو خانه برابر است، و اگر علامت رأسی - باشد (رئوس متناظر به خانه‌های تیره)، آنگاه عدد بالایی خانه متناظرش با مجموع دو عدد پایینی خانه‌های پایین و چپش و عدد پایینی آن با مجموع دو عدد بالایی آن دو خانه برابر خواهد بود.

۱۸. در هر مرحله یک سکه از تعداد سکه‌ها کم می‌شود، بنابراین برای آن که ۵۰ سکه به یک سکه تبدیل شود (۴۹ سکه کم شود) عمل یاد شده باید ۴۹ بار انجام پذیرد.

۱۹. برای تبدیل سکه‌های ۱ تومانی به یک سکه ۴۰ تومانی، در هر یک از بازه‌های [۳۹ , ۲۰]، [۱۹ , ۱۰]، [۹ , ۵]، [۴ , ۳] حداقل یک نوع سکه تولید می‌شود. تولید سکه ۲ تومانی در اولین مرحله نیز اجتناب‌ناپذیر است، بنابراین تولید حداقل ۷ نوع سکه (با احتساب سکه‌های ۱ و ۴۰ تومانی) مشخص است. با ۷ نوع سکه به یکی از طرق زیر می‌توان به جواب رسید:

$$\left.\begin{array}{r} ۱ \to ۲ \to ۴ \to ۸ \to ۱۶ \to ۳۲ \\ ۱ \to ۲ \to ۴ \to ۸ \end{array}\right\} \to ۴۰$$

$$\left.\begin{array}{r} ۱ \to ۲ \to ۴ \to ۸ \to ۱۶ \\ ۱ \to ۲ \to ۴ \end{array}\right\} \to ۲۰ \to ۴۰$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} ۱ \to ۲ \to ۴ \to ۸ \to ۱۶ \\ ۱ \to ۲ \to ۴ \to ۸ \end{array}\right\} \to ۲۴ \\ ۱ \to ۲ \to ۴ \to ۸ \to ۱۶ \end{array}\right\} \to ۴۰$$

۲۰. با توجه به این که $۲^۱ + ۲^۲ + ... + ۲^{i-۱} = ۲^i - ۲$ ، بنابراین وزن سنگین‌ترین وزنه از مجموع اوزان بقیه وزنه‌هایش بیشتر است، بنابراین سنگین‌ترین وزنه در هر مرحله در کفه‌ای قرار دارد که سنگین‌تر است. بنابراین در مرحله اول ۶۹۱ وزنه را در یک کفه و ۶۹۱ وزنه دیگر را در کفه دیگر قرار می‌دهیم بر روی وزنه‌های کفه‌ای که سنگین‌تر باشد را یک علامت می‌زنیم، وزنه مورد نظر در وزنه‌های علامت‌دار قرار دارد. ۳۴۵ وزنه علامت‌دار را در همان کفه نگه داشته و مابقی (۳۴۶ تا) را در کفه دیگر و در کنار ۶۹۱ وزنه قبلی قرار می‌دهیم. کفه‌ای که سنگین‌تر باشد وزنه مورد نظر را شامل است. بر روی وزنه‌های آن کفه علامت جدیدی می‌گزاریم. یقیناً وزنه مورد نظر در بین وزنه‌هایی که شامل دو علامت هستند قرار دارد که تعداد این وزنه‌ها حداکثر برابر ۳۴۶ می‌باشد. اگر این روند را تا انتها ادامه دهیم به این ترتیب که در هر مرحله در یک کفه فقط نصفِ وزنه‌ها با ماکزیمم علامت را قرار داده و مابقی وزنه‌ها را در کفه دیگر قرار دهیم بعد از ۱۱ مرحله وزنه مورد نظر به‌دست می‌آید با این توضیح که در هر مرحله حداکثر تعداد وزنه‌های با ماکزیمم علامت به شکل زیر می‌باشد.

$$۶۹۱ \to ۳۴۶ \to ۱۷۳ \to ۸۷ \to ۴۴ \to ۲۲ \to ۱۱ \to ۶ \to ۳ \to ۲ \to ۱$$

۲۱. در هیچ حالتی معلوم نمی‌شود سبک‌ترین وزنه در کدام کفه قرار دارد مگر در حالتی که در یک کفه فقط سنگین‌ترین وزنه و در کفه دیگر سایر وزنه‌ها موجود باشد، بنابراین به غیر از دسته اخیر که شامل ۱۳۸۱ وزنه است هرگز دسته دیگری نمی‌توان یافت به‌طوری که مطمئن شد وزنه سبک‌تر (و یا هر وزنه دیگر به غیر از سنگین‌ترین وزنه) در آن دسته قرار داشته باشد.

۲۲. در ثانیه iام $(i \geq ۲)$ به تعداد $۲^{i-۱}$ نقطه سیاه بر روی خط $y=x$ و به تعداد ۲^i نقطه سیاه بر روی خط $y=x-۲^i$ اضافه می‌شود، بنابراین رابطه $U_n = U_{n-۱} + ۲^n + ۲^{n-۱}$ بین تعداد نقاط سیاه در دو مرحله n و $n-۱$ برقرار است. معلوم است که $U_۱ = ۵$ بنابراین:

$U_۲ = ۵ + ۴ + ۲ = ۱۱$

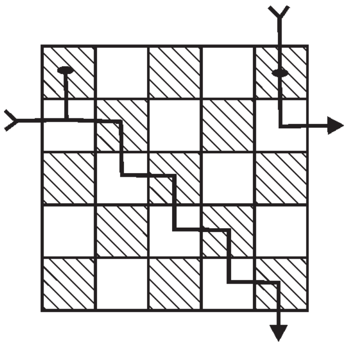
$U_۳ = ۱۱ + ۸ + ۴ = ۲۳$

$U_۴ = ۲۳ + ۱۶ + ۸ = ۴۷$

$U_۵ = ۴۷ + ۳۲ + ۱۶ = ۹۵$

$U_۶ = ۹۵ + ۶۴ + ۳۲ = ۱۹۱$

۲۳. مطابق شکل مقابل حرکات از مراحل ۲ تا ۱۱ همانند حرکات از مراحل ۱۲ تا ۲۱ و یا ۲۲ تا ۳۱ و یا ... می‌باشد، بنابراین حرکت دوره تناوبی به‌طور ۱۰ دارد به این معنا که در حرکت ۱۳۸۲ همانند حرکات دوازدهم و دوم در خانه (۲ , ۲) قرار خواهیم داشت.



۲۴. معلوم است که هر یک از خانه‌های (۱ , ۵)، (۲ , ۴)، (۳ , ۳)، (۴ , ۲) و (۵ , ۱) فقط متعلق به یک مستطیل می‌باشند. با انتخاب آن پنج مستطیل، تعداد بارهایی که هر خانه از جدول شمارش می‌شوند مطابق شکل مقابل می‌باشد:

۵	۴	۳	۲	۱
۴	۳	۲	۱	
۳	۲	۱		
۲	۱			
۱				

حال اگر خانه‌های (۱ , ۴)، (۲ , ۳)، (۳ , ۴) و (۴ , ۱) را انتخاب کرده و مجموع ۴ عدد به‌دست آمده را از مجموعِ ۵ عدد قبلی کم کنیم، آنگاه هر یک از خانه‌ها دقیقاً یک بار در حاصل جمع به کار می‌رود.

۲۵. می‌دانیم باقی‌مانده مجموع دو عدد در تقسیم بر ۱۳ (یا هر عدد دیگری) با باقی‌مانده مجموع باقی‌ماندهای آن دو عدد در تقسیم بر ۱۳ برابر است. بنابراین باقی‌مانده F_i به‌ازای i از ۱ تا ۱۰۰ در تقسیم بر ۱۳ مطابق جدول مقابل خواهد بود که دوره تناوبی برابر ۲۸ دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود تعداد مضارب ۱۳ در بین آن اعداد برابر $۱+[\frac{۱۰۰}{۷}]$ یا ۱۵ می‌باشد.

۰	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۰
	۸	۸	۳	۱۱	۱	۱۲	۰
	۱۲	۱۲	۱۱	۱۰	۸	۵	۰
	۵	۵	۱۰	۲	۱۲	۱	۰
	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۰
	۸	۸	۳	۱۱	۱	۱۲	۰
	۱۲	۱۲	۱۱	۱۰	۸	۵	۰
	۵	۵	۱۰	۲	۱۲	۱	۰
	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۰
	۸	۸	۳	۱۱	۱	۱۲	۰
	۱۲	۱۲	۱۱	۱۰	۸	۵	۰
	۵	۵	۱۰	۲	۱۲	۱	۰
	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۰
	۸	۸	۳	۱۱	۱	۱۲	۰
	۱۲	۱۲					

۲۶. فرض می‌کنیم x توانی از ۲ به‌صورت $x=۲^t$ باشد در این صورت اعداد از ۱ تا ۱۰۲۳ را به $\frac{۱۰۲۴}{x}$ دسته x عضوی تقسیم می‌کنیم (دسته اول $(x-۱)$ عضوی است). در هر دسته به تعداد $۱+۲+۳+...+(x-۱)$ یعنی $\frac{x(x-۱)}{۲}$ سکه «۱» تورویی وجود دارد که تعداد کل آنها $\frac{۱۰۲۴}{x}\times\frac{x(x-۱)}{۲}$ می‌شود. هر یک از اعضای دسته دوم شامل ۱ سکه x تورویی، هر یک از اعضا دسته سوم شامل ۲ سکه x تورویی، ... و بالاخره هر یک از اعضای دسته $\frac{۱۰۲۴}{x}$ شامل $(\frac{۱۰۲۴}{x}-۱)$ سکه x تورویی می‌باشند که تعداد کل آنها $x(۱+۲+۳+...+(\frac{۱۰۲۴}{x}-۱))$ یا $۵۱۲(\frac{۱۰۲۴}{x}-۱)$ می‌باشد که با احتساب $\frac{۱۰۲۴}{x}$ سکه x تورویی مربوط به خود ۱۰۲۴ ریال، تعداد کل سکه‌ها به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$m=\frac{۱۰۲۴}{x}\times\frac{x(x-۱)}{۲}+۵۱۲(\frac{۱۰۲۴}{x}-۱)+\frac{۱۰۲۴}{x}=۵۱۲(x-۲+\frac{۱۰۲۶}{x})$ حاصل عبارت فوق به‌ازای ۲، ۳۲، ۱۲۸ و ۵۱۲ برای x به‌ترتیب برابر ۲۶۲۶۵۶، ۳۱۷۷۶، ۶۸۶۱۶ و ۲۶۲۱۴۶ می‌باشد که به‌ازای ۳۲ برای x مینیمم است.

اگر x برابر ۱۰ باشد، آنگاه تعداد سکه‌های ۱ تورویی برابر $۱۰۲\times(۱+۲+۳+...+۹)+(۱+۲+۳+۴)$ یعنی ۴۶۰۰ می‌شود، تعداد سکه‌های ۱۰ تورویی نیز برابر $۱۰\times(۱+۲+۳+...+۱۰۱)+۵\times۱۰۲$ یعنی ۵۲۰۲۰ می‌باشد که در کل، تعداد همه سکه‌ها برابر ۵۶۶۲۰ می‌شود.

.۲۷

$$\left.\begin{array}{l} P(۱)+P(۲)+\ldots+P(۹)=۴۵ \\ P(۱۰)+P(۱۱)+\ldots+P(۱۹)=۴۶ \\ P(۲۰)+P(۲۱)+\ldots+P(۲۹)=۲\times۴۶ \\ \vdots \\ P(۹۰)+P(۹۱)+\ldots+P(۹۹)=۹\times۴۶ \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۹۹} P(i)=۴۶^{۲}-۱$$

به همین ترتیب حاصل $\sum P(i)$ به‌ازای از ۱۰۰ تا ۱۹۹، از ۲۰۰ تا ۲۹۹، ...، از ۹۰۰ تا ۹۹۹ به‌ترتیب برابر $۴۶^۲$، $۴۶^۲ \times ۲$، ...، $۴۶^۲ \times ۹$ می‌باشد که مجموع کل آنها برابر $۴۶^۳ - ۱$ می‌شود.

.۲۸ اعداد موجود در کارت iام را a_i می‌نامیم. بعد از دستور اول نابرابری $a_۱ < a_۲$ برقرار است. بقیه دستورها را از بالا به پایین دوبه‌دو یک زوج می‌نامیم. زوج kام به شکل $[(k+۱, k+۲), (k, k+۱)]$ خواهد بود. بنابراین ۸۰ زوج به‌دست می‌آید که برایند آن عملکرد زوج kام آن است که اعداد موجود در سه کارت k، $k+۱$ و $k+۲$ به‌صورت صعودی مرتب می‌شود. معلوم است که اعداد بزرگ به سمت پایین منتقل می‌شوند ولی اعداد موجود در آن کارت‌ها حداکثر دو پله به سمت بالا می‌تواند منتقل شود، بنابراین اگر کوچک‌ترین عدد در کارت ۴ و یا پایین‌تر باشد هرگز آن عدد به کارت ۱ منتقل نخواهد شد ولی بزرگ‌ترین عدد به پایین‌ترین کارت و دومین عدد بزرگ به دومین کارت از پایین منتقل خواهند شد.

.۲۹ ترتیب انجام اعمال در نتیجه نهایی بی‌اثر است بنابراین به‌ترتیب دلخواه عملِ یاد شده را انجام دهید تا به جواب مورد نظر برسید به‌عنوان مثال ترتیبی از اعمال به شکل زیر، نقطه (۲ , ۱ , ۱) را به‌دست خواهد داد:

$$(۳,۳,۴) \to (۲,۶,۳) \to (۵,۵,۲) \to (۴,۴,۵) \to (۳,۳,۸) \to (۲,۶,۷) \to (۵,۵,۶)$$
$$(۱,۱,۲) \to (۰,۴,۱) \to (۳,۳,۰) \to (۲,۲,۳) \to (۱,۵,۲) \to (۴,۴,۱) \to$$

.۳۰ اگر ۲۵۶ عدد مورد نظر را با ۱۶ دسته ۱۶تایی از ۰ تا ۱۵، از ۱۶ تا ۳۱، از ۳۲ تا ۴۷، ...، از ۲۴۰ تا ۲۵۵ تقسیم کنیم آنگاه رقم $a_۴$ در دسته‌های دوم، چهارم، ...، شانزدهم برابر ۱ و در سایر دسته‌ها برابر ۰ می‌باشد. مجموع تعداد اعداد موجود در دسته‌های دوم، چهارم، ...، شانزدهم برابر ۱۲۸ می‌باشد. در دسته‌های اول، سوم، ...، پانزدهم با تبدیل ۰ به ۱- در رقم $a_۴$ آن اعداد ۱۶ واحد کمتر می‌شوند که در این

صورت اعداد دسته $(2k-1)$ ام همان اعداد دسته $(2k)$ ام می‌شود و فقط ۱۶ عدد موجود در دسته اول به اعداد از ۱۶- تا ۱- تبدیل می‌شوند. بنابراین تعداد کل جواب‌ها ۱۶ + ۱۲۸ یعنی ۱۴۴ می‌شود.

۳۱. خانه‌های جدول را مطابق شکل نام‌گذاری می‌کنیم:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$b+e+d=b+e+f=$ فرد $\Rightarrow d=f$

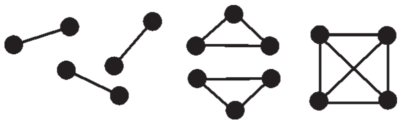
$b+e+d=d+e+h=$ فرد $\Rightarrow b=h$

$a+d+e+f+c=g+d+e+f+i=$ فرد

$\Rightarrow$ (مجموع اعداد همسایه e) $=a+b+c+d+f+g+h+i=2(a+c+b+d)=$ زوج

پس پر کردن خانه‌های جدول به‌صورت مطلوب ناممکن است.

۳۲. گراف متناظر به جواب‌های داده شده به شکل مقابل می‌باشد:



همان‌طور که مشاهده می‌شود تعداد افرادی که می‌توانند جواب ۳ بدهند برابر ۴ می‌باشد، بنابراین نفر شانزدهم نیز جز این دسته می‌باشد.

۳۳. اگر اعمال «تعویض» و «بر کامل» را به‌ترتیب با f و g نمایش دهیم، آنگاه کوتاه‌ترین راه برای رساندن اعداد از ۱ تا ۷ به رو به‌ترتیب به شکل زیر می‌باشد که در بین آنها عدد ۷ بلندترین طول مسیر را دارد که طول آن برابر ۵ می‌باشد.

$۱ \xrightarrow{f} ۰$

$۲ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰$

$۳ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰$

$۴ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰$

$۵ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰$

$۶ \xrightarrow{g} ۵ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰$

$۷ \xrightarrow{f} ۶ \xrightarrow{g} ۵ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰$

۳۴. رقم a_0 در اعداد ۰، ۲، ۴ و ۶ برابر ۰ می‌باشد. اگر آن رقم خراب باشد و به جای. رقم a را اختیار کند، آنگاه آن اعداد به‌ترتیب به‌صورت $a+0$، $a+2$، $a+4$ و $a+6$ در می‌آیند که با قرار دادن اعداد ۲، ۶، ۶ و ۱۰

به جای آنها برای a مقدار ثابتی به‌دست نمی‌آید.

رقم a_1 در اعداد ۰، ۱، ۴ و ۵ برابر ۰ می‌باشد. اگر آن رقم خراب بوده و به جای ۰ رقم a را اختیار کند، آنگاه آن اعداد به‌ترتیب به‌صورت a + ۰، a + ۱، a + ۴ و a + ۵ در می‌آیند که با قرار دادن اعداد ۲، ۳، ۶ و ۷ به‌جای آنها برای a مقدار ۲ به‌دست می‌آید. به این معنا که رقم a_1 به جای ۰ مقدار ۲ را اختیار می‌کند. به همین ترتیب معلوم می‌شود که آن رقم به جای ۱ عدد ۳ را به خودش اختیار کرده است.

۳۵. کلمه «هوپ» موقعی گفته می‌شود که دو بار متوالی به باقی‌مانده ۱ برسیم. از طرف دیگر باقی‌مانده‌های به‌دست آمده نشانگر ارقام آن عدد در مبنای ۲ می‌باشد، بنابراین تعداد «هوپ»های گفته شده برای هر عدد بیانگر تعداد «۱۱» های موجود در معادل آن عدد در مبنای ۲ می‌باشد. تبدیل یافته هر یک از اعداد ۱۳۸۲ و ۲۰۰۴ در مبنای ۲ به‌ترتیب به شکل (۱۰۱۰۱۱۰۰۱۱۰) و (۱۱۱۱۱۰۱۰۱۰۰) می‌باشد که در مورد اولی ۲ سری «۱۱» و در مورد دومی ۴ سری «۱۱» وجود دارد.

۳۶. فرض می‌کنیم c شامل α عدد ۱، β عدد ۲ و γ عدد ۳ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\alpha + ۵\beta + ۲\gamma = ۳\alpha + ۲\beta + \gamma \Rightarrow \gamma = ۲\alpha - ۳\beta$$

اگر $\beta = ۰$، آنگاه $\alpha = ۱$ و $\gamma = ۲$ که این دنباله کوتاه‌ترین طول را دارد اما در این حالت $a \neq b$.

اگر $\beta = ۱$، آنگاه $\alpha = ۲$ و $\gamma = ۱$ کوتاه‌ترین طول را تولید می‌کند. در این حالت اگر دنباله c را به‌صورت $c = ۲, ۱, ۱, ۳$ تعریف کنیم تساوی به‌دست خواهد آمد.

۳۷. علامت + را «۰» و علامت − را «۱» در نظر گرفته و خانه‌های جدول را مطابق شکل نام‌گذاری می‌کنیم، خواهیم داشت:

a	**b**	**c**
d	**e**	**f**
g	**h**	**i**

$$a + b + c + f = c + b + a + d \Rightarrow f = d$$

$$b + a + d + g = a + d + g + h \Rightarrow b = h$$

$$a + d + g + h = d + g + h + i \Rightarrow a = i$$

$$c + b + a + d = b + a + d + g \Rightarrow c = g$$

$$d + e + f + i = \text{زوج} \Rightarrow ۲d + e + i = \text{زوج} \Rightarrow e = i$$

به‌همین ترتیب e با حروف a ، c و g نیز برابر می‌شود، بنابراین حروف b ، d ، f و h نیز برابر می‌شوند. بنابراین اگر خانه‌های جدول را به‌صورت شطرنجی رنگ‌آمیزی کنیم، خانه‌های سیاه به یکی از دو طریق (یا همگی «۰» و یا همگی «۱») و نیز خانه‌های سفید نیز مستقل از وضعیت خانه‌های سیاه، به دو طریق (همگی «۰» و یا همگی «۱») قابل پر شدن می‌باشند که طبق اصل ضرب جواب مورد نظر ۲ × ۲ یعنی ۴ می‌باشد.

۳۸. فرض کنید بعد از مراحلی در مورد رنگ خاصی که در بشقاب a و b مربوط به آن رنگ است، بشقاب a پایین‌تر از بشقاب b باشد، به‌طور مستقل از سایر عملکردها دو کار می‌توان انجام داد، یکی آن که بشقاب b را به سینی دوم بُرد و یا تکلیف تمام بشقاب‌های بین a و b را مشخص کرده و سپس بشقاب a را (که احتمالاً در زیر چند بشقاب جامانده است) به سینی دوم منتقل کنیم. بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $۲^۵$ یعنی ۳۲ خواهد شد.

a	b	c
d	۲	f
g	h	i

۳۹. معلوم است که عدد موجود در خانه وسط، چهار بار به‌عنوان رقم وسط یک عدد سه رقمی ظاهر می‌شود ولی در بین اعداد داده شده هیچ چهار عددی وجود ندارد که رقم وسط مشابهی داشته باشند، ولی سه عدد ۱۲۱، ۱۲۳ و ۳۲۲ چنانند که رقم وسطشان ۲ است، بنابراین عدد مجهول نیز رقم وسطش ۲ است که در بین گزینه‌ها فقط الف و ب چنینند. عدد a به‌عنوان رقم اول در ۳ تا از اعداد ظاهر می‌شود که در بین ۸ عدد فقط رقم ۱ در بیش از دو عدد به‌عنوان رقم اول ظاهر شده است، بنابراین a = ۱. قطر اصلی به‌صورت 12i می‌باشد که اگر i را برابر ۱ قرار دهیم آنگاه ستون سوم به صورت cf1 در می‌آید که در بین ۸ عدد چنین چیزی وجود ندارد، بنابراین i = ۳ و حرف g به‌عنوان رقم صدگان دو عدد به کار می‌رود که یکی از آن دو رقم یکانش ۳ است و دیگری رقم دهگانش ۲ است، در بین ۸ عدد فقط دو عدد ۳۱۳ و ۳۲۲ چنینند. لذا g = ۳، h = ۱ و c = ۲. بعد از این جدول به‌صورت منحصربه‌فرد به شکل مقابل پر می‌شود که در آن عدد مجهول عدد موجود در سطر دوم به شکل ۵۲۴ یافت می‌شود.

۱	۱	۲
۵	۲	۴
۳	۱	۳

۴۰. دو رقم hh به ۱۶ طریق متمایز می‌تواند باشد (از ۰۰ تا ۰۵، از ۱۰ تا ۱۵ و از ۲۰ تا ۲۳)، دو رقم mm به یکی از ۶ طریق ۰۰، ۱۱، ۲۲، ۳۳، ۴۴ و یا ۵۵ می‌تواند باشد. دو رقم ss نیز متناسب با وضعیت hh به‌صورت منحصربه‌فرد یافت می‌شود. بنابراین جواب مورد نظر ۶ × ۱۶ یعنی ۹۶ به‌دست می‌آید.