# پاسخ تشریحی

## پانزهمین المپیاد کامپیوتر

**۱.** اگر سه گونی به اوزان a، b و c چنان باشند که a ≤ b ≤ c، آنگاه با توجه به ادغام‌های گوناگون به یکی از هزینه‌های a + ۲b + ۲c، ۲a + b + ۲c و یا ۲a + ۲b + c خواهیم رسید که در بین آن هزینه‌ها ۲a + ۲b + c کمترین مقدار ممکن را دارد. بنابراین بهتر آن است که در ابتدا گونی‌های سبک‌تر را با هم ادغام کرده و حاصل را با بعدی و به‌همین ترتیب تا آخر پیش رویم:

۲ + ۳ = ۵ (هزینه = ۵)
۴ + ۴ = ۸ (هزینه = ۸)
۵ + ۶ = ۱۱ (هزینه = ۱۱)
۸ + ۱۱ = ۱۹ (هزینه = ۱۹)

⟶ ۴۳ = مجموع هزینه‌ها

**۲.** مجموع کل کارها به غیر از کار ۲۰۰ دقیقه‌ای برابر ۹۸۰۰ می‌باشد که اگر آن را به ۱۰ یعنی تعداد نفرات تقسیم کنیم ۹۸۰ به‌دست می‌آید به این معنا که حداقل یکی از افراد قبل از رسیدن به لحظه ۹۸۰ و یا در همان لحظه کارش تمام می‌شود و در آن لحظه به غیر از کار ۲۰۰ دقیقه‌ای هیچ کار دیگری باقی نمانده است که اگر کار ۲۰۰ دقیقه‌ای را به او بسپاریم قبل از لحظه ۱۱۸۰ کل کار به اتمام خواهد رسید. اگر زمان هر یک از ۹۹ کار دیگر را چنان تنظیم کنید که به هر یک از ۱۰ نفر دقیقاً ۹۸۰ دقیقه کار برسد آنگاه با اختصاص کار ۲۰۰ دقیقه‌ای به یکی از آن ده نفر، دقیقاً در لحظه ۱۱۸۰ کل پروژه به اتمام خواهد رسید.

منبع: المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)، تألیف رسول حاجی زاده، انتشارات دانش پژوه، ۱۳۸۵

**۳.** اگر شیشه سمت چپ را A و شیشه سمت راست را B بنامیم و عبور نور از شیشه X را با X و برگشت نور از آن شیشه را با x نمایش دهیم، آنگاه نورهای رد شده به سمت راست به یکی از شکل‌های زیر خواهد بود:

I ) AB

II ) AbaB

III ) AbabaB

⋮

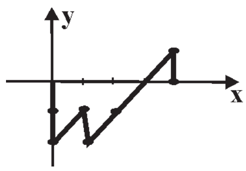
Aba...baB

⋮

در هر یک از حالات فوق به‌ترتیب ۴۹ واحد، $\frac{۴}{۱۰۰} \times ۴۹$ واحد، $(\frac{۴}{۱۰۰})^{۲} \times ۴۹$ واحد و ... نور به سمت راست منتقل می‌شود که مجموع کل آنها برابر $\frac{۱}{۱ - \frac{۴}{۱۰۰}} \times ۴۹$ یا $۴۹ + \frac{۴ \times ۴۹}{۹۶}$ می‌شود.

**۴.** مقدار d نمی‌تواند ۲ باشد. اگر d برابر ۱ باشد، آنگاه هر یک از مقادیر سایر متغیرها باید صفر باشند. اگر d برابر ۰ باشد آنگاه مقادیر c، b و a به‌ترتیب به‌صورت ۲، ۰، ۰ یا ۱، ۲، ۰ و یا ۱، ۱، ۲ می‌تواند باشد.

**۵.** حرکت از نوع دوم مهره را به سمت راست منتقل نمی‌کند. بنابراین باید دقیقاً ۴ بار از حرکت نوع اول استفاده کرد. چون حرکت نوع اول یک واحد مهره را به سمت بالا منتقل می‌کند باید برای خنثی کردن آن جهت یک بار نیز از حرکت دوم استفاده شود، درنتیجه در مجمع ۸ حرکت استفاده خواهد شد که چهار تا از آنها از نوع اول و چهار تا از آنها از نوع دوم می‌باشد. تعداد جای‌گشت‌های ۸ شی که چهار تا از آنها، شبیه هم و چهار تای دیگر نیز شبیه هم هستند برابر $\frac{۸!}{۴!۴!}$ یا ۷۰ می‌باشد به عنوان مثال مسیر متناظر به‌جای‌گشت ۲، ۱، ۱، ۲، ۱، ۲، ۲ مطابق شکل مقابل می‌باشد.




**۶.** شکل‌های دوم، چهارم و ششم از سمت راست قابل دیده شدن هستند ولی سایر شکل‌ها را نمی‌توان تولید کرد. در واقع دوگوشه نشان داده شده در شکل دوگوشه مقابل مکعب می‌باشند، بنابراین می توانید مکعب یاد شده را به‌صورت منحصربه‌فرد ساخته و از گوشه‌های مختلف به آن نگاه کنید.

**۷.** ابتدا اعداد از ۱ تا ۱۳۸۴ را به ۱۱ بازه مطابق تقسیم‌بندی زیر افراز می‌کنیم:

[۱ , ۲) ، [۲ , ۳) ، [۳ , ۶) ، [۶ , ۱۱) ، [۱۱ , ۲۲) ، [۲۲ , ۴۴) ، [۴۴ , ۸۷) ، [۸۷ , ۱۷۴) ، [۱۷۴ , ۳۴۷) ، [۳۴۷ , ۶۹۳) ، [۶۹۳ , ۱۳۸۴)

ابتدا آرمین عدد ۲۲ را پیشنهاد می‌دهد که اگر رمز در بازه مربوط به آن باشد برنده می‌شود و اگر رمز در آن بازه نبوده و بزرگتر از ۲۲ و یا کوچکتر از آن باشد توسط آرش اعلام می‌شود. در سمت راست بازه مربوط به ۲۲ فقط ۵ بازه در سمت چپ آن نیز ۵ بازه وجود دارد به این معنا که اگر عدد مورد نظر آرش بزرگتر از ۲۲ و در خارج بازه مربوطه به آن بوده با این که کمتر از ۲۲ باشد برای اطمینان از یافتن جواب مراحل یکسانی لازم است. بنابراین فرض می‌کنیم جواب آرش بزرگتر باشد.

آرمین عدد ۱۷۴ را به‌عنوان دومین عدد پیشنهاد می‌دهد که اگر برنده نشود متناسب با بزرگتر و یا کوچکتر گفتن آرش به‌ترتیب یکی از دو عدد ۳۴۷ و یا ۴۴ را به‌عنوان عدد سوم پیشنهاد خواهد داد که اگر در این مرحله نیز برنده نشود در مورد اول عدد ۶۹۳ و در مورد عدد دوم عدد ۸۷ را پیشنهاد داده و یقیناً برنده خواهد شد.

**۸.** دنباله مربوط به رقم یکان به شکل زیر می‌باشد که دارای دوره تناوب ۴ می‌باشد:

۱ , ۲ , ۴ , ۸ , ۶ , ۲ , ۴ , ۸ , ۶ , ۲ , ۴ , ۸ , ۶ , ...

بنابراین دنباله اعدادی که به آنها بر می‌خوریم به شکل زیر خواهند بود:

۱ , ۲ , ۴ , ۸ , ۱۶ , ۲۲ , ۲۴ , ۲۸ , ۳۶ , ۴۴ , ۴۸ , ۵۶ , ... , ۱۳۸۲

به این ترتیب که در هر بازه $[20k , 20k+19]$ دقیقاً به ۴ عدد بر می‌خوریم (به غیر از اولین بازه به‌صورت فوق که به ۵ عدد بر می‌خوریم). از عدد ۰ تا ۱۳۷۹ به ۶۹ بازه ۲۰ تایی قابل افراز است. بنابراین در کل این ۶۹ بازه به تعداد $5 \times 1 + 4 \times 68$ یعنی ۲۷۷ عدد قابل برخورد وجود دارد که با احتساب عدد ۱۳۸۲ تعداد کل اعداد قابل برخورد به ۲۷۸ خواهد رسید.

**۹.** ● برای آنکه نفر دوم در مرحلهٔ $n$ام برنده شود باید در مرحله $n-1$ نفر اول به یکی از باقی‌مانده‌های ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ رسیده باشد، زیرا اگر در آن مرحله، نفر اول به یکی از باقی‌مانده‌های ۰، ۱، ۲ و یا ۳ رسیده باشد، نفر دوم مکملی برای آن باقی‌مانده (از بین اعداد مجموعه داده شده) نخواهد یافت.

● برای آنکه در مرحلهٔ ۱ - n نفر اول به ناچار به یکی از باقی‌مانده‌های ۴، ۵، ۶، ۷ و یا ۸ برسد باید نفر دوم در مرحلهٔ ۲ - n به باقی‌مانده ۳ برسد.

● برای آنکه در مرحلهٔ ۲ - n نفر دوم بتواند به باقی‌مانده ۳ برسد باید نفر اول در مرحله ۳ - n به یکی از باقی‌مانده‌های ۲، ۱، ۰، ۸ و یا ۷ رسیده باشد که او بتواند ۱، ۲، ۳، ۴ و یا ۵ اضافه کرده و باقی‌مانده عدد حاصل بر ۹ را برابر ۳ کند.

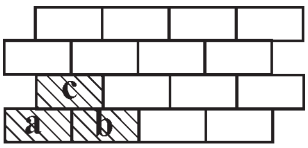
● برای آنکه در مرحلهٔ ۳ - n نفر اول به ناچار به یکی از باقی‌مانده‌های ۲، ۱، ۰، ۸ و یا ۷ برسد باید نفر دوم در مرحلهٔ ۴ - n به باقی‌مانده ۶ برسد.

● برای آنکه در مرحلهٔ ۴ - n نفر دوم بتواند به باقی‌مانده ۶ برسد لازم است نفر اول در مرحله ۵ - n به یکی از باقی‌مانده‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و یا ۵ رسیده باشد.

● برای آنکه در مرحلهٔ ۵ - n نفر اول به یکی از باقی‌مانده‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و یا ۵ برسد لازم است نفر دوم در مرحلهٔ ۶ - n به باقی‌مانده صفر برسد.

با توجه به توضیحات فوق معلوم می‌شود که شرط لازم و کافی برای آنکه نفر دوم بتواند در مرحله nام برنده شود، آن است که بتواند در مرحلهٔ (۶ - n) ام برنده شود. و چون عدد صفر مضرب ۹ است؛ یعنی در مرحلهٔ صفراُم نفر دوم برنده است او می‌تواند در مراحل ۶، ۱۲، ۱۸، ...، ۱۳۸۰، ۱۳۸۶، ... برنده شود.

**۱۰.** اگر سه آجر مشخص شده در شکل را با a، b و c رنگ‌آمیزی کنیم، مابقی آجرها به‌صورت منحصربه‌فرد رنگ‌آمیزی خواهند شد. پس کافی است رنگ سه آجر مشخص شده را تعیین کنیم تا رنگ مابقی آجرها نیز معلوم شود. اختصاص ۳ رنگ متمایز به ۳ آجر مشخص شده به !۳ یعنی ۶ ممکن است.




**۱۱.** مضارب دو رقمی اعداد ۱۷ و ۲۳ به شکل زیر می‌باشند:

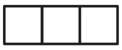
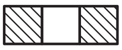
۱۷ : ۱۷ , ۳۴ , ۵۱ , ۶۸ , ۸۵

۲۳ : ۲۳ , ۴۶ , ۶۹ , ۹۲

همان‌طور که مشخص است هیچ عدد دو رقمی که رقم دهگانش ۷ باشد وجود ندارد که مضرب ۱۷ یا ۲۳ باشد، بنابراین اگر در نوشتن عدد رقم ۷ به کار رود به بن‌بست خواهیم رسید. چون رقم ۷ استفاده

نمی‌کنیم بنابراین رقم ۱ نیز نباید استفاده کرد زیرا تنها رقمی که می‌تواند بعد از ۱ بیاید تا عدد دو رقمی حاصل مضرب ۱۷ و یا ۲۳ باشد، رقم غیر مجازِ ۷ می‌باشد. به همین دلیل مجاز به استفاده از ارقام ۵ و ۸ نیز نیستیم، درنتیجه ۱۳۸۰ رقم اول اعداد خواسته شده به شکل زیر می‌باشد که ارقام آن دوره تناوبی به‌طول ۵ دارد: ۶۹۲۳۴۶۹۲۳۴۶...۴۶۹۲۳۴

اما در نوشتن سه رقم آخر اگر به بن‌بست نیز برسیم اشکالی ندارد، زیرا نوشتن عدد به اتمام می‌رسد. بنابراین سه رقم آخر عدد به یکی از دو شکل ۶۹۲ یا ۶۸۵ می‌باشد.

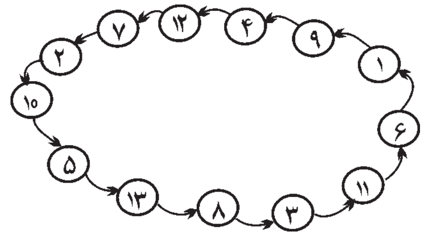
**۱۲.** هر سطر به یکی از ۳ شکل  ،  و یا  می‌تواند باشد به‌شرطی که اگر سطر $i$ام به یکی از آن سه شکل بود سطر $(i+1)$ام نیز نمی‌تواند به همان شکل باشد، بنابراین سطر اول ۳ حالت و مابقی سطرها وابسته به نوع شکل سطر قبل از خود، به یکی از دو شکل دیگر می‌تواند باشد، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $2^9 \times 3$ یعنی ۱۵۳۶ می‌باشد.

**۱۳.**

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=0}^{41} y_i \times 4^i = y_0 \times 4^0 + y_1 \times 4^1 + y_2 \times 4^2 + \dots + y_{40} \times 4^{40} + y_{41} \times 4^{41} \\ &= (x_0 - 2x_1) \times 4^0 + (x_1 + x_2 - 2x_3) \times 4^1 + (x_3 + x_4 - 2x_5) \times 4^2 + \dots + (x_{79} + x_{80} - 2x_{81}) \times 4^{40} \\ &\quad + (x_{81} + x_{82}) \times 4^{41} \\ &= x_0 \times 2^0 + x_1 \times 2^1 + x_2 \times 2^2 + x_3 \times 2^3 + \dots + x_{81} \times 2^{81} + x_{82} \times 2^{82} = \sum_{i=0}^{82} x_i \times 2^i = x \end{aligned}$$

**۱۴.** اعداد قبل و بعد از اعداد از ۱ تا ۸ به‌صورت منحصربه‌فرد به شکل زیر یافت می‌شوند:

۶ ⟵ **۱** ⟵ ۹
۷ ⟵ **۲** ⟵ ۱۰
۸ ⟵ **۳** ⟵ ۱۱
۹ ⟵ **۴** ⟵ ۱۲
۱۰ ⟵ **۵** ⟵ ۱۳
۱۱ ⟵ **۶** ⟵ ۱
۱۲ ⟵ **۷** ⟵ ۲
۱۳ ⟵ **۸** ⟵ ۳




معلوم است که در این صورت دور بسته‌ای به شکل مقابل یافت می‌شود:

حلقه مقابل باید از یک نقطه بریده شود که اگر این عمل بین ۱ و ۶ باشد، آنگاه عدد ۱۴ می‌تواند بعد از ۶ وارد شود که در این صورت به جای‌گشت زیر خواهیم رسید:

۱۴ - ۶ - ۱۱ - ۳ - ۸ - ۱۳ - ۵ - ۱۰ - ۲ - ۷ - ۱۲ - ۴ - ۹ - ۱

و اگر آن حلقه بین ۱ و ۹ بریده شود باز عدد ۱۴ می‌تواند قبل از عدد ۹ وارد شود که در این صورت نیز به جای‌گشتی خواهیم رسید که به شکل زیر می‌باشد:

۱ - ۶ - ۱۱ - ۳ - ۸ - ۱۳ - ۵ - ۱۰ - ۲ - ۷ - ۱۲ - ۴ - ۹ - ۱۴

**۱۵.** گراف‌های جهت‌دار متناظر به هر یک از حالات داده شده به‌ترتیب از چپ به راست به شکل زیر می‌باشد:


با توجه به گراف‌های فوق معلوم می‌شود که عدد زیر پایِ ۱ هر چه باشد در حالت اول، دوم و چهارم سیب‌زمینی به شماره ۱ برخواهد گشت ولی در حالت سوم این چنین نیست. در حالت سوم اگر عدد زیر پایِ ۱ یکی از دو عدد ۴ و یا ۵ باشد، آنگاه سیب‌زمینی بین آن دو نفر خواهد چرخید و هرگز به خودِ ۱ بر نمی‌گردد.

**۱۶.** تعداد کل افراد آن ۸ خانواده برابر ۴ × ۴ + ۵ × ۴ یعنی ۳۶ می‌شود. معلوم است که جا دادن ۳۶ نفر در دور میزهای ۷ نفره به‌طوری که تعداد آنها ۵ یا کمتر باشد، امکان‌ناپذیر است (۵ میز ۷ نفره حداکثر ۳۵ نفر در خود جای می‌دهند). جا دادن افراد در دور ۶ میز با شرط اشاره شده امکان‌پذیر است، کافی است خانواده‌ها به‌ترتیب با a، b، c، d، e، f، g و h نام‌گذاری کرده و دور هر میز دقیقاً ۶ نفر قرار دهید؛ یعنی دور هر میز دقیقاً از دو تا از خانواده‌ها موجود نباشد که حالت‌بندی آن به شکل زیر می‌شود:

a - b    a - c    b - c    d - e    d - f    g - h

**۱۷.** مراحل انجام کار به شکل زیر می‌باشد:

$۱۱ \times ۴۶ = ۵۰۶ \longrightarrow ۵۶$

$۵۶ \times ۱۲۵ = ۷۰۰۰ \longrightarrow ۷$

**۱۸.** در ابتدا کلیدها را به دو دسته پنج‌تایی تقسیم می‌کنیم و پنج تای اول را رو به بالا (در حالت U) و پنج تای دوم را رو به پایین (در حالت D) قرار می‌دهیم، سپس به زیرزمین رفته و لامپ را نگاه می‌کنیم اگر روشن باشد می‌فهمیم که کلید در دسته اول قرار دارد، در غیر این صورت کلید در دسته دوم قرار خواهد داشت. بعد از شناسایی دسته مورد نظر، ۳ تا از کلیدها را در وضعیت U و ۲ تای دیگر را در وضعیت D قرار می‌دهیم و برای بار دوم به زیرزمین می‌رویم که اگر لامپ روشن باشد، کلید مورد نظر در دسته ۳ تایی و در غیر این‌صورت در دسته ۲ تایی خواهد بود. پس از شناسایی دسته مورد نظر (در بدترین حالت سه‌تایی)، دو تا از آنها را در وضعیت U و یکی دیگر را در وضعیت D قرار داده و برای بار سوم به زیرزمین می‌رویم که اگر لامپ روشن بود کلید مطلوب در دسته ۲ تایی بوده و در غیر این صورت آن کلید، کلید سوم است. بدترین حالت این است که لامپ روشن بوده و دو کلید مجهول باقی‌مانده باشد که در این صورت یکی از آن دو کلید را در وضعیت U و دیگری را در وضعیت D قرار داده و برای بار چهارم (آخرین بار) به زیرزمین رفته و با توجه به روشن و یا خاموش بودن لامپ، کلید مورد نظر را شناسایی می‌کنیم.

**۱۹.** حالات‌بندی زیر را در نظر می‌گیریم:

I ) تعداد مکعب‌های عمودی «۰» باشد. در این حالت هر طبقه از سه طبقه مورد نظر به دو طریق متمایز (به‌صورت طولی و یا عرضی) می‌توانند پر شوند که طبق اصل ضرب، ۸ طریق متمایز به‌دست می‌آید.

II ) تعداد مکعب‌های عمودی «۳» باشد. (ابتدا یادآوری می‌شود که اگر یکی از مکعب‌ها عمودی باشد باید همه مکعب‌های در عرض آن و یا همه مکعب‌های در طول آن نیز به‌صورت عمودی چیده شوند.) در این حالت بستگی به این که کدام ردیف ۳ تایی از ردیف‌های عرضی و یا کدام ردیف ۳ تایی از ردیف‌های طولی به‌صورت عمودی چیده شوند به ۶ طریق متمایز خواهیم رسید که بقیه مکعب‌ها به‌صورت منحصربه‌فرد قابل چیدن خواهند بود.

II ) تعداد مکعب‌های عمودی «۶» باشد. در این حالت بستگی به این که کدام دو ردیف از ۳ ردیف عرضی و یا کدام دو ردیف از ۳ ردیف طولی به‌صورت عمودی چیده شوند به ۶ طریق متمایز خواهیم رسید که در این حالت نیز بقیه مکعب‌ها به‌صورت منحصربه‌فرد چیده می‌شوند.

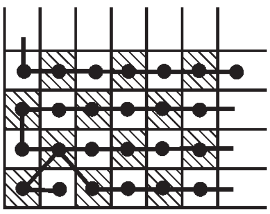
IV ) تعداد مکعب‌های عمودی «۹» باشد. معلوم است که در این حالت چیدن مکعب‌ها فقط به یک طریق ممکن است. با توجه به حالت‌بندی فوق معلوم می‌شود که تعداد کل طرق چیدن به ۱ + ۶ + ۶ + ۸ یعنی ۲۱ طریق متفاوت ممکن شود.

**۲۰.** معلوم است که در هر تعویضی حداقل یک عدد در جای خود قرار می‌گیرد و با توجه به این که در تعویض آخر دو عدد در جای خود قرار می‌گیرند، بنابراین تعداد تعویض‌ها حداکثر ۲۰۰۴ خواهد شد. برای جای‌گشت زیر تعداد تعویض‌ها برابر ۲۰۰۴ خواهد شد.

۲۰۰۵ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ... , ۲۰۰۳ , ۲۰۰۴

**۲۱.** چون عدد ۱۹۹۹۸۱ متوازن است بنابراین اعداد ۱۹۹۹۸۲ ، ۱۹۹۹۸۳ ، ... ، ۱۹۹۹۹۰ نیز همگی متوازن هستند زیرا در هر یک از آن اعداد فقط یک رقمِ ۱ وجود دارد و از عددی به عدد دیگر فقط یک واحد به مجموع ارقام مورد اشاره اضافه می‌شود. عدد ۱۹۹۹۹۱ متوازن نیست چون ۲ واحد به مجموع مورد نظر اضافه می‌شود، به این معنا که به‌ازای هر یک از اعداد ۱۹۹۹۹۱ تا ۱۹۹۹۹۹ مجموع مورد اشاره ۱ واحد از خود عدد بیشتر خواهد بود و در نتیجه در مورد عدد ۲۰۰۰۰۰ که رقم «۱» ندارد، آن مجموع با خود عدد ۲۰۰۰۰۰ یکسان خواهد بود به این معنا که عدد ۲۰۰۰۰۰ نیز متوازن است.

**۲۲.** اولاً باید توجه داشت که برای ورود و خروج هر مربع سفیدی مجموعاً ۲ تومان هزینه می‌شود و ثانیاً به غیر از خانه‌های اول و آخر، ورود و خروج لازم دارند. واضع است که خانه اول ورود ندارد و نیز می‌توان حرکات آخر را چنان چید (مطابق شکل) که آخرین خانه سفید باشد و خروجی لازم نداشته باشد که در این صورت هزینه انجام شده برابر ۲ - ۲ × ۵۰۰۰ یعنی ۹۹۹۸ خواهد شد.



**۲۳.** $F(i)$ را برابر با برایند XOR تمام اعداد قبل از i و خودِ i تعریف می‌کنیم. معلوم است که $F(۱) = ۱$، $F(۲) = ۳$، $F(۳) = ۰$، $F(۴) = ۴$، ... .

تساوی‌های زیر به شیوه استقرای ریاضی به راحتی قابل اثبات هستند:

$F(۴k - ۱) = ۰$

$F(۴k) = ۴k$

$F(۴k + ۱) = ۱$

$F(۴k + ۲) = ۴k + ۳$

به‌عنوان مثال برای اثبات درستی $F(۴k - ۱) = ۰$ به شیوه زیر عمل می‌کنیم:

$$F(۴k-۱)=(۴k-۱)\oplus F(۴k-۲)=(۴k-۱)\oplus(۴k-۱)=۰$$

چون ۱۲۷ به شکل $۴k - ۱$ می‌باشد، بنابراین $F(۱۲۷) = ۰$.

**۲۴.** هر یک از ارقام یکان و دهگان از آن اعداد، مستقل از یکدیگر ۴ حالت می‌توانند داشته باشند، رقم صدگان با توجه به وضعیت ارقام یکان و دهگان، زوج و یا فرد بودنش مشخص می‌شود؛ یعنی ۲ حالت می‌تواند داشته باشد «۲ یا ۴» و یا «۱ یا ۳». رقم هزارگان نیز با توجه به وضعیت ارقام دهگان و صدگان، وضعیت مشابه خواهد داشت و ... بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $۲^{۱۱} \times ۴^{۲}$ یعنی $۲^{۱۵}$ می‌شود.

**۲۵.** اولاً مشخص است که از هر ده رقم متوالی حداقل یک رقم در عدد جدید نوشته می‌شود، بنابراین عددی که از یک عدد صد رقمی ساخته می‌شود حداقل ده رقمی می‌شود و نمی‌تواند نه رقمی شود بنابراین تعداد اعداد ساخته شده حداقل برابر ۲ است. اگر عدد صد رقمی اولیه از ۹ دسته ۵۱۱۱۱۱، از ۸ دسته ۴۱۱۱۱ و ۱ دسته ۵۱۱۱۱۹ (که دسته دوم از چپ می‌باشد) آنگاه عدد دوم به‌صورت ۱۱ ۱۱ ۱۱ ۱۱ ۱۱ ۱۱ ۱۱ ۱۱ ۱۹ و عدد سوم به‌صورت ۹۱۱۱۱۱۱۱۱ در می‌آید.

ثانیاً با کمی توجه مشخص است که اولین عدد ساخته شده حداکثر ۵۰ رقمی، دومین عدد ساخته شده حداکثر ۲۵ رقمی، سومین عدد ساخته شده حداکثر ۱۲ رقمی و بالاخره چهارمین عدد ساخته شده حداکثر ۶ رقمی می‌توانند باشند. بنابراین با توجه به این که عدد نهایی ۹ رقمی است معلوم می‌شود که اعداد ساخته شده نمی‌تواند ۴ تا باشد. اگر عدد اولیه چنان باشد که از ۱۳ بسته ۱۲ ۱۱ ۱۱ و یک بسته

۱۹ ۱۱ ۱۲ (بسته دوم) و یک بسته ۱۱ ۱۱ ۱۱ ۱۱ ۱۱ ۱۱ ۱۱ ۱۱ ۱۱ (بسته آخر) تشکیل شود، آنگاه تعداد اعداد ساخته شده برابر ۳ خواهد شد.

**۲۶.** چون خانه‌های ۱۲ و ۱۶ هر دو روشن هستند بنابراین تعداد خانه‌های خاموش متوالی حداکثر ۳ می‌تواند باشد.

اگر ۱ = $a$ آنگاه $b$ برابر ۳ می‌شود که شکل مربوطه به‌صورت زیر می‌شود:

▧ □ ▧ ▧ ▧ □ ▧ ▧ ▧ □ ▧ ▧ ▧ □ ▧ ▧ ▧ □ ▧ ▧

اگر ۲ = $a$ آنگاه $b$ برابر ۲ و یا ۳ می‌شود که در این حالت نیز اشکال مربوطه به‌صورت زیر خواهند بود:

□ □ ▧ ▧ □ □ ▧ ▧ □ □ ▧ ▧ □ □ ▧ ▧ □ □ ▧ ▧

▧ ▧ ▧ □ □ ▧ ▧ ▧ □ □ ▧ ▧ ▧ □ □ ▧ ▧ ▧ □ □

اگر ۳ = $a$ آنگاه $b$ برابر ۱ و یا ۲ می‌شود که در این حالت نیز اشکال مربوطه به‌صورت زیر خواهند بود:

▧ □ ▧ ▧ ▧ □ ▧ ▧ ▧ □ ▧ ▧ ▧ □ ▧ ▧ ▧ □ ▧ ▧

▧ ▧ ▧ □ □ ▧ ▧ ▧ □ □ ▧ ▧ ▧ □ □ ▧ ▧ ▧ □ □

**۲۷.** برای زوج مرتب (۱۰۵ , ۵۱۹) دنباله به شکل زیر وجود دارد:

$$-۱, \underbrace{۵, ۵, ۵, \ldots, ۵}_{\text{۱۰۴ تا}}$$

**۲۸.** معلوم است که برایند کار مانند آن است که در نهایت $i$ سطرِ متمایز و $j$ ستون متمایز انتخاب شده باشند (ستون و یا سطرهایی که زوج‌بار، انتخاب شده باشند، مانند آن است که اصلاً انتخاب نشده‌اند و ستون و یا سطرهایی که فردبار انتخاب شده باشند مانند آن است که دقیقاً یک بار انتخاب شده‌اند). از طرف دیگر چون ۱۳۸۳ فرد است بنابراین هر دو عدد $i$ و $j$ فرد هستند. تعداد خانه‌های سیاه در سطرهای $i$گانه برابر $j - ۲۰۰۵$ و در سایر سطرها برابر $j$ می‌باشد، بنابراین تعداد خانه‌های سیاه برابر است با:

$$x = i \times (۲۰۰۵ - j) + (۲۰۰۵ - i) \times j = ۲۰۰۵(i + j) - ۲ij$$

حداقل مقدار $x$ به‌ازای ۱ = $i = j$ برابر با ۴۰۰۸ و حداکثر مقدار $x$ به‌ازای ۱۳۸۳ = $i = j$ برابر ۱,۷۲۰,۴۵۲ به‌دست می‌آید که در بین گزینه‌ها فقط عدد موجود در گزینه «ج» در این محدوده است.

**۲۹.** حرکت بر روی سه نردبان از سمت راست به چپ را به ترتیب با a، b و c نمایش می‌دهیم. هدف مسأله نوشتن دنباله‌ای ۷ حرفی با استفاده از سه حرف a، b و c می‌باشد به‌طوری که شروع دنباله با حرف a و نیز هیچ a و cای مجاور نباشند.

اگر تعداد دنباله‌های موجود در مرحلهٔ i ام را برابر $x_i$ در نظر بگیریم به‌طوری که $a_i$ تا از آنها ختم به a، $b_i$ تا از آنها ختم به b و بالاخره $c_i$ تا از آنها ختم به c باشند، آنگاه در مرحله بعدی به‌ازای هر دنباله‌ای که به b ختم می‌شود، ۳ دنباله جدید و نیز به‌ازای هر دنباله‌ای که به a و یا c ختم می‌شود ۲ دنبالهٔ جدید می‌توان نوشت، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} a_{i+1} = a_i + b_i \\ c_{i+1} = c_i + b_i \\ b_{i+1} = a_i + b_i + c_i \end{array}\right\} \Rightarrow x_{i+1} = 2(a_i + b_i + c_i) + b_i = 2x_i + b_i$$

جدول $a_i$، $b_i$، $c_i$ و $x_i$ به‌ازای i از ۱ تا ۸ در جدول زیر آمده است:

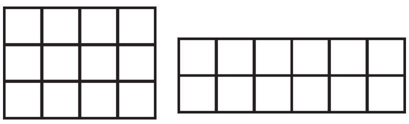
| i | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $x_i$ |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۲ | ۱ | ۱ | ۰ | ۲ |
| ۳ | ۲ | ۲ | ۱ | ۵ |
| ۴ | ۴ | ۵ | ۳ | ۱۲ |
| ۵ | ۹ | ۱۲ | ۸ | ۲۹ |
| ۶ | ۲۱ | ۲۹ | ۲۰ | ۷۰ |
| ۷ | ۵۰ | ۷۰ | ۴۹ | ۱۶۹ |
| ۸ | ۱۲۰ | ۱۶۹ | ۱۱۹ | ۴۰۸ |

**۳۰.** ابتدا یک عدد فیوز می‌بندیم که اگر نسوزد معلوم می‌شود کلید مورد نظر متصل به یکی از لامپ‌های خاموش می‌باشد. با عوض کردن وضعیت کلید لامپ‌های خاموش به‌صورت متوالی، به محض سوختن فیوز می‌فهمیم که کلید موردنظر آخرین کلیدی است که وضعیت آن را تغییر داده‌ایم. و اما اگر فیوز بسته شده بسوزد می‌فهمیم که کلید مطلوب به یکی از لامپ‌های روشن متصل است، در این حالت کل لامپ‌ها

را به دو دسته ۱۶ تایی تقسیم می‌کنیم و وضعیت کلید تمام ۱۶ لامپ دسته اول را تغییر داده و فیوز دوم را می‌بندیم که باز اگر فیوز بسوزد متوجه می‌شویم که کلید مطلوب در دسته ۱۶ تایی دوم قرار دارد و اگر فیوز دوم نسوزد می‌فهمیم که آن کلید در دسته ۱۶ تایی اول قرار دارد.

اگر به‌همین ترتیب دسته شناسایی شده را به دو دسته ۸ تایی و سپس ۴ تایی، ... تقسیم کنیم به جواب مورد نظر خواهیم رسید.

**۳۱.** باید توجه داشت که تعداد خانه‌های شبکه مورد نظر هم مضرب ۴ است و هم مضرب ۶. بنابراین تعداد خانه‌های آن شبکه مضرب ۱۲ (ک.م.م دو عدد ۴ و ۶) است. شبکه ۱۲ خانه‌ای به یکی از دو صورت مقابل می‌باشد که قابل پوشش با موزائیک داده شده نمی‌باشند ولی شبکه ۲۴ خانه‌ای را که از قرار دادن ۴ مستطیل ۳ × ۲ به شکل زیر به‌دست می‌آید، قابل پوشش می‌باشد:



**۳۲.** کوچکترین عدد داده شده برابر با ۴ می‌باشد. با ۴ بار وارون کردن به شکل مقابل می‌توان به دنباله صعودی رسید:

۳ , ۱ , ۴ , ۵ , ۲

۵ , ۴ , ۱ , ۳ , ۲

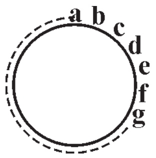
۲ , ۳ , ۱ , ۴ , ۵

۳ , ۲ , ۱ , ۴ , ۵

۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵

**۳۳.** اگر n فرد باشد، آنگاه سه مکعب با ابعاد ۱، ۱ و n به‌صورت عمودی، طولی و عرضی در وسط مکعب وجود دارد که قرینه آن مکعب‌ها نسبت مرکز اصلی مکعب خود آن مکعب‌ها می‌شود. در بقیه حالت‌ها قرینه هر مکعب با ابعاد ۱، ۱ و n مکعب دیگری با همین ابعاد می‌شود. بنابراین اگر n زوج باشد، بازیکن دوم برنده می‌شود به این صورت که بازیکن اول هر حرکتی را انجام دهد او قرینه همان حرکت نسبت به

مرکز اصلی مکعب را انجام می‌دهد و اگر n فرد باشد، بازیکن اول برنده می‌شود به این صورت که در ابتدا یکی از سه مکعب با ابعاد ۱، ۱ و n که از مرکز مکعب می‌گذرد را بر می‌دارد و سپس بازیکن دوم هر حرکتی را انجام دهد بازیکن اول قرینه حرکت او نسبت به مرکز مکعب را انجام می‌دهد. بنابراین به‌ازای nهای فرد بازیکن اول و به‌ازای nهای زوج بازیکن دوم برنده می‌شود.




**۳۴.** الف) n = ۵۱ و k = ۴ اگر هیچ‌یک از افراد راستگو نباشند و همه افراد دروغگو باشند، آنگاه جملهٔ مورد نظر در مورد همهٔ افراد مصداق پیدا می‌کند.

اگر فردی مانند d راستگو باشد، آنگاه برای آنکه جمله داده شده مصداق داشته باشد باید هر چهار نفر b، c، e و f دروغگو باشند که در این صورت نیز برای آنکه جمله مورد نظر در مورد دروغگوها مانند e مصداق داشته باشد، باید g راستگو باشد. بنابراین در این حالت از هر سه نفر متوالی دو نفر دروغگو و یک نفر راستگوست (یعنی به‌صورت ... رددرددردد ...) و تعداد جای‌گشت‌ها در این مورد برابر ۳ است. با توجه به حالت‌بندی فوق در این قسمت r برابر ۴ به‌دست می‌آید که در صورت مسأله نیز ۴ داده شده است.

ب) n = ۵۰ و k = ۰. اگر همه ۵۰ نفر راستگو باشند این حالت اتفاق می‌افتد بنابراین در این قسمت مقدار r برابر ۱ در می‌آید در حالی که برابر ۰ داده شده است.

ج) n = ۵۱ و k = ۵. معلوم است که این حالت هرگز اتفاق نخواهد افتاد زیرا اگر حتی یک نفر راستگو در بین افراد باشد جمله داده شده در مورد او مصداق نخواهد داشت و اگر همه دروغگو باشند نیز جمله یاد شده در مورد آنها مصداق نخواهد داشت. بنابراین در این قسمت مقدار r برابر ۰ می‌شود در حالی که در صورت مسأله این عدد برابر ۱ داده شده است.

د) n = ۵۰ و k = ۱. تنها حالت ممکن آن است که همه دروغگو باشند، بنابراین r = ۱ در حالی که در صورت مسأله r برابر ۶ داده شده است.

ه) n = ۵۲ و k = ۱. در این قسمت نیز تنها حالت ممکن آن است که همه دروغگو باشند، بنابراین r = ۱ و در حالی که در صورت مسأله r برابر ۶ داده شده است.

**۳۵.** اولاً معلوم می‌شود که کارت شماره i نمی‌تواند در کیسه i + ۱ یا به بعد باشد زیرا در این صورت

کارت‌های ۱ + i و بزرگتر نیز در هیچ‌یک از کیسه‌های i و قبل از i قرار نخواهد گرفت که در چنین صورتی کیسه‌ای از کیسه‌های از ۱ تا i خالی می‌ماند. به همین دلیل کارت شماره i در کیسه‌های ۳ - i و به قبل نیز نمی‌تواند باشد. بنابراین کارت شماره ۱۳ در یکی از کیسه‌های ۱۱، ۱۲ و یا ۱۳ قرار دارد. ابتدا کیسه ۱۲ را نگاه می‌کنیم که اگر کارت ۱۳ در آن بود، آن کارت پیدا شده است و اگر کارت ۱۲ در آن بود آنگاه کارت ۱۳ در کیسهٔ ۱۳ قرار دارد و اگر کارتِ ۱۴ در آن باشد آنگاه کارت ۱۳ در کیسه ۱۱ قرار خواهد داشت.

**۳۶.** اگر اعداد $a \le b \le c \le d$ مفروض باشند معلوم است بعد از سه مرحله به یک عدد خواهیم رسید که در بین همه ترکیب‌های قابل ساخت، ترکیب ۲a + ۴b + ۸d + ۸c از همه بزرگتر است (در عدد حاصل ابتدا دو عدد d و c با هم ترکیب شده‌اند و سپس عدد حاصل با b و در نهایت عدد جدید با a ترکیب شده‌اند). بنابراین الگوریتم مناسب برای ساختن بزرگترین عدد ممکن به شکل زیر می‌باشد:

۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ $\longrightarrow$ ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۴ $\longrightarrow$ ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱۰ $\longrightarrow$ ۱ , ۱ , ۱ , ۲۲

$\longrightarrow$ ۱ , ۱ , ۴۶ $\longrightarrow$ ۱ , ۹۴ $\longrightarrow$ ۱۹۰

**۳۷.** باقی‌مانده اعداد داده شده بر ۷ از چپ به راست به‌ترتیب برابر ۰، ۰، ۲، ۲، ۴، ۵ و ۴ می‌باشد. اگر ماشین‌ها را از چپ به راست به‌ترتیب با a، b، c، d، e، f و g نام‌گذاری کنیم آنگاه باید a قبل از b، c قبل از d و بالاخره g بعد از دو ماشین f و e به پارکینگ وارد شوند که تعداد جای‌گشت‌های مورد نظر با شرط فوق برابر $\frac{۷!}{۲ \times ۲ \times ۳}$ یعنی ۴۲۰ به‌دست می‌آید.

**۳۸.** توصیه‌نامه‌های چهار استاد را به‌ترتیب با g، t، j و a نام‌گذاری می‌کنیم، بنابراین ۹ عدد g، ۸ عدد t، ۷ عدد j و ۶ عدد a وجود دارد که قرار است با آنها ۱۰ سری ۳ تایی بسازیم. تعداد g ها ۹ تا می‌باشد. بنابراین فقط یکی از ۳ تایی‌ها g ندارد که آن ۳ تایی به شکل tja می‌باشد. فقط دو سری از ۳ تایی‌ها t ندارند که آن ۳ تایی‌ها به شکل gja می‌باشند. فقط سه سری از ۳ تایی‌ها j ندارند که آن ۳ تایی‌ها به شکل gta می‌باشند و بالاخره فقط چهار سری از ۳ تایی‌ها a ندارند که آن ۳ تایی‌ها به شکل gtj می‌باشند. تعداد جای‌گشت‌های ۱۰ سریِ به‌دست آمده (که ۴ تا از آنها با هم، ۳ تا از آنها با هم و بالاخره ۲ تا از آنها نیز با هم مشابه هستند) برابر $\frac{۱۰!}{۴! \times ۳! \times ۲! \times ۱!}$ یعنی ۱۲۶۰۰ می‌باشد.

**۳۹.** در کل شبکه سه نوع صفحه وجود دارد: صفحات افقی، صفحات عمودی از نوع ۱، صفحات عمودی از نوع ۲.

خط مورد نظر به‌ازای هر تلاقی با یکی از صفحات مورد اشاره، وارد یک مکعب جدید می‌شود. از طرف دیگر چون بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوبه‌دویِ اعداد ۱۰، ۹ و ۷ برابر ۱ می‌باشد، بنابراین خط مورد نظر هیچ دو صفحه‌ای را مشترکاً در یک نقطه قطع نمی‌کند. تعداد صفحات افقی، عمودی از نوع ۱ و عمودی از نوع ۲ (بدون احتساب صفحات اول و آخر) به‌ترتیب برابر ۹، ۸ و ۶ می‌باشد که مجموعاً ۲۳ صفحه می‌شود و خط مورد نظر هر یک از آن ۲۳ صفحه را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند که با نقطه شروع مجموعاً ۲۴ نقطه می‌شوند (از بین دو نقطه شروع و پایان باید یکی از آن دو را شمرد). چون تعداد مکعب‌های مورد نظر با تعداد نقاط تلاقی برابر است، بنابراین جواب مورد نظر ۲۴ می‌شود.

**۴۰.**

$$\sum_{i=0}^{83} x_i 2^i = \sum_{i=0}^{13} \left(1\times 2^5 + 1\times 2^4 - 1\times 2^3 - 1\times 2^2 + 1\times 2^1 - 1\times 2^0\right)\times 2^{6i}$$

$$= \sum_{i=0}^{13} \left(1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 0\times 2^3 + 0\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0\right)\times 2^{6i}$$

$$= (100101, 100101, \ldots, 100101)_2$$

عدد حاصل که از ۱۴ سری متوالی از «۱۰۰۱۰۱» تشکیل شده است دارای ۴۲ عدد «۰» می‌باشد.