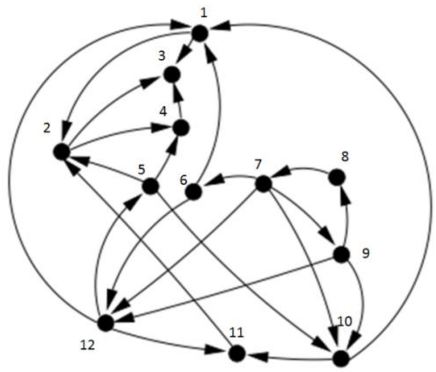
به نام خدا

پاسخ تشریحی

مرحله اول هفدهمین دوره المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۵

۱) این سوال حذف شده است.

۲) گزینه‌ی (ه) درست است.



نهنگ ۳ در سال اول خودکشی می‌کند زیرا هیچ یالی به بیرون ندارد(هیچ کسی را دوست ندارد). سال دوم نهنگ ۴ خودکشی می‌کند و ... اما هیچگاه همه نهنگ‌ها خودکشی نخواهند کرد. زیرا نهنگ‌های ۸ و ۹ و ۷ به صورت یک دور هستند و به دلیل اینکه رابطه دوست داشتن این سه نهنگ به صورت متوالی و به هم پیوسته است هیچ گاه هیچ‌کدام از آنها خودکشی نخواهد کرد. (زیرا همیشه کسی وجود دارد که مورد علاقه آنها باشد) در نتیجه گزینه ه جواب صحیح است.

۳) گزینه‌ی (ب) درست است.

شرکت D ادعا می‌کند که از بین شرکت آنها و شرکت A حداقل یکی گوشت فاسد می‌دهد. اگر خود شرکت D گوشت فاسد عرضه کرده باشد پس ادعایی که کرده درست بوده و به همین دلیل به تناقض می‌رسیم. پس شرکت D راستگو است. در نتیجه طبق ادعای او شرکت A دروغگو است. به همین دلیل ادعای او نیز رد شده و شرکت B راستگو خواهد بود. شرکت C هر دو شرکت A و B را دروغگو خوانده که ادعایی دروغ است بنابراین شرکت C نیز دروغگو است. پس دو شرکت B و D راستگو هستند. و گزینه ب صحیح است.

۴) گزینه‌ی (ه) درست است.

از آنجایی که می‌توانیم فرض کنیم مکعب‌ها در گوشه‌ها نیز اتصالات قوی برقرار خواهند کرد با در نظر گرفتن قطر اصلی مکعب که از n مکعب ۱×۱×۱ تشکیل شده است، می‌توانیم جسم مورد نظر را بسازیم. پس جواب صحیح گزینه ه خواهد بود.

۵) گزینه‌ی (ه) درست است.

برای nهای فرد نفر اول راهکار برد دارد به این صورت که هر دفعه در نوبت خود سمت راست‌ترین خانه‌ی خالی جدول را پر می کند ثابت می‌کنیم نفر دوم هیچ وقت نمی‌تواند مهره‌های سفید را سیاه کند زیرا هیچ‌وقت یک مهره‌ی سیاه در سمت راست یک مهره‌ی سفید قرار نمی‌گیرد چون همیشه سمت راست‌ترین خانه‌ی خالی را پر می‌کنیم. پس اگر یک مهره‌ی سیاه در سمت راست مهره‌ای که الان قرار می‌دهیم باشد آن مهره هم سفید می‌شود (زیرا سمت راست مهره‌های سیاه حتمن مهره‌ی سفید است) نفر دوم بهترین عملکرد خود را داشته باشد نفر اول حداقل یک مهره بیشتر از او می‌گذارد.

برای nهای زوج هرکدام از بازیکن‌ها راهکار نباختن دارد. هر دو به روش مشابه بالا سفید از سمت راست و سیاه از سمت چپ شروع به پر کردن می‌کند در نتیجه هرکدام حداقل به اندازه‌ی n/2 از جدول را می‌پوشانند و نفر مقابل نمی‌تواند ببرد. در نتیجه گزینه ه درست است.

۶) گزینه‌ی (ج) درست است.

عدد ۱۳۸۵ در مبنای دو معادل ۱۰۱۰۱۱۰۱۰۰۱ است. از آنجایی که این عدد ۱۱ رقمی است و ۵ رقم صفر دارد کافیست ۵ عدد کوچکتر از آن را بررسی کنیم که از مقدار ۱۳۸۵ + ۵ بیشتر خواهند شد یا خیر. زیرا تنها در صورتی که یکی از این ۵ عدد تعداد صفرهای بیشتری نسبت به ۱۳۸۵ داشته باشد و اختلافش از ۱۳۸۵ کمتر از تعداد صفرهای بیشتر آن باشد، مقدار K + f(K) بیشتر خواهد بود. برای چک کردن این ۵

عدد نیز با استفاده از تفریق باینری به راحتی می‌توان دریافت که ۱۳۹۰ بزرگترین عددی است که می‌تواند وجود داشته باشد و جواب گزینه ج خواهد بود.

۷) گزینه‌ی (ه) درست است.

اگر فاصله‌ی نقطه مبدا تا نقطه مرکز دوران (a, b) باشد آنگاه نقطه مقصد نسبت به نقطه مبدا در مختصات $(a-b,\ a+b)$ قرار خواهد داشت. پس اگر بخواهیم نقطه مقصد (x, y) باشد باید دستگاه معادله زیر را حل کرده و a و b را بیابیم.

$$a + b = x$$

$$a - b = y$$

$$a = \frac{(x+y)}{2}$$

$$b = \frac{(x-y)}{2}$$

برای اینکه a و b مقادیری صحیح داشته باشند کافیست x و y به پیمانه ۲ همنهشت باشند. این نکته در همه گزینه‌های داده شده صادق است. در نتیجه گزینه ه جواب صحیح است.

۸) گزینه‌ی (ب) درست است.

در صورتی که مطابق اعداد وارد شده در جدول زیر حرکت کنیم فقط لازم است در نقاط ۵، ۹، ۱۳، ۱۶ و ۱۹ یک ریال هزینه کنیم. از آنجایی که این شیوه بیشترین تعداد حرکت به ازای هر یک ریال را خواهد داشت، ۲۱ جواب بیشینه برای این سوال خواهد بود و جواب گزینه ب است.

1	2	3	4	5
16	17	18	19	6
15			20	7
14			21	8
13	12	11	10	9

۹) گزینه‌ی (ج) درست است.

می دانیم که تعداد روزها یا مساوی شب‌هاست و یا یکی بیشتر از آن است. روی تعداد روزها و شب‌ها حالت‌بندی می‌کنیم :

روزها	۱		۲		۳		۴		۵		۶	
شب‌ها	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵	۵	۶
تعداد حالت‌ها	۰	۱	۵	۲۵	۵۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۵۰	۲۵	۵	۱

که جمع کل این اعداد برابر با ۴۶۲ است.

۱۰) گزینه‌ی (ب) درست است.

حالات مختلف را در این مسئله بررسی می‌کنیم تا استراتژی برد بدست آید:

فرض کنید که ستون‌ها را از سمت چپ و سطرها را از بالا شماره‌گذاری کرده و همچنین هر گروه از نهنگ‌ها را از سمت چپ با ۱ تا ۵ شماره‌گذاری کرده‌ایم.

نفر اول مهره‌ی ۵ خود را به پایین سر می‌دهد. نفر دوم اگر مهره‌ی ۵ خود را سر دهد در دو مرحله‌ی بعد خواهد باخت. اگر مهره‌ی ۲، ۳ یا ۴ خود را سر دهد در مرحله‌ی بعد نفر اول همان مهره را به پایین سر می‌دهد و در دو مرحله‌ی بعد خواهد باخت. پس بهترین حرکت، سر دادن مهره‌ی ۱ به بالا خواهد بود. در اینصورت نفر اول مهره‌ی ۲ خود را به پایین سر می‌دهد.

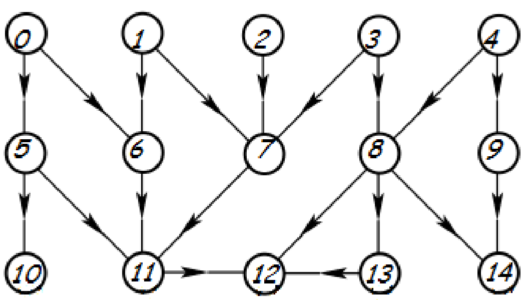
در این وضعیت نفر دوم اگر مهره‌ی ۲ تا ۵ خود را سر دهد، نفر اول در دو مرحله می‌تواند برنده شود. در نتیجه تنها می‌تواند مهره‌ی ۱ را به چپ یا راست سر دهد (نمی‌تواند به پایین سر دهد چون حرکت تکراری است). حال نفر اول مهره‌ی ۲ خود را به چپ سر می‌دهد و سپس در دو مرحله‌ی بعدی می‌تواند برنده‌ی بازی شود.

پس نفر اول می‌تواند در شش مرحله برنده بازی باشد.

۱۱) گزینه‌ی (الف) درست است.

برای گذاشتن عدد ۱ فقط یک راه داریم. برای گذاشتن عدد ۲ دو انتخاب خواهیم داشت یکی بالای خانه اول و یکی سمت راست آن. بعد از قرار دادن عدد ۲ در یکی از این دو خانه برای قرار دادن عدد ۳ نیز ۲ انتخاب داریم چرا که اگر عدد دو را در خانه (1, 2) قرار داده باشیم دیگر 3 در خانه (2, 1) نمی‌تواند قرار بگیرد و مجبور است در یکی از دو خانه (2, 2) یا (1, 3) قرار بگیرد. در نتیجه برای هر کدام از اعداد به جز یک دو حالت انتخاب داریم و به این ترتیب جواب مورد نظر 2^{13} خواهد بود که گزینه الف است.

۱۲) گزینه‌ی (د) درست است.



در بالا ۱۵ دفتر را به صورت شماره‌گذاری شده مشاهده می‌کنید. برای اینکه محاسبه کنیم در نهایت به هرکدام از دفاتر ۱۰ تا ۱۴ چند نامه می‌رسد کافی است که تعداد نامه‌های آنها را بر حسب تعداد نامه‌های دفاتر ۰ تا ۴ محاسبه کنیم.

$$10 = 0$$

$$11 = 0 + (0 + 1) + (1 + 2 + 3)$$

$$12 = (0 + (0 + 1) + (1 + 2 + 3)) + (3 + 4) + ((3 + 4))$$

$$13 = (3 + 4)$$

$$14 = (3 + 4) + 4$$

جمع کل = ۵×۰ + ۴×۱ + ۲×۲ + ۶×۳ + ۵×۴

به دفتر kام در کل به مقدار زیر نامه خواهد رسید:

$$K \times 2007 + \frac{(2007 \times 2008)}{2} = 2 * k + 3 \pmod 5$$

در نتیجه در کل جمع کل به پیمانه ۵ برابر با ۳ خواهد بود و گزینه د صحیح است.

۱۳) گزینه‌ی (د) درست است.

این جوجه در صورتی کمترین تعداد حرکت را خواهد داشت که حرکت تکراری انجام ندهد. زیرا در صورت تکرار به جای اینکه یکبار از دو برابر آن عدد که جز انتخابهایش نیز بوده است استفاده کند دوبار از آن عدد استفاده کرده است. در نتیجه باید از حرکتهای زیر استفاده کند:

$$99 = 64 + 32 + 2 + 1$$

$$59 = 32 + 16 + 8 + 2 + 1$$

اگر اندازه حرکات یکسان بود به تعداد $\binom{9}{4}$ انتخاب برای رسیدن به نقطه نهایی داشتیم. چون همه حرکات یکسان نیستند این عدد باید مقدار زیر باشد:

$$\binom{9}{4} \times 5! \times 4! = 362880$$

۱۴) گزینه‌ی (ج) درست است.

می‌دانیم که برای رسیدن از A به B دقیقا باید یک عمل بالا، یک راست و یک عقب انجام شود. در نتیجه باید جایگشتی از RUB را داشته باشیم. برای اینکه در حرکت پنجم در نقطه B باشیم باید دقیقا یک حرکت به صورت رفت و برگشت اضافه انجام شود. حالت اول فرض می‌کنیم دو حرکت اضافه شده حرکت به راست و چپ است. در نتیجه باید جایگشتی از رشته $RRLUB$ به عنوان دنباله حرکات انتخاب شود. پس تعداد روشها برای این حالت $5!$ است ولی باید این نکته را در نظر داشت که حرکت به سمت راست و چپ قابلیت جابجایی ندارند. یعنی نمی‌توانیم ابتدا به سمت چپ حرکت کرده و سپس دو بار به سمت راست حرکت کنیم زیرا از مکعب خارج خواهیم شد. برای حل این مشکل فرض کنیم سه حرف RRL با یکدیگر فرقی ندارند و در عوض باید به ترتیب RLR در دنباله بیایند. در نتیجه برای حالت اول به اندازه $\frac{5!}{3!}$ روش وجود دارد. حالت دوم به صورتی است که به جای اضافه شدن دو حرکت راست و چپ اضافه دو حرکت بالا و پایین اضافه داشته باشیم یعنی رشته به صورت $RUDUB$ در بیاید. و برای حالت سوم نیز رشته باید به صورت $RUBFB$ باشد. دو حالت فوق همانند حالت اول محاسبه خواهند شد و در کل $20 \times 3 = 60$ روش داریم که همان گزینه ج است.

۱۵) گزینه‌ی (د) درست است.

برای این که یک توپ در آخر سالم باقی بماند باید حداقل یک توپ در یکی از خانه‌های جلوی آن بترکد (یعنی خانه‌های بزرگترش) از طرفی یک توپ که منفجر شود فقط می‌تواند یک توپ به تعداد توپ‌هایی که قرار است آخرش بماند اضافه کند. از آنجا که حداقل نصف روزها داریم توپ می‌ترکانیم پس حداکثر ۱۶ تا توپ داریم که برای هر توپ حتمن یک توپ در خانه‌ای با عدد بیشتر ترکیده بوده پس جمع اعداد خانه‌هایی که در آخر در آنها توپ است نمی‌تواند از نصف بیشتر باشد.

حال اگر روز اول توپ را در خانه‌ی یک بگذاریم و از این به بعد روز $2i$ توپ را در خانه $2i+1$ بگذاریم و روز بعدش توپ را در خانه‌ی $2i$ بگذاریم در این صورت توپ خانه‌های 1 تا $2i$ نمی‌ترکد و در آخر توپ در خانه‌های زوج است که جمع آنها می‌شود ۲۷۲.

۱۶) گزینه‌ی (د) درست است.

اگر عدد وسط $3k + x$ باشد ۴ خانه مجاور آن $3k + x', 3k + x'', 3k' + x, 3k'' + x$ است. $3k + x'$ و $3k + x''$ به جز همین $3k + x$ همسایه مشترک دیگری نمی‌توانند داشته باشند (چرا؟) همینطور $3k' + x$ و $3k'' + x$ همسایه مشترک دیگری ندارند. $3k + x'$ و $3k' + x$ دو همسایه دارند که یکی همان $3k + x$ و دیگری $3k' + x'$ است. به همین ترتیب ۳ جفت دیگر فقط یک همسایه مشترک دیگر دارند. پس به ۴ حالت $3k + x'$ را در یکی از ۴ خانه مجاور خانه وسط می‌گذاریم و $3k + x''$ را به اجبار در خانه‌ی مقابل آن می‌گذاریم و برای دو عدد دیگر ۲ حالت داریم. اعداد ۴ گوشه نیز یکتا تعیین می‌شوند.

پس به ازای هر عددی که وسط باشد ۴×۲ حالت وجود دارد و در کل ۷۲ حالت داریم.

۱۷) گزینه‌ی (ج) درست است.

واضح است که تعداد حرکات واقعی از تعداد حرکات تخمین زده شده بیشتر است. زیرا میزان تخمین برای زمانی است که بتوان به صورت مستقیم خانه‌ها را جابه‌جا کرد ولی می‌دانیم برای جابه‌جا شدن یک خانه ممکن است مجبور به جابه‌جایی خانه‌های دیگر نیز بشویم که این باعث بروز حرکاتی بیشتر از مقدار تخمین زده شده خواهد شد. از طرفی برای برخی جدولها این مقدار بیش از ۲ برابر مقدار تخمین زده شده خواهد بود. شکل زیر را در نظر بگیرید:

1	2	3
4	5	6
8	7	

گزینه ج صحیح خواهد بود.

۱۸) گزینه‌ی (الف) درست است.

می‌خواهیم ثابت کنیم تعداد حالات بر $1385!$ بخش‌پذیر است. فرض کنید برای هر سطر اولین زمانی که خرگوشی را در آن کشتیم شماره‌ی آن سطر را روی تخته می‌نویسیم. بدین ترتیب یک جایگشت از سطرها روی تخته نوشته می‌شود. حال در نظر داشته باشید که تعداد حالاتی که یک جایگشت را می‌سازند با یکدیگر برابرند چون با جایگزین کردن سطرها قوانین مسئله حفظ می‌شود و در نتیجه به ازای هر حالتی از یک جایگشت، یک حالت متناظر برای جایگشت‌های دیگر نیز وجود دارد (می‌توان همین روند را برای ستون‌ها نیز بیان کرد). در نتیجه پاسخ مسئله بر $1385!$ بخش‌پذیر است و باقیمانده‌ی آن بر ۲۳ صفر خواهد بود.

۱۹) گزینه‌ی (د) درست است.

برای اینکه یک امتیاز بگیریم باید حداقل یک سطر و یک ستون را به صورت کامل پر کرده باشیم. همچنین از هیچ سطر و ستونی برای گرفتن امتیاز نمی‌توان استفاده کرد (یعنی هیچ گاه نمی‌توان در یک سطر یا ستون دو بار امتیاز گرفت زیرا در این صورت فرض سوال نقض می‌شود). در نتیجه حداکثر امتیازی که می‌توان کسب کرد به تعداد سطرها (یا ستونها) است. برای رسیدن به این مقدار ابتدا همه خرگوش‌های داخل

جدول به جز قطر اصلی را می‌کشیم (این کار به دلیل پیوسته بودن مجاورت قابل اعمال است) سپس با کشتن هر یک از خرگوش‌های روی قطر یک امتیاز خواهیم گرفت. پس جواب صحیح گزینه د است.

۲۰) گزینه‌ی (د) درست است.

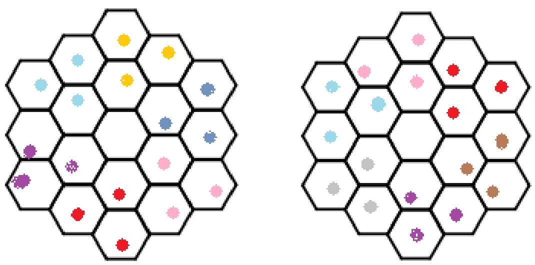
هر w را با صفر و هر b را با یک متناظر می کنیم تا به یک رشته‌ی باینری برسیم با این تفاوت که در این رشته کم ارزشترین رقم، رقم سمت چپ است.

هر عمل به روزرسانی روی حرف iام رشته مشابه اضافه کردن عدد 2^{i-1} به عدد باینری آن است.

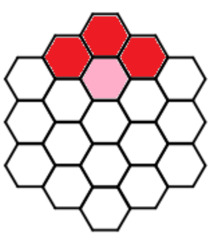
پس با انجام عملیات گفته شده در سوال به عدد ۶۶۶ می‌رسیم که تعداد ارقام یک باینری آن ۵ تاست.

۲۱) گزینه‌ی (ب) درست است.

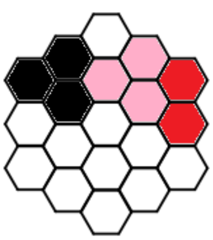
دو حالت زیر تنها حالت‌های مطلوب ما هستند زیرا تنها خانه‌ای که می‌تواند خالی بماند خانه وسط است (در ادامه اثبات می‌کنیم).



خانه صورتی نمی‌تواند خالی بماند زیرا در آن صورت خانه‌های قرمز دچار مشکل شده و نمی‌توانند همزمان پر شوند.



در صورتی که بخواهیم گوشه خالی بماند خانه‌های قرمز رنگ مشخص شده دچار مشکل خواهند شد.



در شکل زیر نیز خانه سفید خالی مانده است ولی خانه‌های قرمز راهی برای پر شدن ندارند.

به این ترتیب جواب گزینه ب خواهد بود و تنها حالت‌های مطلوب همان حالت‌های پیشین خواهد بود.

۲۲) گزینه‌ی (ج) درست است.

تفاوت ۸ و ۹ تنها در خانه چپ پایین است در نتیجه این خانه باید سالم باشد.

تفاوت یک و هفت تنها در خانه بالا است که این خانه نیز باید سالم بماند.

تفاوت ۸ و ۰ نیز تنها در خانه وسط است.

تفاوت ۶ و ۸ نیز تنها در خانه راست بالا است.

۲ و ۸ نیز در دو خانه تفاوت دارند که هیچکدام از آنها در تفاوت‌های پیشین نبود. با انتخاب لامپ سالم برای راست پایین این مشکل نیز رفع خواهد شد. در نتیجه گزینه ج جواب صحیح است.

۲۳) گزینه‌ی (ج) درست است.

به ازای ۴ و ۷ و ۱۰ می‌توان با انتخاب‌های زیر مثلث را پاک کرد:

۴: چهار تا مثلث ۴تایی

۷:سه تا مثلث ۴تایی و ۴ تا مثلث واحد

۱۰: دو تا مثلث ۴ تایی و ۸ تا مثلث واحد.

به طور کلی فقط اعداد زیر را می‌توان انتخاب کرد:

یک ۹تایی و ۷ تا یکی، چهار ۴تایی، سه ۴تایی و ۴ تا یکی، دو ۴تایی و ۸ تا یکی، یک ۴تایی و ۱۲ تا یکی و ۱۶ تا یکی.

۲۴) گزینه‌ی (ج) درست است.

بدیهی است اگر از همه اعداد مجموعه ۱۵ را کم کنیم تغییری در کلیت مسئله داده نمی‌شود و مجموعه به صورت زیر درمی‌آید:

$\{0,4,8,12,16,20,24\}$

با توجه به اینکه همه اعداد بر ۴ بخشپذیر هستند می‌توانیم همه اعداد را بر ۴ تقسیم کنیم و هم‌چنان در کلیت مسئله تفاوتی ایجاد نخواهد شد. مجموعه جدید تبدیل خواهد شد به:

$\{0,1,2,3,4,5,6\}$

این مجموعه ۱۳ عدد متمایز تولید می‌کند زیرا جمع کوچکترین‌ها ۶ و جمع بزرگترین‌ها ۱۸ خواهد بود که همه اعداد بین این دو نیز توسط ۴ عدد متمایز مجموعه ساخته خواهند شد (این رخداد به دلیل پیوستگی مجموعه و وجود صفر در آن است). هرکدام از مجموعه‌هایی که بدست می‌آیند با ضرب در ۴ و جمع با ۱۵ به یکی از مجموعه‌های مجموعه‌ی اولیه تبدیل خواهند شد. پس جواب گزینه ج خواهد بود.

۲۵) گزینه‌ی (ج) درست است.

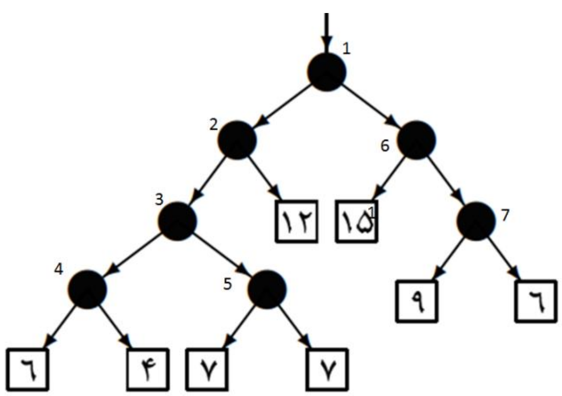
از آنجایی که از هر دو جهت دایره باید نخود عبور کند پس هر دایره حداقل یکبار تغییر جهت نیاز دارد.

از طرفی نخودهایی که از هر دو جهت هر دایره (به جز دایره‌ی سمت راست پایین) باید عبور کنند متفاوتند، پس باید قبل از تغییر جهت بدانیم نخود ها در چه جهتی می‌رفتند. در نتیجه در کل به ۶+۵ عمل تغییر جهت نیاز داریم.

ابتدا با ۵ حرکت جهت همه‌ی دایره‌ها را می‌فهمیم به جز دایره‌ی سمت راست پایین که مهم نیست در چه جهتی باشد. سپس هر کیسه که پر شد به ترتیب از پایین دایره‌ها را تغییر می‌دهیم تا همه‌ی کیسه‌ها پر شود.

۲۶) گزینه‌ی (الف) درست است.

شروع به انداختن نخودها می‌کنیم تا زمانی که یکی از خانه‌ها پر شود. در اینصورت جهت پدر آن گره را متوجه می‌شویم. با تغییر جهت آن دایره مربع دیگری شروع به پرشدن می‌کند. پس از اینکه آن خانه نیز پر شود جهت پدر آن را تغییر می‌دهیم تا زمانی که همه مربع‌ها پر شوند. هر دایره نهایتا یک بار تغییر جهت می‌دهد. در نتیجه به تعداد خانه‌های دایره‌ای احتیاج به تغییر داریم. به مثال زیر توجه کنید:



فرض کنید شروع به ریختن نخود می‌کنیم و پس از تعدادی حرکت مربع ۱۵تایی پر می‌شود. جهت دایره ۶ را عوض می‌کنیم و خانه ۹تایی شروع به پر شدن می‌کند سپس با عوض کردن دایره ۷ مربع ۶تایی شروع به پر شدن می‌کند. پس از آن دایره شماره ۱ را تغییر جهت می‌دهیم و به همین ترتیب تا همه مربع‌ها پر شوند. واضح است که با ۷ حرکت همه مربع‌ها پر خواهند شد.

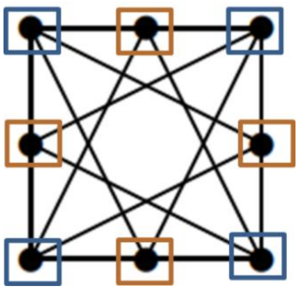
۲۷) گزینه‌ی (ج) درست است.

می‌دانیم اگر فردی بمیرد مشخص می‌شود که یکی از دو شرکت سازنده کنسرو او کنسرو فاسد تولید می‌کنند. در نتیجه این دو شرکت در غذای هر کدام از افراد دیگر آمده باشند شرکت فاسد مشخص خواهد شد (اگر شرکت سالم در غذای فردی بیاید او نخواهد مرد زیرا فقط یک شرکت فاسد داریم و در این صورت شرکت فاسد مشخص می‌شود و در صورتی که شرکت فاسد در غذای فردی دیگر بیاید او خواهد مرد و در این صورت نیز شرکت فاسد شناسایی خواهد شد). پس تنها حالت ممکن این است که شرکت فاسد و شرکتی که با شرکت فاسد آمده است دیگر در هیچ گروهی نیایند که در این صورت بقیه شرکت‌ها $\binom{8}{2} = 28$ حالت امکان تشکیل گروه را دارند. پس در کل ۲۹ دسته می‌توانند تشکیل شوند که باعث کشته شدن فقط یک نفر خواهند شد و شرکت فاسد نیز مشخص نخواهد شد.

۲۸) گزینه‌ی (د) درست است.

پینوکیو به جز مرحله‌ی اول همواره از یک مسیر وارد سه‌راهی شده و در نتیجه تنها دو مسیر پیش‌رو دارد. پس هر بار در بدترین حالت مجبور است یکی از سه‌راهی‌ها را برود و برگردد و سپس وارد مسیر درست شود. در نتیجه هربار ۳متر را طی می‌کند و در ازای آن یک متر از فاصله او با پدر ژپتو کاسته خواهد شد. البته در مرحله‌ی اول باید ۵ متر طی کند. پس در کل $1385 \times 3 + 2 = 4157$ متر باید بپیماید.

۲۹) گزینه‌ی (ه) درست است.



همانطور که در شکل نشان داده شده این گراف دوبخشی است و به همین دلیل هرکدام از دسته‌های نارنجی و آبی مربوط به یکی از دو نفر خواهند بود. در صورتی که نیلوفر شروع‌کننده بازی باشد با نگاه کردن به دفترچه و جمع زدن عوارض نارنجی و جمع زدن عوارض آبی می‌تواند بفهمد کدام دسته مجموع قیمت‌های کمتری دارد و آن را انتخاب کند و در نهایت نیلوفر قیمت کمتری خواهد پرداخت. در نتیجه مقداری که نیلوفر خرج می‌کند کمتر مساوی مقداری است که لیلی خرج می‌کند.

۳۰) گزینه‌ی (الف) درست است.

ثابت می‌کنیم:

$$W_A = W_B, W_C = W_D + 2, W_E = W_F, W_G = W_H$$

برای دو نقطه مثل A, B اگر بالاترین خیابان هرکدام از این ستون‌ها، خیابان بین این دو باشد تناظری یک به یک بین مسیرهای منتهی به این نقاط وجود دارد. چرا که برای رسیدن به این نقاط باید به ارتفاع خیابان بین این دو برسیم و در این حالت به ازای هر مسیر به A یک مسیر نیز به B وجود دارد. در نتیجه تعداد مسیرهای منتهی به این نقاط با یکدیگر برابرند. این استدلال برای زوج نقاط E, F و G, H نیز درست است.

ولی برای نقاط C, D شرایط فرق می‌کند. اگر فرض کنیم خیابان بین B و C وجود ندارد بقیه مسیرها با هم متناظر هستند. پس کافیست که تنها مسیرهایی را محاسبه کنیم که از این خیابان استفاده می‌کنند و به C ختم می‌شوند. با توجه به اینکه تنها می‌توان به سمت بالا، چپ و راست حرکت کرد تنها دو مسیر با این ویژگی وجود دارد. پس مجموع یاد شده در مساله برابر با (۲-) است.

۳۱) گزینه‌ی (ه) درست است.

در صورتی که وضعیت لامپ‌های ردیف اول را مشخص کنیم، بقیه ردیف‌ها وضعیت یکتایی خواهند داشت که از یک الگو تبعیت می‌کند. کافیست که به ازای حالات مختلف الگوها را بیابیم.

به ازای هر ردیف هشت حالت مختلف از تغییرات وجود دارد. دنباله‌ی تغییرات لامپ‌ها در طبقات مختلف چهار حالت مختلف هستند.

در هر الگو پس از رسیدن به حالت نهایی، الگو دوباره تکرار می‌شود (نقطه نماد خاموشی و عدد نماد روشنی است).

الگوی اول:

1 . .
1 2 .
. . 3

$. \ 2 \ 3$

$1 \ . \ .$

الگوی دوم:

$. \ 2 \ .$
$1 \ 2 \ 3$
$. \ 2 \ .$

الگوی سوم:

$. \ . \ .$

الگوی چهارم:

$1 \ . \ 3$

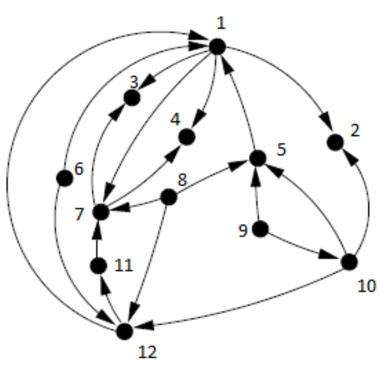
با این روند تمام حالات برای ردیف دهم ممکن خواهد بود. پس پاسخ برابر هر چهار حالت داده شده است.

۳۲) گزینه‌ی (ج) درست است.

در صورتی که افراد دور دایره را شماره‌گذاری کنیم، در صورتی که نفر اول و نفر چهارم چشم راست و بقیه چشم چپ خود را ببندند، ۷ جفت آدم یکدیگر را می‌بینند.

حال ثابت می‌کنیم این تعداد بیشترین تعداد جفت آدم ممکن است. در کل تعداد هم‌بینی‌های ممکن $\binom{6}{2} = 15$ تاست. از طرفی می‌دانیم از این تعداد حداقل $\frac{2\times 6}{2}$ هم‌بینی به دلیل ندیدن افراد مجاور حذف خواهد شد. در نتیجه حداکثر ۹ هم‌بینی می‌ماند. همچنین سه نفر مجاور که هم‌بینی ندارند را در نظر بگیرید، نفر سمت چپ چشم سمت راست خود را بسته است و نفر سمت راست چشم سمت چپ خود. این ناهم‌بینی‌ها در کسر فوق محاسبه شده‌اند ولی نفر وسط به هر طریقی که چشم خود را ببندد یکی دیگر به جز دو نفر مجاور خود را نخواهد دید در نتیجه یک واحد به کسر بالا اضافه خواهد شد. به ازای هر سه نفر که هم‌بینی ندارند و مجاور هستند یکی به کسر فوق اضافه می‌شود چون تعداد افراد ۶ است در کل ۸ هم‌بینی از بین می‌روند. در نتیجه بیشتر از ۷ هم‌بینی امکان‌پذیر نیست.

۳۳) گزینه‌ی (الف) درست است.



نهنگ‌هایی که کسی را دوست ندارند (به کسی یال ندارند) در هر صورت خودکشی نمی‌کنند، پس هرکدام از این نهنگ‌ها باید یک نهنگ دیگر را دوست داشته باشد. نهنگ‌های ۲، ۳ و ۴ به هیچ نهنگی پیکان ندارند پس حتی اگر یکی از این نهنگ‌هارا نیز در ابتدا بکشیم دو نهنگ دیگر باید یک پیکان خروجی داشته باشند تا خودکشی کنند.

اگر دو پیکان از نهنگ‌های ۳و ۴ به نهنگ ۲ بکشیم، بعد از کشتن نهنگ ۲، همه‌ی نهنگ‌ها بعد از چند مرحله خودکشی می‌کنند .

۳۴) گزینه‌ی (ب) درست است.

$f(n)$: تعداد حالت‌هایی که تانکرها به مقصد می‌رسند اگر در آغاز n تانکر داشته باشیم (و هر تانکر تنها با تانکرهایی تصادف کند که دارای عددهای متوالی هستند).

روی اولین تانکر حالت‌بندی می کنیم:

۱- به مقصد می‌رسد :

در اینصورت تانکر اول با هیچ تانکری برخورد نکرده است پس تعداد حالت‌ها برابر است با $f(n-1)$.

۲- به مقصد نمی‌رسد :

در این حالت تانکر اول با تانکر دوم برخورد کرده است. پس ۲ تانکر اول حذف می‌شوند و تعداد حالت‌ها برابر است با $f(n-2)$.

در نتیجه $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$. که با توجه به حالت‌های اولیه داریم: $f(10) = 89$

۳۵) گزینه‌ی (الف) درست است.

برای اینکه بیشترین تعداد حرکات را داشته باشیم باید به بیشترین عدد فرد برسیم.

اعداد را در مبنای ۲ در نظر می‌گیریم در هر مرحله اگر عدد زوج باشد صفر جلوی عدد را برمی‌داریم و اگر عدد فرد باشد، ۱ جلوی عدد را برداشته و به آن ۵۱۲ تا اضافه می‌کنیم.

پس بیشترین تعداد دفعاتی که می‌توانیم عدد فرد داشته باشیم حالتی است که بیشترین تعداد ۱ ممکن را در مبنای ۲ عدد ابتدایی داشته باشیم.

در نتیجه عدد ابتدایی باید ۶۳ باشد که تعداد حرکات ممکن با انتخاب ۶۳ برابر است با ۶۱۳۸.

۳۶) گزینه‌ی (ب) درست است.

از آنجایی که با دانستن رنگ قاتل می‌توان رنگ مقتول را فهمید، دنباله‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن فقط رنگ قاتل‌ها را نوشته‌ایم.

آخرین قاتل همان نهنگ بازمانده است پس آخرین نهنگ مقتول از رنگ مخالف آن است. در نتیجه از مرحله‌ی اول تا قبل از مرحله‌ی آخر از هر دو رنگ حتمن حداقل یک نهنگ داریم. پس قاتل‌ها به هر ترتیبی می‌توانند باشند.

فرض می‌کنیم نهنگ آخر سفید باشد (چون حالت‌ها متقارن‌اند). در نتیجه قاتل آخر نیز سفید است. در دنباله ۶ جای خالی داریم که با ۳ سیاه و ۳ سفید پر می‌شوند که تعداد حالت‌ها برابر ۲۰ می‌باشد.

در نتیجه کل حالت‌ها ۴۰ تاست.

۳۷) گزینه‌ی (د) درست است.

پس از اینکه در سوال قبل تعداد روش‌ها را یافتیم باید نام نهنگ‌ها را در لیست بنویسیم. برای اینکار می‌توانیم تعداد روشها را در $4! \times 4!$ ضرب کنیم که در نهایت عدد ۲۳۰۴۰ بدست خواهد آمد.

۳۸) گزینه‌ی (ه) درست است.

ثابت می‌کنیم حداکثر تعداد حرکات لازم ۲۰۰۷ تاست. می‌توانیم هر جدول را با ۲۰۰۷ حرکت طوری مرتب کنیم که به ترتیب در خانه‌های ۱ تا ۲۰۰۷ قرار بگیرند.

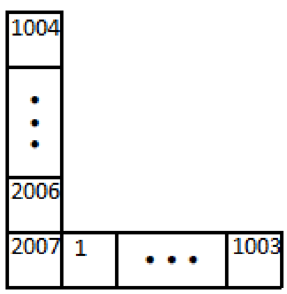
در هر مرحله کمترین عضوی (کمتر از ۱۰۰۴)که در جای خود نباشد را پیدا کرده و با حداکثر ۲ حرکت در جای خود قرار می‌دهیم (اگر این عدد در ستون بود با یک بار مرتب‌سازی ستون و اگر در سطر بود ابتدا سطر را مرتب کرده چون کوچکترین عدد است به ابتدای سطر می‌آید سپس ستون را مرتب می‌کنیم.).

پس ستون جدول را با ۲۰۰۶ حرکت پر می‌کنیم، سپس با یک حرکت سطر جدول را که شامل ۱۰۰۴ عدد بزرگتر است مرتب می‌کنیم.

حال مثالی ارائه می‌دهیم که دقیقن ۲۰۰۷ حرکت لازم داشته باشد.

در این جدول حرکات یکتا هستند (دو حرکت مشابه پشت هم بیهوده است از طرفی اولین حرکت باید روی سطر باشد)

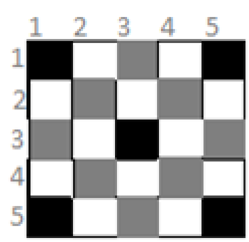
در هر ۲ حرکت دقیقن یک عدد در ستون سر جای خود قرار می‌گیرد.

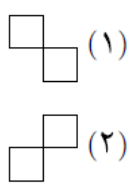


۳۹) گزینه‌ی (د) درست است.

جدول را به صورت روبرو شطرنجی رنگ می‌کنیم.

چون هر قطعه دو خانه از یک رنگ را پر می‌کند، پس پر کردن خانه‌های سفید و خانه‌های خاکستری مستقل از هم هستند.





برای پر کردن خانه‌های خاکستری تنها ۲ حالت داریم (*خانه‌ی* (3 ,1) با چه خانه‌ای جفت شود).

برای خانه‌های سفید روی جهت قطعه‌های (2 ,1) و (4 ,1) و (2 ,5) و (4 ,5) حالت‌بندی می‌کنیم:

۱- در همه‌ی این خانه‌ها قطعه اول را بگذاریم (بقیه خانه‌ها یکتا تعیین می‌شوند).
۲- در همه‌ی این خانه‌ها قطعه دوم را بگذاریم (بقیه خانه‌ها یکتا تعیین می‌شوند).
۳- در خانه‌های (4 ,5) و (2 ,1) قطعه‌ی اول و در دو خانه‌ی دیگر قطعه‌ی دوم را قرار دهیم در اینصورت بقیه خانه‌ها دو حالت دارند.
۴- در قسمت بالا برای دقیقن یک خانه از این ۴ خانه جهت قطعه را عوض کنیم در اینصورت بقیه خانه‌ها یکتا تعیین می‌شوند.

پس در کل ۸ حالت برای چینش خانه‌های سفید داریم. در نتیجه برای کل جدول ۱۶ حالت داریم.

۴۰) گزینه‌ی (ب) درست است.

از آنجایی که لی، شائو نیست! پس دروغگو آخر نشده.

نفر دوم نمی‌تواند دورغگو باشد چون در اینصورت دو نفر اول شده‌اند.

نفر سوم نمی‌تواند دروغگو باشد چون در اینصورت نفر پنجم و نفر اول، اول شده‌اند.

نفر چهارم دروغگو نیست چون اگر دروغگو باشد یا اول شده یا آخر و چون نفر اول، اول شده پس او آخر شده در حالی که دروغگو نباید آخر شده باشد!

نفر اول هم دروغگو نیست چون در اینصورت هم نفر دوم هم نفر پنجم می‌توانند اول شده باشند (که استاد نمی‌توانسته مطمئن باشد چه کسی اول می شود).

در نتیجه نفر پنجم دروغگوست و نفر دوم آخر شده است.