پاسخ تشریحی

هفتمین المپیاد کامپیوتر

۱. تمام مثلث‌های موجود در شکل قائم‌الزاویه می‌باشند. ضلع مربع بزرگ را ۲ در نظر می‌گیریم. به تعداد ۱۶ عدد مثلث قائم‌الزاویه با طول وتر واحد وجود دارد. به تعداد ۱۶ عدد مثلث با ضلع زاویهٔ قائمه واحد وجود دارد. (در داخل هر مربع به ضلع واحد ۴ عدد). به تعداد ۸ مثلث با طول وتر ۲ وجود دارد. (۴ عدد از آنها رأسشان اوساط اضلاع مربع و وترهایشان اضلاع مربع می‌باشد و ۴ عدد دیگر از آنها رأسشان اوساط اضلاع مربع بوده و وترهایشان پاره‌خط‌هایی هستند که اوساط اضلاع مقابل را به هم وصل می‌کنند). و بالاخره به تعداد ۴ عدد مثلث که طول ضلع زاویهٔ قائمه آنها برابر با ۲ بوده و رأسشان رأس مربع و وترهایشان قطرهای مربع می‌باشند وجود دارد. در نتیجه در مجموع ۴۴ مثلث در شکل دیده می‌شود.

۲. I صحیح است زیرا اگر x عدد صحیح باشد هم $\lfloor x \rfloor$ و هم $\lceil x \rceil$ هر دو با خود x برابرند.

II نیز صحیح است زیرا اگر x صحیح نباشد آن را به‌صورت $x = m + r$ می‌نویسیم که در آن m یک عدد صحیح است و $۰ < r < ۱$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor m + r \rfloor = m \quad , \quad \lceil x \rceil = \lceil m + r \rceil = m + ۱$$

III غلط است. مثال نقض $x = ۴$ و $y = ۲/۲$ می‌باشد در این صورت خواهیم داشت؛

$$\lfloor ۴ \rfloor \quad \lceil ۲/۲ \rceil = ۴ \times ۳ = ۱۲$$

$$\lceil ۴ \rceil \quad \lfloor ۲/۲ \rfloor = ۴ \times ۲ = ۸$$

منبع: المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)، تألیف رسول حاجی زاده، انتشارات دانش پژوه، ۱۳۸۵

IV صحیح است. زیرا اگر x صحیح باشد در این صورت خواهیم داشت:

$$-\lfloor x \rfloor = -x$$
$$\lceil -x \rceil = -x$$

و اگر x صحیح نباشد آن را به‌صورت $x = m + r$ می‌نویسیم که در آن m یک عدد صحیح بوده و $۰ < r < ۱$. در این صورت خواهیم داشت:

$$-\lfloor x \rfloor = -\lfloor m+r \rfloor = -m$$
$$\lceil -x \rceil = \lceil -m-r \rceil = \lceil -m+۱-۱-r \rceil = \lceil (-m-۱)+(۱-r) \rceil$$

چون $۰ < ۱-r < ۱$، پس خواهیم داشت:

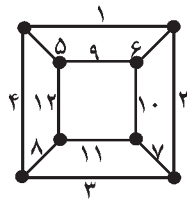
$$\lceil -x \rceil = (-m-۱)+۱ = -m$$

۳. بدیهی است که هر چه تعداد اعضای زیرمجموعه‌های انتخابی کمتر باشد بهتر است. بدین منظور برای انتخاب زیرمجموعه‌های فوق زیرمجموعه‌های ۰، ۱ و ۲ عضوی را که تعداد آنها $\binom{۵}{۰}$، $\binom{۵}{۱}$ و $\binom{۵}{۲}$ و در مجموع ۱۶ زیرمجموعه می‌باشند را انتخاب می‌کنیم.

۴. مطابق شکل سیم‌ها را از ۱ تا ۱۲ شماره‌گذاری می‌کنیم دسته سیم‌هایی که می‌توانیم حذف کنیم تا به‌منظور فوق برسیم عبارتند از:

(۱۱ , ۹ , ۳ , ۱)، (۱۲ , ۱۰ , ۳ , ۱)، (۹ , ۸ , ۷ , ۱)، (۱۱ , ۹ , ۴ , ۲)، (۱۲ , ۱۰ , ۴ , ۲)، (۱۰ , ۸ , ۵ , ۲)، (۱۱ , ۶ , ۵ , ۳)، (۱۲ , ۷ , ۶ , ۴)، (۸ , ۷ , ۶ , ۵)

پس مجموعاً ۹ حالت ممکن است.



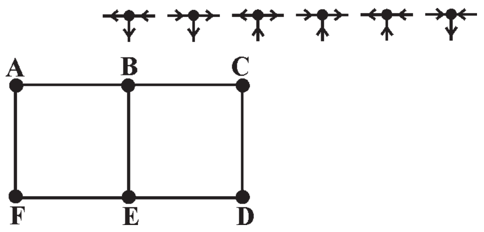
۵. خانه‌های رنگ شده را به شکل

	۴	
۳	۲	۱

شماره‌گذاری می‌کنیم. اگر خانه ۴ بالای شکل باشد بدیهی است که خانه‌های ۱، ۲ و ۳ در سطرهای ۲، ۳، ۴ و ۵ شکل اصلی می‌توانند قرار گیرند و خانه‌های ۱، ۲ و ۳ به‌ترتیب در ستون‌های (۳ , ۲ , ۱)، (۴ , ۳ , ۱) و (۵ , ۴ , ۳) می‌توانند جابه‌جا شوند پس در این حالت مجموعاً ۴×۳ یعنی ۱۲ نوع رنگ‌آمیزی می‌تواند باشد. اگر خانهٔ ۴ پایین، سمت

راست و یا سمت چپ شکل باشد نیز ۱۲ نوع رنگ‌آمیزی موجود خواهد بود. پس کل تعداد حالات برابر ۱۲ × ۴ یعنی ۴۸ حالت خواهد بود.

۶. با توجه به شکل بدیهی است که جهت مسیرهای AB، AF و FE وابسته به همدیگر و نیز جهت مسیرهای BC، CD و ED وابسته به هم می‌باشند؛ یعنی اگر جهت مسیر AB از A به سمت B باشد، آنگاه مسیر FA از F به‌سمت A و مسیر EF از E به‌سمت F خواهند بود فلذا کافی است جهت مسیرهای منتهی به B را تعیین کنیم در آن صورت جهت مسیرهای دیگر خود به خود تعیین خواهند شد. پس تعداد حالات ممکن برابر با تعداد حالاتی است که می‌توان جهت مسیرهای منتهی به B را تعیین کرد. جهت مسیرهای منتهی به B یکی از حالات زیر است:



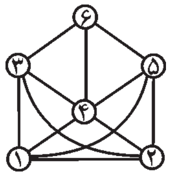
پس تعداد حالات ممکن برابر با ۶ می‌باشد.

۷. بدیهی است که هم مجموع امتیازات امارات و هم عربستان هر دو فرد است از طرف دیگر تعداد کل بازی‌ها ۶ بازی می‌باشد که معلوم می‌شود مجموع امتیازات چهار تیم برابر با ۱۲ می‌باشد.

پس امتیازات هر کدام از تیم‌های امارات و عربستان (۱ , ۳)، (۱ , ۵)، (۳ , ۵) می‌تواند باشد. (۱ , ۳) نمی‌تواند باشد زیرا در این صورت تیم اول ۶ امتیاز و تیم کویت ۲ امتیاز خواهند داشت که با آخر بودن کویت در تضاد است. (۱ , ۵) نیز نمی‌تواند باشد زیرا در این صورت به تیم اول ۶ امتیاز و به تیم آخر صفر امتیاز خواهد رسید. یعنی امتیاز چهار تیم به‌ترتیب ۶، ۵، ۱ و ۰ خواهد بود که امکان ندارد زیرا نتیجهٔ بازی تیم‌های اول و دوم تساوی نمی‌باشد پس یکی از آنها صفر امتیاز از بازی می‌گیرد و حداکثر امتیازش ۴ می‌تواند باشد. پس نتایج مسابقات به شکل زیر است:

الف) عربستان (یا امارات)	۵ امتیاز
ب) ایران	۴ امتیاز
ج) امارات (یا عربستان)	۳ امتیاز
د) کویت	۰ امتیاز

۸. مینیمم حالت برابر با ۲۴ است. یکی از حالاتی که مینیمم را تولید می‌کنند در شکل مقابل آمده است:

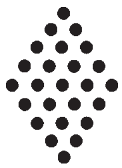


۹. اگر کار شمارهٔ ۲ را در نظر نگیریم بقیهٔ ۶ کار به دو صورت:

۷ ⟵ ۶ ⟵ ۳ ⟵ ۵ ⟵ ۴ ⟵ ۱ و ۷ ⟵ ۳ ⟵ ۶ ⟵ ۵ ⟵ ۴ ⟵ ۱

قابل انجام است. حال اگر توجه کنیم کار شماره ۲ بعد از کار شماره ۱ در هر مرحله قابل اجراست؛ یعنی بر هر دو مورد بالا ۶ حالت ممکن است اتفاق افتد (یعنی کار شماره ۲ بعد از هر کدام از کارهای شماره ۱، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ می‌تواند انجام گیرد). پس در کل، تعداد حالات ممکن برای انجام پروژه ۱۲ می‌باشد.

۱۰. شکل برداشته شده یک متوازی الاضلاع $m \times n$ می‌شود. چون ۲۵ را فقط به‌صورت ۵×۵ می‌توان نوشت پس متوازی‌الاضلاع حذف شده به شکل مقابل می‌باشد که تکمیل آن برای تبدیل به مثلث متساوی‌الاضلاع فقط به یک طریق امکان‌پذیر است که در آن مثلث $n = ۹$ و گوی حذف شده پنجمین گوی قاعده می‌باشد.



۱۱. عدد موجود در خانه مورد نظر ۳ می‌باشد. (مطابق جدول زیر)

۱	۳	۲	۴
۴	۲	۱	۳
۲	۴	$\boxed{۳}$	۱
۳	۱	۴	۲

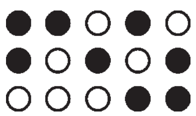
۱۲. موقعیت انبار را در نقطهٔ D در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم فاصله D تا B برابر با x باشد در این صورت فاصله D تا C برابر با x - ۴ خواهد بود (اگر D بین B و A باشد این فاصله برابر با x+۴ خواهد بود). کل هزینهٔ مصرفی عبارت خواهد بود با:

$$e = (۱ + x)۲۰۰ + x \times ۳۰۰ + (۴ - x)۴۰۰$$

$$= ۲۰۰ + ۲۰۰x + ۳۰۰x + ۱۶۰۰ - ۴۰۰x = ۱۰۰x + ۱۸۰۰$$

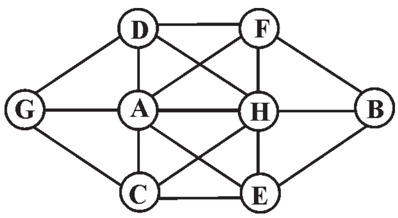
بدیهی است مقدار فوق وقتی مینیمم خواهد بود که مقدار x برابر با صفر باشد یعنی موقعیت منبع در محل دهکدهٔ B باشد.

۱۳. اگر ستونی هر سه دایره‌اش پر باشد در این صورت واضح است که از هر کدام از چهار ستون دیگر فقط یکی از دایره‌هایشان می‌تواند پر باشد زیرا در غیر این صورت مربع یا مستطیل با چهار رأس پر پیدا خواهد شد. در این صورت ۲×۴ دایره سفید موجود خواهد بود که معلوم می‌شود ۷ دایرهٔ پر وجود دارد. و اما اگر هیچ ستونی هر سه دایره‌اش پر نباشد در این صورت یکی از ستون‌ها (مثلاً اول) که دو دایره‌اش پر می‌باشد را در نظر می‌گیریم. به‌عنوان مثال فرض می‌کنیم دو سطر اول ستون اول پر باشند بدیهی است که در چهار ستون دیگر دو سطر اول و دوم توأماً نباید پر باشند و همچنین از ۴ دایرهٔ مربوط به سطر آخر چهار ستون پایانی حداکثر ۲ دایره می‌تواند پر باشد. پس کل دایره‌های پر $۲ + ۴ + ۲$ یعنی ۸ دایره می‌تواند باشد که نمونه‌ای از آن در شکل زیر نمایان است:



۱۴. در مرحله اول اعداد فرد خط خورده و مضارب ۲ باقی می‌مانند. در مرحله دوم مضارب ۴ ($۲^{۲}$) باقی می‌مانند. در مرحله سوم مضارب ۸($۲^{۳}$) باقی می‌مانند و ... و بالاخره در مرحله دهم ۱۰۲۴($۲^{۱۰}$) باقی می‌ماند.

۱۵. با توجه به جدول مقابل در خانه مورد نظر حرف G می‌تواند باشد.



۱۶. یک عدد موجود است که هر چهار رقم آن ۳ باشد. ($\frac{۴!}{۴!}$)

چهار عدد موجود است که سه رقم آن ۵ و یک رقم آن ۳ باشد. ($\frac{۴!}{۳!}$)

چهار عدد موجود است که سه رقم آن ۷ و یک رقم آن ۳ باشد. ($\frac{۴!}{۳!}$)

شش عدد موجود است که دو رقم آن ۵ و دو رقم دیگرش ۷ باشد. ($\frac{۴!}{۲!۲!}$)

و بالاخره دوازده عدد موجود است که دو رقم آن ۳، یک رقم آن ۵ رقم دیگرش برابر با ۷ باشد. ($\frac{۴!}{۲!}$)

پس کل اعداد مورد نظر برابر با ۲۷ می‌باشد.

۱۷. اعداد را به‌صورت ۱۳ و e و d و c و b و a و ۱ در نظر می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$a=\frac{۱+b}{۲}+۱ \Rightarrow ۱+b=۲a-۲ \Rightarrow b=۲a-۳$$

$$b=\frac{a+c}{۲}+۱ \Rightarrow ۲a-۳=\frac{a+c}{۲}+۱ \Rightarrow a+c=۴a-۸ \Rightarrow c=۳a-۸$$

$$c=\frac{b+d}{۲}+۱ \Rightarrow ۳a-۸=\frac{۲a-۳+d}{۲}+۱ \Rightarrow ۲a-۳+d=۶a-۱۸ \Rightarrow d=۴a-۱۵$$

$$d=\frac{c+e}{۲}+۱ \Rightarrow ۴a-۱۵=\frac{۳a-۸+e}{۲}+۱ \Rightarrow ۳a-۸+e=۸a-۳۲ \Rightarrow e=۵a-۲۴$$

$$e=\frac{d+۱۳}{۲}+۱ \Rightarrow ۵a-۲۴=\frac{۴a-۱۵+۱۳}{۲}+۱ \Rightarrow ۴a-۲=۱۰a-۵۰ \Rightarrow ۶a=۴۸ \Rightarrow a=۸$$

پس جملهٔ پنجم یعنی d برابر با ۱۵ -۸ × ۴ یعنی ۱۷ می‌باشد.

۱۸.

$$\begin{aligned}
S=&|۱-۲|+|۳-۴|\\
&+|۱-۲|+|۴-۳|\\
&+|۱-۳|+|۲-۴|\\
&+|۱-۳|+|۴-۲|\\
&+\ldots\\
&+\ldots\\
&+|۴-۳|+|۱-۲|\\
&+|۴-۳|+|۲-۱|
\end{aligned}$$

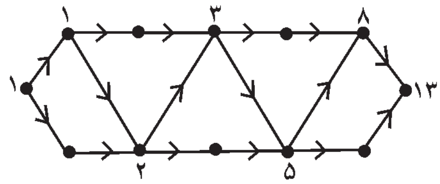
$$\Rightarrow S=۸\times\{|۱-۲|+|۱-۳|+|۱-۴|+|۲-۳|+|۲-۴|+|۳-۴|\}=۸۰$$

۱۹. رشته‌های مورد نظر به سه صورت $۱۰۱۰۱x_۱y_۱$ یا $x_۲y_۲۱۰۱۰۱$ و یا $x_۳۱۰۱۰۱y_۳$ می‌باشند. چون برای هر کدام از x_i و y_iها دو حالت ۰ و ۱ را می‌توانیم اختصاص دهیم پس برای هر کدام از حالات فوق ۴ = ۲ × ۲ رشته می‌توانیم بسازیم که در مجموع ۱۲ رشته می‌شود ولی در یک مورد رشته‌های ساخته شده در دو حالت اول با هم یکی می‌شوند و آن موقعی است که حالت زیر اتفاق بیفتد.

$x_۱y_۱=۰۱$ و $x_۲y_۲=۱۰$

که با کسر این حالت تعداد رشته‌های مورد نظر ۱۱ رشته خواهد بود.

۲۰. تعداد طرق رسیدن به هر نقطه برابر مجموع تعداد طرقی است که به گره‌های قبلاز آن می‌توان رسید. در شکل مقابل تعداد طرق رسیدن به هر نقطه بر روی آن نوشته شده است:



۲۱. مطابق با جدول زیر خانه‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم.

a	b	c	۹	d	e	f	x	g	h	i	۷	j	k

طبق فر داریم:

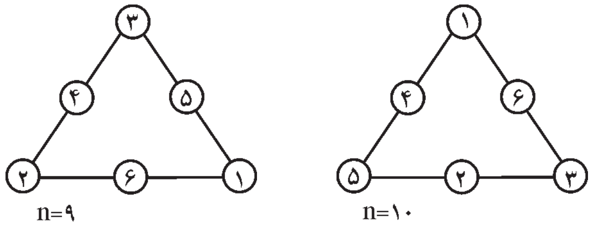
$$\begin{array}{l} h+i+۷=۲۰ \\ g+h+i=۲۰ \end{array} \Rightarrow g=۷$$

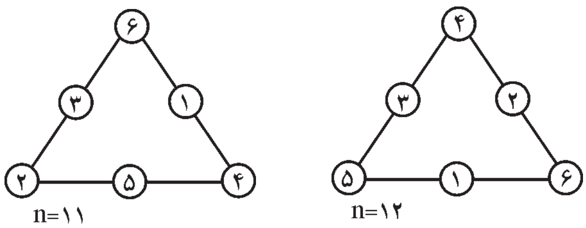
و همچنین

$$\begin{array}{l} ۹+d+e=۲۰ \\ d+e+f=۲۰ \end{array} \Rightarrow f=۹$$

و چون $f+x+g=۲۰$ پس $x=۴$

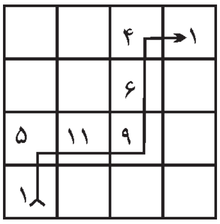
۲۲. n هر کدام از اعداد ۱۲، ۱۱، ۱۰ و ۹ می‌توانند باشند که نمونه‌ای برای هر کدام از آنها در اشکال زیر مشخص است.





۲۳. واضح است که به‌طور متوسط $۱۰۰۰۰ \times \frac{۷۵}{۱۰۰}$ یعنی ۷۵۰۰ بار شرط $A > B$ محقق می‌شود. پس به‌طور متوسط F، ۷۵۰۰ بار محاسبه می‌شود. از ۲۵۰۰ حالت باقیمانده به‌طور متوسط ۵۰ درصد $C > D$ می‌شود. پس به‌طور متوسط $۲۵۰۰ \times \frac{۵۰}{۱۰۰}$ بار یعنی ۱۲۵۰ بار مقدار G محاسبه می‌شود.

۲۴. کوتاه‌ترین مسیر در شکل زیر نشان داده شده است که مجموع اعداد مورد نظر برابر با ۳۷ می‌باشد.



۲۵. خانه‌های جدول را مطابق شکل نامگذاری می‌کنیم. خواهیم داشت:

x	۷	۱۲
۳	a	b
c	d	e

$x + ۳ + c = ۳ + a + b \Rightarrow b - c = x - a$

$a + c + ۱۲ = a + b + ۳ \Rightarrow b - c = ۹ \Rightarrow x - a = ۹$

$a + d + ۷ = x + ۷ + ۱۲ \Rightarrow d = ۱۲ + x - a = ۲۱$

$۳ + a + b = ۷ + a + d \Rightarrow b = ۲۸ - ۳ = ۲۵$

$x + a + c = ۱۲ + b + c \Rightarrow x + a = ۱۲ + ۲۵ = ۳۷$

با مقایسه با تساوی $x - a = ۹$ تساوی‌های $x = ۲۳$ و $a = ۱۴$ حاصل خواهند شد. پس جدول به شکل روبه‌رو خواهد شد.

۲۳	۷	۱۲
۳	۱۴	۲۵
۱۶	۲۱	۵

۲۶. به‌ازای $j = ۱, ۲, \dots, ۱۶$ خواهیم داشت:

$A(۱) = ۰$ $A(۲) = ۱$ $A(۳) = ۳$

$A(۴) = ۲$ $A(۵) = ۶$ $A(۶) = ۷$

$A(۷) = ۵$ $A(۸) = ۴$ $A(۹) = ۱۲$

$A(۱۰) = ۱۳$ $A(۱۱) = ۱۵$ $A(۱۲) = ۱۴$

$A(۱۳) = ۱۰$ $A(۱۴) = ۱۱$ $A(۱۵) = ۹$

$A(۱۶) = ۸$

غلط بودن گزینه‌های الف، د و هواضح است. برای به‌دست آوردن $A(۲^n + ۱)$ تا $A(۲^{n+۱})$ باید مقادیر $A(۱)$ تا $A(۲^n)$ را (نه به‌ترتیب) با مقدار ثابت ۲^n جمع کرد. پس اگر $A(۱)$ تا $A(۲^n)$ عضو تکراری نداشته باشد به استقرا معلوم می‌شود که $A(۲^n + ۱)$ تا $A(۲^{n+۱})$ نیز عضو تکراری نخواهد داشت، ضمن اینکه به‌عنوان مثال از $A(۱)$ تا $A(۸)$ عضو تکراری وجود ندارد (پایهٔ استقراء). پس گزینهٔ ج نیز غلط می‌باشد.

و اما گزینهٔ ب صحیح است. استدلال، مشابه استدلال فوق است چون هر دو عدد متوالی از $A(۱)$ تا $A(۸)$ در مبنای ۲ دقیقاً در یک رقم متفاوت هستند پس اگر آنان را با $۲^۳$ (در مبنای ۲ به‌صورت ۱۰۰۰) جمع کنیم فقط رقم آخر از سمت چپ آنان از صفر به ۱ تغییر خواهند یافت ...

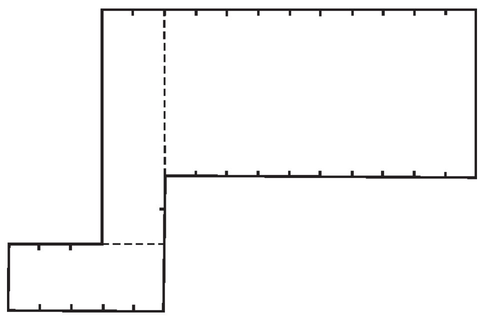
۲۷. از عدد ۰۰۰ تا ۹۹۹ مجموعاً ۳۰۰۰ رقم به کار رفته است چون از هر رقم به تعداد یکسانی به کار رفته است پس از ۰ تا ۹۹۹ مجموعاً $\frac{۳۰۰۰}{۱۰}$ یعنی ۳۰۰ رقم ۱ به کار رفته است به‌همین ترتیب از ۱۰۰۰ تا ۱۹۹۹ به تعداد ۳۰۰+۱۰۰۰ مرتبه رقم ۱ به کار رفته است. از ۲۰۰۰ تا ۲۹۹۹ نیز ۳۰۰ مرتبه رقم ۱ به کار رفته است. پس مجموعاً از ۰ تا ۲۹۹۹ به تعداد ۱۹۰۰ بار رقم ۱ به کار رفته است. از ۳۰۰۰ تا ۳۲۰۰ مجموعاً ۱۴۰ بار رقم ۱ به کار رفته است. پس تعداد صفحات کتاب در همین محدوده قرار دارد.

۲۸. در یک شبکه $m \times n$ برای رفتن از گوشه سمت چپ و پایین به گوشه سمت راست و بالا با شرائط مسأله (جهت حرکت فقط به سمت راست یا بالا) $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ مسیر وجود دارد. زیرا اگر حرکت به سمت بالا را با U و حرکت به سمت راست با R نمایش دهیم تعداد مسیرها برابر با تعداد حالات چیدن m عدد U و n عدد R در پیش همدیگر می‌باشد که برابر با $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ می‌باشد. در این مسأله از C به B مجموعاً $\frac{۱۱!}{۴!۷!}$ مسیر و از A به C مجموعاً $\frac{۳!}{۲!۱!}$ مسیر وجود دارد. همین‌طور تعداد مسیرهای موجود بین C و D برابر با $\frac{۶!}{۲!۴!}$ و تعداد مسیرهای بین D و B برابر با $\frac{۵!}{۲!۳!}$ می‌باشد. لذا تعداد مسیرها با شرائط مسأله برابر خواهد بود با:

$$\frac{۳!}{۲!۱!} \times \left[\frac{۱۱!}{۴!۷!} - \frac{۵!}{۲!۳!} \times \frac{۶!}{۲!۴!}\right] = ۵۴۰$$

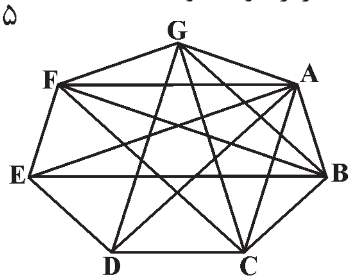
۲۹. باغ به شکل زیر می‌باشد، اگر آن را به سه مستطیل تقسیم کنیم مساحت آن برابر خواهد بود با:

$$۵ \times ۱۰ + ۲ \times ۷ + ۲ \times ۵ = ۷۴$$



۳۰. قطرهای گذرنده، از رأس A را در نظر می‌گیریم. این قطرها بر روی قطرهای BG، BF، BE، GC، GD و CF به‌ترتیب ۴، ۳، ۲، ۳، ۲ و ۲ نقطهٔ تلاقی ایجاد می‌کنند و درنتیجه تعداد مثلث‌های مورد نظر متناظر به رأس A برابر خواهد بود با:

$$\binom{۴}{۲} + \binom{۳}{۲} + \binom{۲}{۲} + \binom{۳}{۲} + \binom{۲}{۲} + \binom{۲}{۲} = ۱۵$$



پس تعداد کل مثلث‌های مورد نظر برابر با ۷ × ۱۵ یعنی ۱۰۵ مثلث خواهد بود.

۳۱. اگر داخلی‌ترین شاخهٔ مارپیچ را x عدد چوب کبریت در نظر بگیریم تعداد کل چوب کبریت‌ها پس از n پیچ برابر خواهد بود با:

$$m = \underset{\text{مرحله اول}}{(x-۱)} + \underset{\text{مرحله دوم}}{(۲+x)} + \underset{\text{مرحله سوم}}{(۳+x+۱)} + \underset{\text{مرحله چهارم}}{(۴+x+۲)} + \ldots + \underset{\text{مرحله nام}}{(n+x+n-۲)}$$

$$\Rightarrow \quad m = nx + n(n-۱) - ۱ \quad \Rightarrow \quad ۸۷ = n(x+n-۱) - ۱ \quad \Rightarrow \quad n(x+n-۱) = ۸۸$$

۸۸ را به سه نوع می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب عوامل مثبتش نوشت:

I. $۸۸ = ۲ \times ۴۴$

II. $۸۸ = ۴ \times ۲۲$

III. $۸۸ = ۸ \times ۱۱$

پس در هر مورد خواهیم داشت:

$$\text{I. } n(x+n-۱)=۲\times۴۴ \Rightarrow n=۲\ ,\ x=۴۳$$

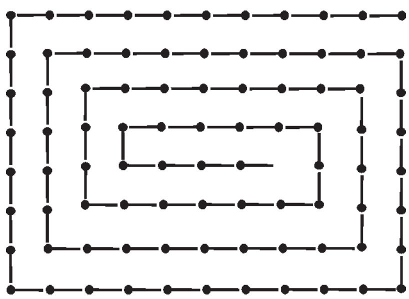
در این حالت مستطیل مورد نظر ۴۳ × ۱ خواهد بود:

$$\text{II. } n(x+n-۱)=۴۴\times۲ \Rightarrow n=۴\ ,\ x=۱۹$$

در این حالت مستطیل مورد نظر ۲۱ × ۳ خواهد بود:

$$\text{III. } n(x+n-۱)=۸\times۱۱ \Rightarrow n=۸\ ,\ x=۴$$

در این حالت مستطیل موردنظر ۱۰ × ۷ خواهد بود که یکی از جواب‌هاست و جواب مورد انتظار مسأله همین حالت بوده است. برای این حالت شکل زیر رسم شده است:



۳۲. ارزش سکه‌ها به‌ترتیب برابر با ۲، ۴، ۱۱ می‌باشند که در بار اول برای تشکیل ۲۸ ریال از هر کدام از دو سکه اول یک عدد و از سکه سوم دو عدد استفاده شده است. در بار دوم برای تشکیل ۲۱ ریال از سکهٔ اول سه عدد و از هر کدام از سکه‌های دیگر یک عدد استفاده شده است.

۳۳. در ابتدا باید ۳ جعبه از ۱۰ جعبه فوق را انتخاب کنیم تا خالی باشند. قرار دادن ۱۰ توپ در هفت جعبه به‌طوری که در هر جعبه حداقل یک توپ باشد برابر با تعداد جواب معادلهٔ:
$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵+x_۶+x_۷=۱۰$ در مجموعه اعداد طبیعی می‌باشد که برابر است با $\binom{۹}{۶}$. پس تعداد حالات مطلوب برابر با $\binom{۱۰}{۳}\binom{۹}{۶}$ می‌باشد که حاصل آن با $\binom{۹}{۳}$ **!۵** مساوی است.

۳۴. تعداد سیب‌ها در هر کدام از سبدها را در مرحلهٔ اول k می‌گیریم. اگر تعداد سیب‌ها در هر کدام از سبدها را در انتها برابر با x، $\frac{x}{۲}$ و $\frac{x}{۳}$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$x+\frac{x}{۲}+\frac{x}{۳}=۳k \Rightarrow ۱۱x=۱۸x$$

کمترین مقداری که x و k به خود می‌پذیرند به‌ترتیب برابر با ۱۸ و ۱۱ می‌باشد. یعنی در ابتدا تعداد سیب‌ها در هر کدام از سبدها برابر با ۱۱ بوده است. بدیهی است که غیر از این حالت جواب دیگری وجود ندارد چرا که اختلاف k و x حداکثر باید ۷ باشد (چون بعد از سه مرحله به تعداد سیب‌های یک سبد حداکثر ۷ سیب اضافه شده است) در صورتی که اگر $x > ۱۸$ باشد در این صورت اختلاف x و k بیشتر از ۷ می‌شود.

۳۵. در هر مرحله مقدار ثبات را می‌نویسیم:

$۱)\ ? = b$ $\quad$ $۲)\ ? = bc$ $\quad$ $۳)\ t_۱ = bc$

$۴)\ ? = bc + a$ $\quad$ $۵)\ t_۲ = bc + a$ $\quad$ $۶)\ ? = (bc + a)^۲$

$۷)\ ? = (bc + a)^۲ + bc$ $\quad$ $۸)\ z = (bc + a)^۲ + bc$

۳۶. در هر مرحله مقدار ثبات را می‌نویسیم:

$۱)\ ? = a$ $\quad$ $۲)\ ? = a + b$ $\quad$ $۳)\ x = a + b$

$۴)\ ? = (a + b)^۲$ $\quad$ $۵)\ z = (a + b)^۲$ $\quad$ $۶)\ ? = (a + b)^۲ + (a + b)$

$۷)\ ? = a(a + b)^۲ + a(a + b)$

$۸)\ ? = [a(a + b)^۲ + a(a + b)](a + b)^۲ = a(a + b)^۴ + a(a + b)^۳$

۳۷. در میان اعداد یک رقمی فقط عدد ۱ چنین خاصیتی را دارد که نمایش صفرشماری آن ۰ می‌باشد. در میان اعداد دو رقمی اعداد ۰۱ و ۱۰ چنین خاصیتی را دارند که نمایش صفرشماری آنان به‌ترتیب برابر با ۱۰ و ۰۱ می‌باشند. در میان اعداد سه رقمی اعداد ۰۰۱، ۰۱۰، ۱۰۰ چنین خاصیتی را دارند که نمایش صفرشماری آنان به‌ترتیب برابر با ۱۱۰، ۱۰۱ و ۰۱۱ می‌باشند.

پس در مجموع ۶ عدد دارای خاصیت مورد اشاره می‌باشد.

۳۸. تمام اعدادی که از n صفر و یک ۱ تشکیل شده باشند چنین خاصیتی را دارند پس ∞ عدد با خاصیت مورد نظر وجود دارد.

۳۹. خروجی برنامه بعد از مرحلهٔ ۱.۱.۱ ـ و خروجی نهایی برای i = ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ در جدول زیر آمده است:

	A(۱)	A(۲)	A(۳)	A(۴)	A(۵)	A(۶)
	۱	۲	۳	۴	۵	۶
i = ۱	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	۲	۳	۴	۵	۶	۱
i = ۲	۲	۳	۱	۵	۶	۴
	۳	۲	۵	۶	۴	۱
i = ۳	۳	۲	۱	۶	۴	۵
	۳	۲	۶	۴	۵	۱
i = ۴	۳	۲	۱	۴	۵	۶
	۳	۲	۴	۵	۶	۱
i = ۵	۳	۲	۱	۵	۶	۴
	۳	۲	۵	۶	۴	۱
i = ۶	۳	۲	۱	۶	۴	۵
	۳	۲	۶	۴	۵	۱

همان‌طور که مشاهده می‌شود خروجی برنامه به‌ازای i = ۲ و i = ۵ با یکدیگر، و همچنین خروجی برنامه به‌ازای i = ۳ و i = ۶ نیز با یکدیگر برابر می‌شوند. یعنی خروجی برنامه برای i = ۳k (k ≥ ۲) همان خروجی برنامه به‌ازای i = ۳ و خروجی برنامه برای i = ۳k + ۱ (k ≥ ۲) همان خروجی برنامه به‌ازای i = ۴ و بالاخره خروجی برنامه برای i = ۳k + ۲ (k ≥ ۱) همان خروجی برنامه به‌ازای i = ۲ می‌باشد و چون ۱۳۷۵ = ۳k + ۱ پس خروجی برنامه به‌ازای i = ۱۳۷۵ همان خروجی برنامه به‌ازای i = ۴ می‌باشد، فلذا عدد ۶ در خانهٔ پنجم قرار دارد.

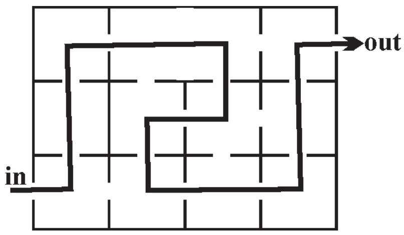
۴۰. گزینهٔ الف درست است، زیرا a و b هر دو متقارن هستند. اگر S متقارن باشد، آنگاه $S' = aSa$ و یا $S' = bSb$ نیز متقارن خواهد بود.

گزینهٔ ب نادرست است زیرا aaa رشتهٔ مخصوص است و تفاوت تعداد a ها با تعداد b ها برابر با ۱ نیست.

گزینهٔ ج نادرست است. به‌عنوان مثال‌های نقض می‌توان به رشته‌های مخصوص baaab و babab اشاره کرد که هیچ‌کدام به‌صورت waw یا wbw نیستند.

پس معلوم می‌شود که در نهایت گزینهٔ «الف» درست است.

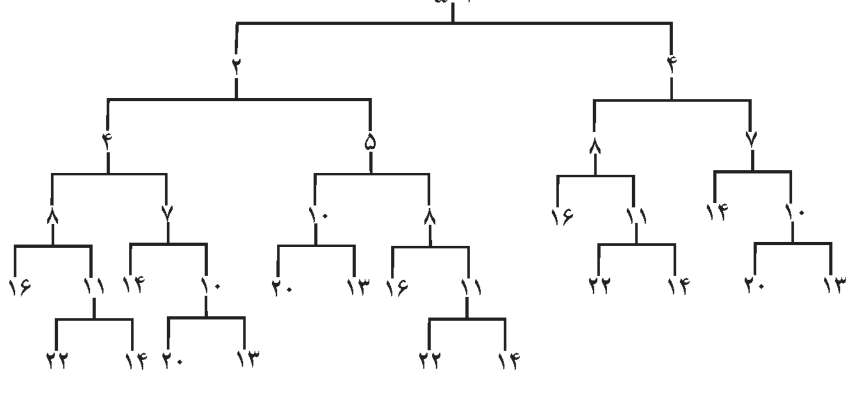
۴۱. مسیر مورد نظر در شکل زیر مشخص است.



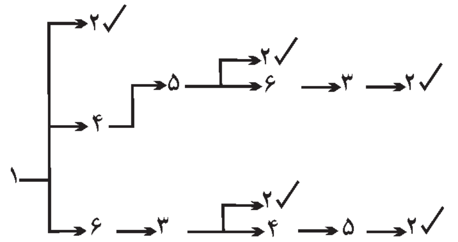
۴۲. اگر یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد آنگاه هر چهار نفر A، B، C و D اظهار نظر درستی کرده‌اند.

حالت اول	حالت دوم
x: راستگو	x: دروغگو
y: دروغگو	y: راستگو
z: راستگو	z: دروغگو
w: دروغگو	w: راستگو

۴۳. نمودار زیر را به‌ازای $a = ۱$ رسم می‌کنیم هرکجا خروجی بزرگتر از ۱۲ شد آن شاخه را ادامه نمی‌دهیم:

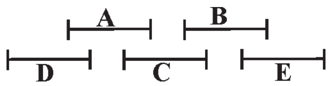


۴۴. در نمودار زیر جواب مشخص است:



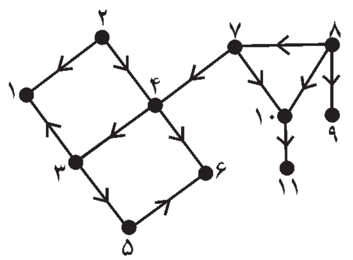
۴۵. اگر a یا b در ضلع x همسایه باشد بدیهی است که در شمارش تعداد اضلاعی که باعث همسایگی دو خانه شده‌اند اضلاعی مانند x دوبار حساب می‌شوند. پس اگر تعداد کل اضلاع ۷ خانه را که باعث همسایگی آنان با خانه‌های علامت‌گذاری شدهٔ دیگر شده‌اند را بشماریم باید زوج باشد. پس هر کدام از ۷ خانه نمی‌تواند با تعداد فردی از خانه‌های علامت‌گذاری شده همسایه باشد. زیرا تعداد ۷ تا عدد فرد هرگز زوج نمی‌شود.

۴۶. شکل زیر نمودار ساعت کاری آن پنج نفر را نشان می‌دهد:

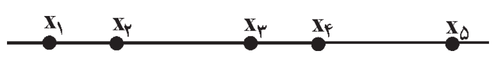


۴۷. کارها را مطابق شکل از ۱ تا ۱۱ شماره گذاری می‌کنیم و در هر ساعت کاری که هر کدام از دو نفر باید انجام بدهند را مشخص می‌کنیم:

نفر دوم	نفر اول	
۸	۲	: ساعت اول
۹	۷	: ساعت دوم
۴	۱۰	: ساعت سوم
۳	۱۱	: ساعت چهارم
۱	۵	: ساعت پنجم
	۶	: ساعت ششم



۴۸. نقاط را از چپ به راست $x_{۱}$، $x_{۲}$، $x_{۳}$، $x_{۴}$ و $x_{۵}$ می‌نامیم. در این صورت مجموع دوبه‌دوی آنها برابر خواهد بود با:



$$(i\neq j)\ \sum_{ij} x_i x_j = ۴x_{۱}x_{۲}+۶x_{۲}x_{۳}+۶x_{۳}x_{۴}+۴x_{۴}x_{۵}$$

$$= ۲(۲x_{۱}x_{۲}+۳x_{۲}x_{۳}+۳x_{۳}x_{۴}+۲x_{۴}x_{۵}) = ۱+۲+۲+۳+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹=۴۷$$

در تساوی فوق سمت راست عددی فرد و سمت چپ عددی زوج است. پس تساوی هرگز برقرار نیست.

۴۹. اعداد از صفر تا ۱۲۷ در مبنای ۲ به‌صورت ۰۰۰۰۰۰۰ تا ۱۱۱۱۱۱۱ نمایش داده می‌شوند. به‌جای نوشتن این ۱۲۸ عدد به‌ترتیب صعودی، کافی است آنان را چنان نوشت که هر دو عدد متوالی دقیقاً در یک رقم متفاوت باشند. در این صورت اگر اعداد به‌دست آمده یک در میان در یک رقم متفاوت باشند در این صورت اگر اعداد به‌دست آمده یک در میان در یک دسته و باقیمانده اعداد را در دسته دیگر قرار دهیم مسلم است که در یک دسته هیچ دو عدد پیدا نمی‌شود که دقیقاً در یک رقم با هم تفاوت داشته باشند. یا به طریق دیگر می‌توان مسأله را بیان کرد به این صورت که اعدادی که دارای تعداد زوجی «۱» هستند را در یک دسته و اعدادی که دارای تعداد فردی «۱» هستند را در دسته دیگر قرار می‌دهیم. بدیهی است که در یک دسته هرگز دو عدد نمی‌توان یافت که دقیقاً در یک رقم با هم تفاوت داشته باشند. زیرا چنین دو عددی در تعداد یک‌هایشان فقط یک واحد اختلاف دارند.

۵۰. اگر جدول اتمام بازی‌ها به شکل مقابل باشد بدیهی است که B قهرمان می‌شود. (تیم‌های نوشته شده در جدول یعنی تلاقی یک سطر با ستون نشانگر تیم برندهٔ آن بازی است و «ـ» نشانگر آن است که در بازی آن سطر و ستون برنده و بازنده‌ای وجود ندارد و نتیجه بازی تساوی است.)

	A	B	C	D	E	امتیاز
A		A	A	D	E	۲
B	A		B	—	B	۲/۵
C	A	B		C	C	۲
D	D	—	C		—	۲
E	E	B	C	—		۱/۵

۵۱. تعداد حالاتی که در بازی A حداقل یک بار ۱ بیاید برابر است با:

تعداد حالاتی که دوبار یک بیاید + تعداد حالاتی که دقیقاً یک بار یک بیاید:

$$= \binom{۲}{۱}\binom{۵}{۱} + ۱ = ۱۱$$

پس احتمال برد در بازی A برابر $\frac{۱۱}{۶^۲}$ می‌باشد.

تعداد حالاتی که در بازی B حداقل دوبار ۱ بیاید برابر است با:

تعداد حالاتی که چهار بار یک بیاید + تعداد حالاتی که دقیقاً سه بار یک بیاید + تعداد حالاتی که دقیقاً ۲ بار یک بیاید:

$$\left[\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}\times ۲\right] + \binom{۴}{۳}\binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۴}\binom{۵}{۰} = ۱۶۳$$

پس احتمال برد در بازی B برابر $\frac{۱۶۳}{۶^۴}$ می‌باشد.

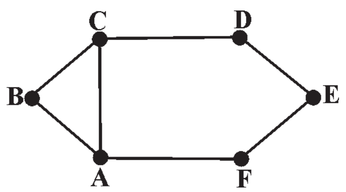
چون $\frac{۱۱}{۶^۲} > \frac{۱۶۳}{۶^۴}$ پس احتمال برد در بازی A بیشتر است.

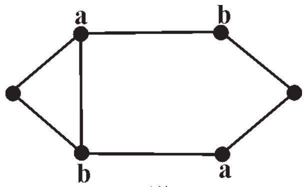
۵۲. حداکثر ۱۰ مجموعه با خاصیت مورد نظر می‌توان پیدا کرد (زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یا زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه).

۵۳. زیرا قسمت آخر (پنجم) مسیر مورد نظر باید آبی بوده و به D ختم شود که تنها مسیر CD می‌باشد. قسمت ماقبل آخر (چهارم) مسیر مورد نظر باید قرمز بوده و به C ختم شود که تنها مسیر DC این خاصیت را دارد و اما هیچ مسیر جدیدی (آبی‌رنگ) وجود ندارد که به D ختم شده باشد.

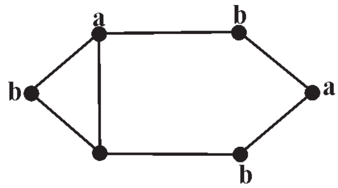
تذکر، اگر مجاز باشیم از یک خط دو بار عبور کنیم آنگاه جواب این مسأله مثبت است و مسیر مورد نظر به صورت زیر می‌باشد: $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow C \longrightarrow D$

۵۴. معلوم است که در هر حال از سه رأس A، B و C دقیقاً دو رأس و از سه رأس D، E و F حداقل دو رأس قابل رنگ کردن می‌باشند؛ یعنی بازی یا بعد از رنگ کردن رأس چهارم پایان می‌پذیرد و یا بعد از رنگ کردن رأس پنجم، که به‌ترتیب دو شکل الف و ب به‌دست می‌آید:





«الف»



«ب»

(در حالت الف اگر به جای دو رأس A و C، دو رأس A و B و یا دو رأس B و C رنگ شوند نیز بحث عوض نمی‌شود.)

در حالت الف نفر دوم و در حالت ب نفر اول برنده می‌شود، بنابراین اگر نفر دوم کار می‌کند که رنگ دو رأس D و F متفاوت باشند، آنگاه نفر دوم برنده خواهد شد.

۵۵. بازیکن اول در ابتدا یک سنگریزه بر می‌دارد و سنگریزه‌های باقیمانده ۱۵ عدد می‌شوند. اگر بازیکن دوم i سنگریزه و بازیکن سوم j سنگریزه بردارند $(۱ \le i, j \le ۲)$ بازیکن اول $۵ - (i+j)$ سنگریزه بر می‌دارد $(۱ \le ۵ - (i+j) \le ۳)$. اگر همین رویه را بازیکن اول ادامه دهد در انتهای بازی برنده می‌شود.

۵۶. اعدادی که در زیر هم نوشته شده‌اند متناظر می‌نامیم. پس مجموعاً پنج جفت عدد متناظر داریم. از پنج جفت عدد موجود، تعداد جفت‌هایی که یکی از اعضائشان فرد و یکی از اعضائشان زوج می‌باشد زوج است. پس مجموع قدرمطلق تفاضل هایشان زوج می‌باشد (چون مجموع تعداد زوجی از اعداد فرد، زوج می‌شود) مجموع قدرمطلق تفاضل‌های بقیهٔ جفت اعداد نیز زوج می‌باشد. پس مجموع مورد نظر همیشه زوج است.

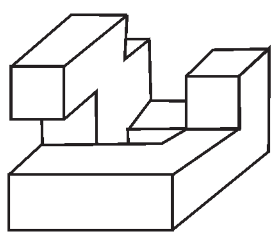
۵۷. اگر در دو خانهٔ متوالی عدد یکسانی، شد آنگاه حاصل‌ضرب آن دو عدد متوالی مربع کامل خواهد شد، بنابراین در هر دو خانه متوالی دو عدد متمایز وجود دارد. به همین ترتیب در هر چهار خانه متوالی نمی‌توان دقیقاً دو عدد چید، زیرا در این صورت از هر یک دقیقاً دو تا وجود دارد (اگر از یکی سه تا و از دیگری یک عدد، باشد آنگاه حداقل دو تا از آن سه تایی مجاور هم خواند شد که خلاف حالت قبل است.) که حاصل‌ضربشان مربع کامل می‌شود. پس معلوم می‌شود در هر چهار خانه متوالی هر سه عدد به کار رفته‌اند. بنابراین در ۸ خانه اول ۳ تا a، ۳ تا b و ۲ تا c به کار رفته است (a، b و c همان اعداد ۲، ۳ و ۵ می‌باشند ولی نه لزوماً به همان ترتیب) معلوم است که یکی از cها در یکی از چهار خانه اول قرار دارد بنابراین با توجه به این که در هر چهارخانه متوالی c وجود دارد:

I) اگر c در خانه اول و یا دوم باشد آنگاه در یکی از خانه‌های هفتم و هشتم a و در دیگری b وجود دارد که با حذف آن دو، حاصل‌ضرب اعداد موجود در ۶ خانه اول مربع کامل خواهد شد.

II) اگر c در خانه سوم باشد، آنگاه با حذف دو خانه اول و دوم یکی از آنها a را شامل است و دیگری b را، حاصل‌ضرب اعداد موجود در ۶ خانه سوم تا هشتم مربع کامل خواهد شد.

با توجه به حالت‌بندی‌های فوق توزیع اعداد با شرایط داده شده حتی در ۸ خانه متوالی نیز ناممکن است.

۵۸. حجم مورد نظر مطابق شکل زیر می‌باشد.



۵۹. اگر سکه‌ها را از سمت چپ به‌ترتیب A، B، C، D، E، F، G و H نشان دهیم، ترتیب حرکات به شرح زیر می‌باشد:

A B C D E F G H

ابتدا D بر روی G قرار می‌گیرد. سپس F بر روی B قرار می‌گیرد (چون D از جای خودش حذف شده است). در حرکت سوم E بر روی H قرار می‌گیرد. (با عبور کردن از روی دو سکهٔ G و D) و در نهایت C با عبور کردن از روی دو سکهٔ B و F بر روی A قرار می‌گیرد.

۶۰. از ظرف مجموعاً ۱۲ مداد برداشته شده است پس باید معادلهٔ ۱۲ = ۴x + ۲y + z را حل کنیم که در آن x، y و z هر کدام برابر با یکی از اعداد ۱، ۲ و ۳ می‌باشند. بدیهی است که z باید زوج باشد. پس ۲ = z. و از آن‌جا خواهیم داشت ۵ = ۲x + y که جواب منحصر به فرد ۳ = y و ۱ = x را داراست. آن که دو مداد در اختیار دارد (b) از درون ظرف به همان تعدادی که مداد در دست دارد برداشته است پس شیء الف را در اختیار دارد. آن که سه مداد در اختیار دارد (c) دو برابر تعداد مدادهای موجود در دستش را از ظرف برداشته است پس شیء ب را در اختیار دارد. و بالاخره a شیء ج را در اختیار دارد.