پاسخ تشریحی

ششمین المپیاد کامپیوتر

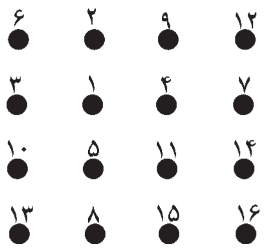
۱. در هر مرحله حداکثر وضعیت سه گلوله از نظر سبک بودن مشخص شده و از جمع گلوله‌ها خارج می‌شوند. مراحل اول، دوم، سوم و چهارم از هر سه ترازو استفاده کرده و در هر مرحله ۳ گلوله سبک توسط سه ترازو شناسایی شده و از مجموع گلوله‌ها حذف می‌شوند پس در این چهار مرحله مجموعاً ۱۲ گلوله از مجموع گلوله‌ها حذف می‌شوند. پس تا انتهای این مرحله ۳ گلوله باقی است. در یک مرحله از یک ترازو استفاده کرده و یک گلوله سبک دیگر را شناسایی می‌کنیم. و بالاخره در مرحلهٔ آخر از دو گلولهٔ باقی‌مانده سبکترین و سنگین‌ترین آنها را با یک بار وزن کردن مشخص می‌کنیم. پس برای این کار مجموعاً ۶ مرحله نیاز است.

۲. در انتهای ثانیه‌های اول، دوم و سوم به‌ترتیب حداکثر ۲، ۴ و ۸ کامپیوتر می‌توانند فایل اطلاعاتی جدید را دارا باشند. پس برای اینکه همهٔ کامپیوترها، فایل اطلاعاتی جدید را دارا باشند حداقل ۴ ثانیه وقت لازم است. ثابت می‌کنیم در ۴ ثانیه این کار عملی است. برای این منظور فایل اطلاعاتی جدید را بر روی کامپیوتر A_1 فرض می‌کنیم. این فایل در انتهای ثانیه‌های اول تا چهارم به‌ترتیب ذیل منتقل خواهند شد:

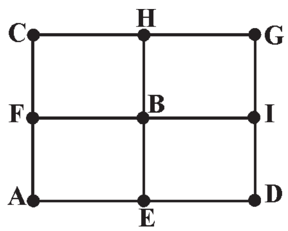
ثانیهٔ اول	ثانیهٔ دوم	ثانیهٔ سوم	ثانیهٔ سوم
$A_1 \longrightarrow A_2$	$A_1 \longrightarrow A_3$	$A_1 \longrightarrow A_4$	$A_1 \longrightarrow A_5$
	$A_2 \longrightarrow A_9$	$A_2 \longrightarrow A_6$	$A_2 \longrightarrow A_8$
		$A_3 \longrightarrow A_{10}$	$A_3 \longrightarrow A_7$
		$A_9 \longrightarrow A_{12}$	$A_9 \longrightarrow A_{15}$
			$A_4 \longrightarrow A_{11}$
			$A_6 \longrightarrow A_{13}$
			$A_{10} \longrightarrow A_{14}$
			$A_{12} \longrightarrow A_{16}$

منبع: المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)، تألیف رسول حاجی زاده، انتشارات دانش پژوه، ۱۳۸۵

A_1 می‌تواند هر کدام از کامپیوترهای موجود باشد. به‌عنوان مثال یک نمونه از شماره‌گذاری کامپیوترها در مقابل آمده است:



۳. در حالت کلی قابل اثبات است که اگر $a_p\, a_{p-۱} \ldots a_۰$ نمایش عدد a در مبنای n باشد، آنگاه عدد a بر $n+۱$ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر مقدار $\ldots - a_۰ - a_۱ + a_۲$ بر $n+۱$ بخش‌پذیر باشد. کافی است بسط عدد در مبنای n را بنویسید.



۴. با توجه به اطلاعات مسأله، نامگذاری شهرها به شکل زیر می‌باشد و در نتیجه شهری که با ستاره مشخص شده است A می‌باشد.

۵. اگر مقادیر متغیرهای A و B را در ابتدا به‌ترتیب α و β بنامیم، مقادیر A و B بعد از اجرای برنامه‌های ب، ج و د به‌ترتیب به‌صورت: «β، $\alpha - ۲\beta$»، «$۲\alpha + \beta$ ، α» و «β، β» خواهد شد.

۶. در اجرای این پروژه یا هیچ گروه دو نفره‌ای وجود ندارد و یا یک گروه دو نفره، یا دو گروه دو نفره، و یا سه گروه دو نفره وجود دارد پس تعداد حالات ممکن عبارتند از:

$$\binom{۶}{۰} + \binom{۶}{۲} + \binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲} \div ۲! + \binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲} \div ۳! = ۱+۱۵+۴۵+۱۵=۷۶$$

۷. با توجه به اینکه امسال (سال برگزاری این دوره المپیاد) ۱۳۷۵ می‌باشد، پس سال تولد محمد ۱۳۵۸ می‌باشد که سن او برابر با ۱۷ و مجموع ۸ + ۵ + ۳ + ۱ نیز ۱۷ می‌باشد.

۸. حداکثر امتیاز موقعی است که تیم اول همهٔ ۹ تیم را ببرد. در این صورت مجموع امتیازات این تیم برابر با ۱۸ امتیاز می‌شود. برای اینکه اختلاف امتیاز تیم اول با تیم دوم حداکثر باشد باید تیم دوم با بقیه ۸ تیم مساوی کرده باشد در این‌صورت تیم دوم دارای ۸ امتیاز است. پس اختلاف مورد نظر حداکثر ۱۰ امتیاز می‌باشد.

۹. گزینه‌های الف، ب، ج و د را می‌توان به‌دست آورد. مراحل به‌دست آوردن هر کدام از رشته‌ها عبارتند از:

۱) abcdef $\xrightarrow{۲}$ daebfc $\xrightarrow{۱}$ dbafec

۲) abcdef $\xrightarrow{۱}$ adbecf $\xrightarrow{۱}$ aedcbf $\xrightarrow{۲}$ cabefd $\xrightarrow{۱}$ ceafbd $\xrightarrow{۲}$ fcbeda

۳) abcdef $\xrightarrow{۱}$ adbecf $\xrightarrow{۱}$ aedcbf $\xrightarrow{۲}$ cabefd

۴) abcdef $\xrightarrow{۱}$ adbecf $\xrightarrow{۲}$ eacdfb $\xrightarrow{۱}$ edafcb $\xrightarrow{۱}$ efdcab

گزینهٔ ه را با استفاده از دو عمل فوق نمی‌توان به‌دست آورد.

۱۰. از بین ۱۰ رقم موجود، سه‌تایی‌هایی که مجموع آنها برابر با ۱۵ باشد عبارتند از:

۱) (۰ , ۶ , ۹)	۲) (۰ , ۷ , ۸)	۳) (۱ , ۵ , ۹)	۴) (۱ , ۶ , ۸)	۵) (۱ , ۷ , ۷)
۶) (۲ , ۴ , ۹)	۷) (۲ , ۵ , ۸)	۸) (۲ , ۶ , ۷)	۹) (۳ , ۳ , ۹)	۱۰) (۳ , ۴ , ۸)
۱۱) (۳ , ۵ , ۷)	۱۲) (۳ , ۶ , ۶)	۱۳) (۴ , ۴ , ۷)	۱۴) (۴ , ۵ , ۶)	۱۵) (۵ , ۵ , ۵)

در هر کدام از ۱۵ حالت فوق تعداد اعداد سه رقمی به‌ترتیب عبارتند از ۴، ۴، ۶، ۶، ۳، ۶، ۶، ۶، ۳، ۶، ۶، ۳، ۳، ۶ و ۱. پس مجموعاً ۶۹ عدد موجود است. روش دوم برای حل این مسأله آن است که تعداد جواب‌های صحیح معادله مشروط $x_1+x_2+x_3=۱۵$ با شروط $۰ \le x_3 \le ۹$ ، $۰ \le x_2 \le ۹$ و $۱ \le x_1 \le ۹$ را به‌دست آوریم که برابر با ۶۹ می‌شود.

۱۱.
$$A(۱ , y) = A(۰ + ۱ , (y - ۱) + ۱) = A(۰ , A(۱ , y - ۱)) = A(۱ , y - ۱) + ۱$$

در تساوی‌های فوق ابتدا از فرض سوم و سپس از فرض اول استفاده شده است. به استقرا ثابت می‌شود که:
$$A(۱ , y) = A(۱ , ۰) + y$$

و اما با توجه به فرض دوم مسأله، $A(۱ , ۰)$ به شکل زیر به‌دست می‌آید:
$$A(۱ , ۰) = A(۰ + ۱ , ۰) = A(۰ , ۱) = ۱ + ۱ = ۲$$

پس:
$$A(۱ , y) = ۲ + y$$

۱۲. در ابتدا ۹ رقم (اعداد یک رقمی)، سپس ۱۸۰ رقم (اعداد دو رقمی) نوشته می‌شوند. پس تا قبل از نوشته شدن اولین عدد سه رقمی مجموعاً ۱۸۹ رقم نوشته شده است. پس از اعداد سه رقمی مجموعاً باید ۱۸۹ـ۱۳۷۵ یعنی ۱۱۸۶ رقم نوشته شود. خارج‌قسمت تقسیم ۱۱۸۶ بر ۳ برابر ۳۹۵ می‌باشد. پس به تعداد ۳۹۵ عدد سه رقمی یعنی از ۱۰۰ تا ۴۹۴ را نیز می‌نویسیم. در این حال مجموعاً ۳×۳۹۵+۱۸۹ یعنی ۱۳۷۴ رقم به کار رفته است. پس ۱۳۷۵ امین رقم ۴ می‌باشد (رقم صدگان عدد ۴۹۵).

۱۳. در ابتدا باید توجه داشت که قایق بدون راننده نمی‌تواند باشد. در هر رفت حداکثر ۲ نفر به سمت دیگر رودخانه رفته و حداقل یک نفر به سمت اول رودخانه برمی‌گردد. پس در هر رفت و برگشت حداکثر یک نفر از سمت اول رودخانه به سمت دیگر رودخانه منتقل می‌شود. ۱۵۰ نفر که وزن آنها ۵۰کیلوگرم می‌باشد را در نظر می‌گیریم. شخص A از این گروه را راننده فرض می‌کنیم. A باید ۱۴۹ نفر را در ۱۴۹ مرحله (مجموعاً ۲۹۸ حرکت) به سمت دیگر رودخانه ببرد و برای بردن ۲۰ نفر دیگر به سمت اول رودخانه برگردد. A در سمت اول رودخانه پیاده می‌شود و یکی از افراد مجموعهٔ ۲۰ نفری که وزن هر کدام از آنها ۱۰۰کیلوگرم است به سمت دیگر رودخانه می‌رود و یکی از افراد ۵۰کیلوگرمی قایق را به سمت اول رودخانه برمی‌گرداند او نیز پیاده شده و یکی دیگر از افراد ۱۰۰کیلوگرمی به سمت دیگر رودخانه منتقل می‌شوند و به همین ترتیب همهٔ این ۲۰ نفر به سمت دیگر رودخانه منتقل می‌شود و ۲۰ نفر از افراد ۵۰ کیلوگرمی به سمت اول رودخانه برمی‌گردند (با شمردن شخص A مجموعاً ۲۱ نفر در سمت اول رودخانه موجودند). پس تا حالا ۴۰ + ۲۹۸ یعنی ۳۳۸ حرکت انجام گرفته است. باز شخص A، ۲۰ نفر موجود در سمت اول رودخانه را در ۳۹ حرکت به سمت دیگر رودخانه منتقل می‌کند (بار آخر خود در سمت مقصد پیاده شده و لازم نیست که قایق به سمت اول رودخانه برگردد). پس مجموعاً قایق ۳۹ + ۳۳۸ یعنی ۳۷۷ بار عرض رودخانه را طی کرده است. که متأسفانه هیچ کدام از گزینه‌ها جواب صحیح نمی‌باشند.

۱۴. از چهار رأس این چهارضلعی یا هیچ‌کدام از رئوس بر روی قطر قرار ندارند و یا یک یا دو رأس از آن بر روی قطر قرار دارند. پس تعداد چهارضلعی‌های مورد نظر عبارتند از:

$$\binom{۵}{۰}\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۲}=۵+۵۰+۱۰۰=۱۵۵$$

۱۵. اگر وجه بالایی را a و وجه پایین را b و چهار وجه عمودی را c، d، e و f بنامیم آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l} a+c+d=۱۰ \\ a+e+f=۱۴ \end{array} \Rightarrow ۲a+c+d+e+f=۲۴$$

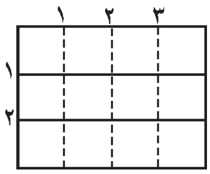
از طرف دیگر می‌دانیم:

$$a+b+c+d+e+f=۲۱$$

پس $a-b=۳$. اما با توجه به شکل، ۶ با ۱ و ۳ با ۴ و ۵ با ۲ در مقابل یکدیگر قرار دارند. پس در وجه بالایی عدد ۵ و در وجه پایینی عدد ۲ نوشته شده است.

۱۶. برنامهٔ داده شده مجموع $۱۳۷۵^۲ + ... + ۳^۲ + ۲^۲ + ۱^۲ + ۰$ را حساب می‌کند. مجموع فوق برابر $\frac{۲۷۵۱\times۱۳۷۶\times۱۳۷۵}{۶}$ یعنی $۹۱۷\times۶۶۸\times۱۳۷۵$ می‌باشد که رقم یکان آن صفر می‌باشد که متأسفانه هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

۱۷. در هر صورت A می‌تواند برنده شود. خطوط تکه کاغذ را به شکل زیر شماره‌گذاری می‌کنیم. اگر B شروع‌کننده باشد به ناچار از یکی از سطرها ۱ یا ۲ کاغذ را به دو تکه تقسیم می‌کند. فرض می‌کنیم این شخص سطر ۱ را برش داده و تکه کاغذ را به دو تکه a (قسمت بالایی) و b (قسمت پایینی) تقسیم کند. در این صورت شخص A از یکی از ستون‌های ۱ و یا ۳ تکه a، آن را به دو تکه تقسیم می‌کند. B ناچاراً سطر ۲ از تکهٔ b را برش می‌دهد و بازنده می‌شود زیرا چیزی برای برش دادن برای مرحلهٔ بعد برای او باقی نمی‌ماند.



اگر A شروع‌کننده باشد ابتدا او تکه کاغذ را از ستون ۲ برش می‌دهد. B یکی از دو تکه را از سطر ۱ یا ۲ به دو تکه تقسیم می‌کند. شخص A تکهٔ کوچکتر را انتخاب کرده و آن را به دو قسمت تقسیم می‌کند. شخص B در نوبت خود سه بار دیگر می‌تواند تکه کاغذها را برش دهد و چیزی برای برش برای او باقی نخواهد ماند در صورتی که در هر مرحله برای شخص A تکه کاغذ برای برش افزایش پیدا می‌کند.

۱۸. چهار نفری که در گوشه‌ها نشسته‌اند با ۲ نفر دست می‌دهند. تمام افرادی که در کناره‌ها نشسته‌اند (غیر از افراد گوشه‌ای) با ۳ نفر دست می‌دهند و بقیهٔ افراد با ۴ نفر دست می‌دهند. پس:

$$\frac{۴\times۲+[(m-۲)+(m-۲)+(n-۲)+(n-۲)]\times۳+(n-۲)(m-۲)\times۴}{۲}=۱۴۸$$

$\Rightarrow$ ۲mn - m - n = ۱۴۸ $\Rightarrow$ (۲n - ۱)(۲m - ۱) = ۲۹۷

این معادله در مجموعه اعداد طبیعی سه دسته جواب دارد: (۵۰ , ۲)، (۱۷ , ۵) و (۱۴ , ۶).

چون مجموع دانش‌آموزان برابر با mn می‌باشد پس مجموع دانش‌آموزان یکی از اعداد ۱۰۰، ۸۵ و ۸۴ می‌باشد. با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ ج صحیح است.

۱۹.

$(B \wedge \sim D) \vee (\sim C \wedge D)$

$\equiv [B \vee (\sim C \wedge D)] \wedge [\sim D \vee (\sim C \wedge D)]$

$\equiv [(B \vee \sim C) \wedge (B \vee D) \wedge (\sim D \vee \sim C) \wedge (\sim D \vee D)]$

$\equiv (B \vee \sim C) \wedge (\sim D \vee \sim C) \wedge (B \vee D)$

$\equiv [\sim C \vee (B \wedge \sim D)] \wedge (B \vee D)$

$\equiv [\sim C \wedge (B \vee D)] \vee [(B \wedge \sim D) \wedge (B \vee D)]$

$\equiv [\sim C \wedge (B \vee D)] \vee [\sim D \wedge B \wedge (B \vee D)]$

$\equiv [\sim C \wedge (B \vee D)] \vee (\sim D \wedge B) \vee F$ قانون جذب:

$\equiv [\sim C \wedge (B \vee D)] \vee [(\sim D \wedge B) \vee (\sim D \wedge D)]$

$\equiv [\sim C \wedge (B \vee D)] \vee [\sim D \wedge (B \vee D)]$

$\equiv (B \vee D) \wedge (\sim C \vee \sim D)$

۲۰. به‌ازای i = ۱ خروجی الگوریتم به‌صورت زیر می‌باشد:

۱۹۹۶ , ۱ , ۲ , ... , ۱۹۹۵

به‌ازای i = ۲ خروجی الگوریتم به‌صورت زیر می‌باشد:

۱۹۹۵ , ۱۹۹۶ , ۱ , ۲ , ... , ۱۹۹۴

به‌ازای i = ۳ خروجی الگوریتم به‌صورت زیر می‌باشد:

۱۹۹۴ , ۱۹۹۵ , ۱۹۹۶ , ۱ , ۲ , ... , ۱۹۹۳

و بالاخره به‌ازای i = ۱۳۷۵ خروجی الگوریتم به‌صورت زیر می‌باشد:

۶۲۲ , ۶۲۳ , ... , ۱۹۹۵ , ۱۹۹۶ , ۱ , ۲ , ... , ۶۲۱

پس مقدار درایهٔ اول برابر با ۶۲۲ می‌باشد.

۲۱. گزینهٔ ج یک عبارت پسوندی نیست چون بعد از !abc یک عمل به‌صورت + نمایش داده شده است در صورتی که دو عمل نیاز است.

۲۲. معادل پسوندی گزینه‌های ب، ج، د و ه به‌ترتیب به‌صورت ab-c!def*/+ ، ab-c!d+ef*// ، abc!d+e/f*/- و abc!de/f*+/- می‌باشد.

۲۳. با سه سنگریزه این کار عملی است.

۲۴. عدد ۴ هرگز ظاهر نخواهد شد. زیرا اولین ۴ وقتی ظاهر خواهد شد که در سطر قبلی ۴ عدد ۱ یا ۲ و یا ۳ به‌صورت متوالی ظاهر شده باشد. به‌عنوان مثال اگر ۴ عدد ۲ ظاهر شده باشد و عدد بعد از این ۲ ها a و عدد قبل از ۲ ها b باشد، آنگاه این دنباله دو حالت خواهد داشت:

حالت اول: سطر قبل از این دنباله شامل ... a «۲» و دو «۲» و دو «b» و ... می‌باشد که طریقهٔ شمارش درست نیست چون ۲ ها را با هم نشمرده‌ایم یعنی یکبار گفته‌ایم a تا «۲» و بلافاصله گفته‌ایم دو تا «۲» که صحیح نمی‌باشد.

حالت دوم: سطر قبل از این دنباله شامل ... «a» و دو «۲» و دو «۲» و b ... می‌باشد که باز طریقهٔ شمارش درست نیست چون در شمارش دو تا «۲» و دو تا «۲» بلافاصله پشت سر هم آمده‌اند.

۲۵. اعداد دو رقمی که بر یکی از دو عدد ۱۷ و ۲۳ بخش‌پذیر باشند عبارتند از: ۱۷، ۲۳، ۳۴، ۴۶، ۵۱، ۶۸، ۶۹، ۸۵ و ۹۲. برای اینکه شرط مسأله برقرار باشد، عددهایی که با در نظر گرفتن دو رقم متوالی به‌دست می‌آیند باید یکی از ۹ عدد فوق باشند. در ساختن رشته باید دقت کرد که رقم ۷ نباید ظاهر شود زیرا بعد از ۷ هیچ رقمی نمی‌توان قرار داد تا عدد دو رقمی حاصل بر یکی از دو عدد ۱۷ و ۲۳ بخش‌پذیر باشد. رقم ۱ نیز نباید در رشته باشد زیرا اگر رقم ۱ در رشته ظاهر شود بعد از آن باید ۷ باشد که تناقض است. رقم ۵ نیز نباید در رشته باشد زیرا اگر رقم ۵ در رشته ظاهر شود بعد از آن باید ۱ ظاهر شود که تناقض است. رقم ۸ نیز نباید در رشته باشد زیرا اگر رقم ۸ در رشته ظاهر شود بعد از آن باید ۵ ظاهر شود که تناقض است پس رشته به‌صورت زیر می‌باشد: ... ۶۹۲۳۴۶۹۲۳۴۶

یعنی ارقام ۶، ۹، ۲، ۳ و ۴ با تناوب ۵ تکرار می‌شوند چون باقیماندهٔ ۱۹۹۶ بر ۵ برابر با ۱ می‌باشد پس آخرین رقم دنبالهٔ ۱۹۹۶ رقمی برابر با ۶ می‌باشد.

۲۶. تعداد رشته‌های مخصوصی که دقیقاً از ۷ حرف تشکیل شده‌اند عبارتند از:

aaaaaaa , aaaaabb , aaaabba , aaabbaa , aabbaaa , abbaaaa , aaabbbb , aabbbba , aabbabb , abbabba , abbaabb , abbbbaa , abbbbbb

پس مجموعاً ۱۳ رشته مخصوص ۷ حرفی می‌توان تولید کرد. اگر دقت کنید خواهید فهمید که اگر f_n نشانگر تعداد رشته‌های مخصوص n حرفی باشد آنگاه رابطهٔ $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ برقرار است.

۲۷. تعداد اعدادی که با دو عدد ۱ شروع شده و دو رقم انتهایشان مشابهند برابر با ۹ می‌باشد.

تعداد اعدادی که با دو عدد ۱ شروع شده و دو رقم انتهایشان مشابه نیستند برابر با $\binom{9}{2}$ می‌باشد.

تعداد اعدادی که با ۱۲ شروع شده و دو رقم انتهایشان مشابهند برابر با ۸ می‌باشد.

تعداد اعدادی که با ۱۲ شروع شده و دو رقم انتهایشان مشابه نیستند برابر با $\binom{8}{2}$ می‌باشد.

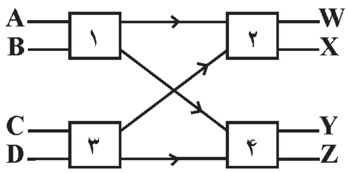
تعداد اعدادی که با ۱۳ شروع شده و دو رقم انتهایشان مشابهند برابر با ۷ می‌باشد.

تعداد اعدادی که با ۱۳ شروع شده و دو رقم انتهایشان مشابه نیستند برابر با $\binom{7}{2}$ می‌باشد.

پس تعداد اعداد کوچکتر از ۱۴۰۰ و با شرط مذکور برابر با $\binom{7}{2} + 7 + \binom{8}{2} + 8 + \binom{9}{2} + 9$

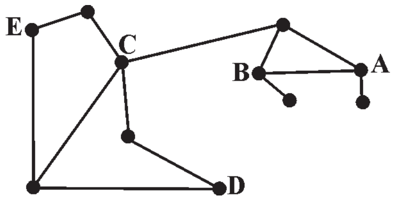
یعنی ۱۰۹ عدد می‌باشد که با کسر اعداد ۱۳۹۹، ۱۳۸۹، ۱۳۸۸، ۱۳۷۹، ۱۳۷۸ و ۱۳۷۷ یعنی ۶ عدد از تعداد فوق، تعداد مورد نظر ۱۰۳ عدد به‌دست می‌آید.

۲۸. حالت‌های ۱ و ۳ هر دو می‌توانند به‌دست آیند. در حالت اول، باید کلیدهای ۱ و ۴ مستقیم و کلیدهای ۲ و ۳ معکوس عمل کنند. در حالت سوم نیز هر چهار کلید باید معکوس عمل کنند.



۲۹. در خانه‌های ۰ تا ۴ به‌ترتیب اعداد ۲۴، ۱۰، ۳، ۱۳ و ۸ قرار می‌گیرند. پس در خانهٔ دوم عدد ۳ موجود است.

۳۰. در نقشه شهرهایی که باید در آنها مراکز کنترل ترافیک ایجاد کرد با A، B، C، D و E نمایش داده شده‌اند؛ یعنی پنج شهر.

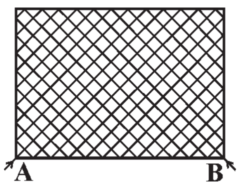


۳۱. شهرها را به دو دسته B و A تقسیم می‌کنیم. B شامل شهرهایی است که بین هیچ دوتایی از آن‌ها جاده مستقیم وجود ندارد و تعداد آنها حداکثر ممکن را دارد معلوم است که تعداد این شهرها برابر با b می‌باشد. اگر بخواهیم تعداد مراکز کنترل ترافیک حداقل باشد کافی است به تمام شهرهای دستهٔ A مرکز کنترل ترافیک اختصاص دهیم. ضمناً لازم نیست بـه هیچ‌کدام از اعضای مجموعهٔ B مرکزی اختصاص دهیم زیرا هر کدام از آنها حداقل به یکی از اعضای مجموعهٔ A مستقیماً جاده دارند (چون در غیر این صورت عضوی از A که به هیچ کدام از اعضای B جاده نداشته باشد باید جزء مجموعهٔ B قرار می‌گرفت). پس تعداد اعضای A حداکثر برابر با a می‌باشد. پس a + b از تعداد شهرها بیشتر نیست.

۳۲. برای اینکه گلوله به نقطهٔ B برسد باید گلوله مسیر موربی شکل را طی کند. طول این مسیر برابر است با:

$$[۲(۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶) + ۸(۱۷)] \times \sqrt{۲}$$
$$= ۴۰۸\sqrt{۲}$$

پس گلوله در مدت ۴۰۸ ثانیه که بیشتر از ۵ دقیقه است به نقطه B می‌رسد.



۳۳. تعداد اضلاع مثلث‌های سفید از تعداد اضلاع مثلث‌های سیاه به اندازهٔ تعداد اضلاع چندضلعی بیشتر است. برای یک ۸ ضلعی تعداد اضلاع مثلث‌های سفید ۸ واحد از تعداد اضلاع مثلث‌ها سیاه بیشتر است. چون هم تعداد اضلاع مثلث‌های سفید بر ۳ بخش‌پذیر است و هم تعداد اضلاع مثلث‌های سیاه پس اینکه اختلاف آنها ۸ واحد باشد امکان‌پذیر نیست.

۳۴. مجموع سه عدد، یکی از اعدا ۳، ۴، ...، ۱۲ می‌باشد. تعداد کل حالات برابر با ۴×۴×۴ یعنی ۶۴ حالت می‌باشد. تعداد حالاتی که مجموع اعداد انتخابی ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ باشد به‌ترتیب برابر با ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۲، ۱۰، ۶، ۳ و ۱ می‌باشد. به‌عنوان مثال مجموع سه عدد انتخابی وقتی برابر با ۱۰ خواهد شد که یکی از سه نفر عدد ۲ و دو نفر دیگر عدد ۴ را انتخاب کنند و یا یکی از آنها عدد ۴ و دو نفر دیگر عدد ۳ را انتخاب کنند که مجموعاً ۶ حالت زیر می‌شود:

(۲ , ۴ , ۴) - (۴ , ۲ , ۴) - (۴ , ۴ , ۲) - (۴ , ۳ , ۳) - (۳ , ۴ , ۳) - (۳ , ۳ , ۴)

پس احتمال اینکه باقیماندهٔ تقسیم مجموع سه عدد بر ۳ برابر با ۰ باشد عبارت است از احتمال اینکه مجموع سه عدد یکی از اعداد ۳، ۶، ۹، ۱۲ باشد و آن احتمال برابر است با:

$$\frac{۱}{۶۴}+\frac{۱۰}{۶۴}+\frac{۱۰}{۶۴}+\frac{۱}{۶۴}=\frac{۲۲}{۶۴}$$

احتمال اینکه باقیماندهٔ تقسیم مجموع سه عدد بر ۳ برابر با ۱ باشد عبارت است از احتمال اینکه مجموع سه عدد یکی از اعداد ۴، ۷ و ۱۰ باشد و آن برابر است با:

$$\frac{۳}{۶۴}+\frac{۱۲}{۶۴}+\frac{۶}{۶۴}=\frac{۲۱}{۶۴}$$

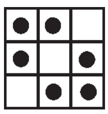
و بالاخره احتمال اینکه باقیماندهٔ تقسیم مجموع سه عدد بر ۳ برابر با ۲ باشد عبارت است از احتمال اینکه مجموع سه عدد یکی از اعداد ۵، ۸ و ۱۱ باشد و آن برابر است با:

$$\frac{۶}{۶۴}+\frac{۱۲}{۶۴}+\frac{۳}{۶۴}=\frac{۲۱}{۶۴}$$

۳۵. کافی است مطابق جدول زیر مهره از خانهٔ ۱ شروع کرده و به‌ترتیب در خانه‌های ۲، ۳، ...، ۱۷ فرود آید.

				۱۲	۱۷	۱۴	
				۱۵		۱۱	
				۱۰	۱۳	۱۶	
	۶	۹	۴				
	۳		۷				
	۸	۵	۲				
					۱		

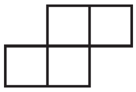
۳۶. مطابق شکل مقابل:



۳۷. به‌عنوان مثال یک نمونه در شکل زیر مشاهده می‌شود:

۱	۱	۱	۱	۱
۱	۴−	۱	۴−	۱
۱	۱	۱	۱	۱
۱	۴−	۱	۴−	۱
۱	۱	۱	۱	۱

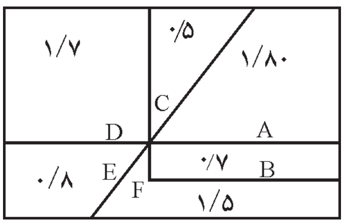
۳۸. به‌عنوان مثال نمونه‌ای از نوع چسباندن در شکل مقابل مشاهده می‌شود:



۳۹. الگوریتم کار به‌شکل زیر است:

- دو بار پیمانه ۳ لیتری را پر کرده و در پیمانهٔ ۷ لیتری خالی می‌کنیم.
- بار دیگر پیمانهٔ ۳ لیتری را پر کرده و آن را تا جایی که پیمانهٔ ۷ لیتری پر شود، درون آن خالی می‌کنیم (بدیهی است که در درون پیمانهٔ سه لیتری، دو لیتر شیر باقی خواهد ماند.)
- پیمانهٔ ۷ لیتری را در درون پیمانهٔ ۱۰ لیتری خالی می‌کنیم.
- ۲ لیتر شیر موجود در پیمانهٔ سه لیتری را در درون پیمانهٔ ۷ لیتری می‌ریزیم.
- پیمانهٔ ۳ لیتری را از پیمانهٔ ۱۰ لیتری که محتوی ۸ لیتر شیر است پر کرده و در پیمانهٔ ۷ لیتری خالی می‌کنیم.
- پایان.

۴۰. مطابق شکل زیر:



موکت شماره ۱ شامل ناحیه‌های A و B و C می‌باشد.
موکت شماره ۲ شامل ناحیه‌های B و E و F می‌باشد.
موکت شماره ۳ شامل ناحیه‌های C و D و E می‌باشد.