پاسخ تشریحی

شانزدهمین المپیاد کامپیوتر

۱. حاصل عبارت داده شده به‌ازای مقادیر مختلف برای x_iها از ۰ تا ۳۳ متغیر است. تنها در ۴ موردِ ۰، ۱، ۳۲ و ۳۳ متغیرهای از x_1 تا x_5 شبیه هم هستند (در مورد ۰ و ۱ هر پنج متغیر برابر ۰ و در مورد ۳۲ و ۳۳ هر پنج متغیر برابر ۱ هستند). در سایر موارد اگر دو متغیرِ x_1 و x_2 نابرابر باشند می‌توان مقادیر آنها را با هم عوض کرد که در این صورت یک ۶- تایی جدید پدید می‌آید ولی x تغییر نمی‌کند. اگر x_1 و x_2 با هم مشابه بوده ولی با x_3 مشابه نباشند می‌توان مقادیر x_1 و x_2 را با مقدار x_3 جابه‌جا کرد. اگر x_1، x_2 و x_3 مشابه بوده ولی با x_4 مشابه نباشند می‌توان مقادیر مشابه آن سه را با x_4 تعویض کرد و بالاخره اگر x_1، x_2، x_3 و x_4 مشابه بوده ولی با x_5 مشابه نباشند می‌توان مقادیر آن چهار متغیر مشابه را با x_5 تعویض کرد بدون آنکه در مقدار x تغییری حاصل شود.

۲. هر n راهی یک دو شاخه دارد که باید به یکی از راه‌های یک m راهی وصل شود، بنابراین هر n راهی یک راه را از بین برده و n راه جدید ایجاد می‌کند که برایند آن تولید n - ۱ راه می‌شود، درنتیجه تعداد کل راه‌های موجود با احتساب پریز اولیه به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$x = 1 + 10 \times (10 - 1) + 7 \times (7 - 1) + 5 \times (4 - 1) + 4 \times (2 - 1) + 100 \times (1 - 0) = 152$$

۳. افرادی که می‌توانند از امین رتبه بهتری کسب کنند کسانی هستند که در یکی از دو درس ریاضی و یا فیزیک (و یا هر دو) نمرهٔ بهتری از امین به‌دست می‌آورند. تعداد این افراد حداکثر می‌تواند (۱۱ - ۱) + (۷ - ۱) یعنی ۱۶ باشد که در این صورت امین رتبهٔ هفدهم را کسب خواهد کرد.

منبع: المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)، تألیف رسول حاجی زاده، انتشارات دانش پژوه، ۱۳۸۵

۴. حرکت به سمت راست را با r، حرکت به سمت بالا با u و حرکت به سمت بالا راستی را با o نمایش می‌دهیم. برای آنکه مسیر طی شده از A به B به‌طول ۸ باشد، لازم است دو واحد از حرکات، بالا راستی، سه واحد از آن حرکات، به سمت راست و بالاخره سه واحد باقی‌مانده از ۸ حرکت به سمت بالا باشد. هر مسیری متناظر به خود دنباله‌ای متشکل از دو تا o، سه تا r و سه تا u دارد و برعکس. به‌عنوان مثال دنباله متناظر به مسیر مشخص شده در شکل به‌صورت orrouuru می‌باشد. تعداد دنباله‌های یاد شده (شامل دو حرفِ o، سه حرفِ r و سه حرفِ u) برابر $\frac{۸!}{۲! \times ۳! \times ۳!}$ یعنی ۵۶۰ می‌باشد، بنابراین تعداد مسیرهای یاد شده نیز برابر همین می‌باشد.

۵. عددی بر ۳۴ بخش‌پذیر است که بر ۱۷ و ۲ بخش‌پذیر باشد و نیز عددی بر ۳۸ بخش‌پذیر است که بر ۱۹ و ۲ بخش‌پذیر باشد. اگر در جدول ۵×۵، دو عدد ۱۷ و ۱۹ هم‌سطر و یا هم‌ستون نباشند، آنگاه منظم کردن آن جدول غیر ممکن است زیرا مجموع تعداد کل خانه‌هایی که حداقل با یکی از آن دو عدد هم‌سطر و یا هم‌ستون هستند برابر ۱۴ می‌باشد که برای منظم شدن آن جدول لازم است هر یک از آن ۱۴ خانه عددی فرد باشد، در حالی که تعداد اعداد فرد باقی‌مانده برابر ۱۱ می‌باشد. و اما اگر در جدول ۵×۵، دو عدد ۱۷ و ۱۹ هم‌سطر و هم‌ستون باشند (که این کار به ۲۰۰ طریق ممکن است، زیرا عدد ۱۷، ۲۵ انتخاب و سپس عدد ۱۹، ۸ انتخاب در پیش روی خود دارند)، آنگاه مجموع تعداد کل خانه‌هایی که حداقل با یکی از آن دو عدد هم‌سطر و یا هم‌ستون هستند برابر ۱۱ می‌باشد (در جدول مقابل آن خانه‌ها با O نشان داده شده‌اند) که پر کردن آن ۱۱ خانه با ۱۱ عدد فرد به !۱۱ طریق ممکن است. پر کردن ۱۲ خانه باقی‌مانده با ۱۲ عدد زوج نیز به !۱۲ طریق انجام می‌شود که در کل جواب مورد نظر !۱۲ × !۱۱ × ۲۵ × ۸ به‌دست می‌آید.

	O		O	
O	۱۷	O	۱۹	O
	O		O	
	O		O	
	O		O	

۶.

$$x_۰ = ۱۰۰ - ۴(x_۱ + ۴x_۲ + ۱۶x_۳) \Rightarrow x_۰ = ۴k \Rightarrow x_۰ = ۰$$

$$x_۰ = ۰ \Rightarrow x_۱ + ۴x_۲ + ۱۶x_۳ = ۲۵ \Rightarrow x_۱ = ۴L + ۱ \Rightarrow x_۱ = ۱$$

$$x_۱ = ۱ \Rightarrow x_۲ + ۴x_۳ = ۶ \Rightarrow (x_۲, x_۳) = (۲, ۱) \text{ یا } (-۲, ۲)$$

$$\Rightarrow x_۰ + x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۴ \text{ یا } ۱$$

۷. ماشین سفید پشت پراید است، بنابراین پراید سفید نیست. از طرف دیگر پراید طوسی نیز نیست چون دوو طوسی است، پس پراید سیاه بوده و به ناچار پژو نیز سفید خواهد بود. ماشین علی پراید نیست چون جلوی پراید پارک شده است، همچنین ماشین سیامک نیز پراید (سیاه) نیست، بنابراین پراید متعلق به بهروز است. ماشین علی جلوی پراید و ماشین سفید پشت پراید پارک است به این معنا که ماشین علی سفید نیست، بنابراین ماشین علی دوو بوده و ماشین سیامک نیز پژو است.

۸. مسأله مانند آن است که بعضی خانه‌های سیاه موجود در چهار ستون اول را چنان منتقل کنیم که در نهایت صفحه شطرنجی شود. در هر انتقال هر خانهٔ سیاه فقط قادر است به خانه سفید مجاورش (در صورت وجود) منتقل شود. هر انتقال یک حرکت محسوب می‌شود. بهترین حالت آن است که سیاه‌های موجود در ستون چهارم به ستون‌های هشتم و هفتم، سیاه‌های موجود در ستون سوم به ستون‌های ششم و پنجم، سیاه‌های موجود در ستون دوم به ستون‌های چهارم و سوم و بالاخره سیاه‌های موجود در ستون اول به ستون‌های دوم و اول منتقل شوند. تعداد حرکات در این مورد در جدول مقابل نشان داده شده‌اند که در مجموع برابر ۶۴ می‌شود.

	۱		۲		۳		۴
۰		۱		۲		۳	
	۱		۲		۳		۴
۰		۱		۲		۳	
	۱		۲		۳		۴
۰		۱		۲		۳	
	۱		۲		۳		۴
۰		۱		۲		۳	

۹. به سادگی قابل درک است که هرگز با تعویض‌های یاد شده، دو عدد «۰» در یک سطر و یا در یک ستون قرار نخواهد گرفت. بنابراین در هر سطر و یا ستون دقیقاً یک عدد «۰» و دو عدد «۱» وجود دارد. قرار دادن یک عدد «۰» در ستون اول به ۳ طریق ممکن است. قرار دادن یک عدد «۰» در ستون دوم به شرطی که با «۰» موجود در ستون اول هم سطر نباشد به ۲ طریق ممکن است و بالاخره این که قرار دادن یک عدد «۰» در ستون سوم به شرطی که با هیچ‌یک از «۰»های قبلی هم‌سطر نباشد برابر ۱ می‌باشد که طبق اصل ضرب جواب مورد نظر ۱×۲×۳ یعنی ۶ می‌شود.

۱۰. فرض می‌کنیم ابتدا a، سپس b و در نهایت نیز c به همین ترتیب بازی را انجام دهند. با بررسی ارقام دوم، سوم و چهارم از سمت چپ دنباله‌های داده شده، کارت افراد c ،b و a در هر یک از پنج دنباله داده شده به‌ترتیب از چپ به راست به‌صورت (۱۰ ، ۱۰ ، ۱۰)، (۰۱ ، ۱۰ ، ۱۰)،(۱۰ ، ۰۱ ، ۱۰)، (۱۰ ، ۰۱ ، ۱۰) و (۰۱ ، ۱۰ ، ۰۱) در می‌آید که در ادامه بازی دنباله‌های دوم و پنجم از سمت چپ با کارت‌های به‌دست آمده سازگاری دارند ولی مابقی دنباله‌ها این سازگاری را ندارند.

۱۱. به‌سادگی معلوم می‌شود که کوچکترین n برای رسیدن به منظور، عددی است چهار رقمی. تا قبل از ۱۲۳ باید ۱۹۹ عدد قرار گیرد. در بین اعداد یک رقمی فقط یک عدد (عدد ۱)، در بین اعداد دو رقمی فقط سه عدد (اعداد ۱۰، ۱۱ و ۱۲) و بالاخره در بین اعداد سه رقمی فقط بیست و سه عدد (اعداد ۱۰۰ تا ۱۲۲) قبل از ۱۲۳ قرار می‌گیرند که تعداد کل آنها ۲۷ می‌شود. بنابراین باید عدد چهار رقمی n چنان باشد که قبل از ۱۲۳ به تعداد ۲۷ - ۱۹۹ یعنی ۱۷۲ عدد قرار گیرد. معلوم است که همه اعداد از ۱۰۰۰ تا ۱۲۲۹ که تعداد آنها ۲۳۰ تا می‌باشد قبل از ۱۲۳ قرار می‌گیرند که یکصد و هفتاد و دومین آنها ۱۱۷۱ می‌باشد. بنابراین اگر n را برابر ۱۱۷۱ قرار دهیم به جواب خواهیم رسید.

۱۲. برای ۱۱ نفری که هر کدام یک پیتزای کامل می‌خورند مجموعاً ۱۱ پیتزا خریداری می‌شود. برای ۹ نفری که هر کدام $\frac{۳}{۴}$ پیتزا را می‌خورند مجموعاً ۹ پیتزای کامل خریداری کرده و از هر یک از پیتزاها به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۴}$ بُرش خورده و ۵ تا از آنها را به پنج نفری که هر کدام، $\frac{۱}{۴}$ پیتزا را می‌خورند می‌دهیم و ۴ تای دیگر را به ناچار دور می‌ریزیم.

برای ۱۳ نفری که هر کدام $\frac{۱}{۲}$ پیتزا را می‌خورند مجموعاً ۷ پیتزای کامل خریداری کرده و پس از تبدیل آنها به ۱۴ پیتزای نصفه، ۱۳ تای از آنها را به ۱۳ نفرِ مورد نظر می‌دهیم و یکی از آن نصفه‌ها را به ناچار دور می‌ریزیم. بنابراین حداقل پیتزاهای خریداری شده برابر ۷ + ۹ + ۱۱ یعنی ۲۷ می‌باشد.

۱۳. در بین آن ۱۰ نفر هیچ فردی نمی‌تواند دروغگو باشد چون جملهٔ «شخص سمت راست من دروغگوست یا راستگو» جمله‌ای است درست. بنابراین همه افراد راستگو هستند.

۱۴. برای همه مقادیر از ۱ تا ۱۰ برای n عدد خالی بندِ n رقمی وجود دارد. اگر عدد ۱ - n رقمی $\overline{a_۱a_۲...a_{n-۱}}$ خالی‌بند باشد، آنگاه باقی‌مانده عدد n رقمیِ $\overline{a_۱a_۲...a_{n-۱}۰}$ را پیدا می‌کنیم. چون $n \leq ۱۰$ بنابراین باقی‌مانده به‌دست آمده یکی از اعدا ۰ تا ۹ می‌باشد که می‌توان با تبدیل رقم ۰ به رقمی که باقی‌مانده مورد نظر است عدد n رقمی به‌دست آمده را مضرب n کرد.

۱۵. اگر در رشته‌ای حرفی وجود داشته باشد که n بار تکرار شده باشد، آنگاه در رشته نهایی نیز باید

حرفی وجود داشته باشد که n بار تکرار شده باشد چون هیچ‌یک از دو عمل یاد شده تکرار حرفی در یک رشته به تعداد n بار را تغییر نمی‌دهد. همچنین شرط لازم برای آنکه رشته‌ای بتواند از روی رشته دیگر به‌وجود آید آن است که تعداد حروف آنها یکسان باشد. بنابراین اگر تعداد حروف تکراری دو رشته را به صورت دنباله‌ای مثلاً نزولی بنویسیم باید دنباله‌های متناظر به دو رشته کاملاً یکسان باشد. دنباله‌های متناظر به کلمات داده شده در گزینه‌ها به شکل زیر می‌باشند:

الف) (۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱)
(۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱)

ب) (۳ , ۲ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱)
(۲ , ۲ , ۲ , ۱ , ۱ , ۱)

ج) (۴ , ۳ , ۲ , ۱ , ۱ , ۱)
(۴ , ۳ , ۲ , ۱ , ۱ , ۱)

د) (۲ , ۱ , ۱ , ۱)
(۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱)

هـ) (۳ , ۲ , ۲ , ۱ , ۱ , ۱)
(۳ , ۲ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱)

همان‌طور که مشاهده می‌شود فقط در مورد گزینهٔ ج دو دنباله به‌دست با هم یکسان هستند.

۱۶.

$$\overline{a_r a_{r-۱} \ldots a_{۲}۸} \times ۴ = \overline{۸a_r a_{r-۱} \ldots a_{۲}} \quad \Rightarrow \quad a_{۲} = ۲$$

$$\Rightarrow \quad \overline{a_{۲} a_{r-۱} \ldots a_{۳}۲۸} \times ۴ = \overline{۸a_r \ldots a_{۳}۲} \quad \Rightarrow \quad a_{۳} = ۱$$

$$\Rightarrow \quad \overline{a_r \ldots a_{۴}۱۲۸} \times ۴ = \overline{۸a_r \ldots a_{۴}۱۲} \quad \Rightarrow \quad a_{۴} = ۵$$

$$\Rightarrow \quad \overline{a_r a_{۵}۵۱۲۸} \times ۴ = \overline{۸a_r \ldots a_{۵}۵۱۲} \quad \Rightarrow \quad a_{۵} = ۰$$

$$\Rightarrow \quad \overline{a_r \ldots a_{۶}۰۵۱۲۸} \times ۴ = \overline{۸a_r \ldots a_{۶}۰۵۱۲} \quad a_{۶} = ۲$$

$\Rightarrow \quad \overline{a_r \ldots a_{۷}۲۰۵۱۲۸} \times ۴ = \overline{۸a_r \ldots a_{۷}۲۰۵۱۲} \quad \Rightarrow \quad a_{۷}, a_{۸}, \ldots =$ وجود خارجی ندارد

$\Rightarrow$ عدد مورد نظر $= ۲۰۵۱۲۸ \quad \Rightarrow \quad a_{r-۱} = a_{۵} = ۰$

۱۷. اگر حرکت آخر با محمد باشد آنگاه او می‌تواند یکی از سطرهایی که قبلاً پر شده است را در نظر گرفته و مجموع اعداد موجود در آن سطر را به‌دست آورد، سپس اختلاف بین این مجموع با مجموع اعداد ستونی که تنها خانه خالی در آن است، را به‌دست آورده و آن عدد را در خانه خالی قرار می‌دهد و برنده می‌شود. و اما اگر حرکت ماقبل آخر با محمد باشد یقیناً آن خانه تنها خانه خالی در سطر (و یا ستون) خود می‌باشد که او می‌تواند مجموع اعداد یکی از ستون‌ها (و یا سطرها)یِ پر را حساب کرده و با توجه به آن مجموع، خانه خالی را چنان پر می‌کند که برنده شود.

۱۸.

$$(\text{ارزش } x) = -1\times10^{9}+9\times10^{8}-9\times10^{7}+9\times10^{6}-9\times10^{5}-9\times10^{4}-9\times10^{3}+9\times10^{2}-9\times10^{1}+9$$

$$\Rightarrow (\text{ارزش } y) = 1\times10^{9}-9\times10^{8}+9\times10^{7}-9\times10^{6}+9\times10^{5}-9\times10^{4}+9\times10^{3}-9\times10^{2}+9\times10^{1}-9$$

$$=(10-9)\times10^{9}-(10-1)\times10^{8}+\dots+(10-1)\times10^{1}-(10-1)$$

$$=1\times10^{10}-10\times10^{9}+2\times10^{8}-2\times10^{7}+2\times10^{6}-2\times10^{5}+2\times10^{4}-2\times10^{3}+2\times10^{2}-2\times10^{1}+1$$

$$=2222222221 \quad \Rightarrow \quad \text{مجموع ارقام} = 17$$

۱۹. اگر عدد k فرد باشد، آنگاه یکی از دو عدد $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ و $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ زوج و دیگری فرد می‌باشد. اگر عدد فرد را α و عدد زوج را β در نظر بگیریم، چون دو عدد α و β متوالی می‌باشند، بنابراین در شمردن $f(\beta)$ تمام اعداد تولید شده، در شمردن $f(\alpha)$ نیز به کار رفته‌اند. در این حالت می‌توان تساوی $f(k) = f(\alpha) + 2$ را نتیجه گرفت چون در محاسبه $f(k)$ دو عدد k و β نسبت به اعداد تولید شده در محاسبه $f(\alpha)$ بیشتر می‌باشند.

اگر عدد k زوج باشد، آنگاه دو عدد $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ و $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ با هم برابر می‌باشند که آن را θ می‌نامیم. در این حالت نیز با کمی دقت به تساوی $f(k) = f(\theta) + 1$ خواهد رسید.

از طرف دیگر معلوم می‌شود که اگر عدد k در بازهٔ $[2^n , 2^{n+1}-1]$ در نظر گرفته شود، آنگاه عدد α و یا θ یِ تعریف شده در فوق، در بازهٔ $[2^{n-1} , 2^n-1]$ قرار خواهد گرفت، به این معنا که اگر ماکزیمم مقدار f در بازهٔ $[2^{n-1} , 2^n - 1]$ برابر m باشد، آنگاه ماکزیمم مقدار f در بازه $[2^n , 2^{n+1}-1]$ برابر $m + 2$ خواهد شد. ماکزیمم مقدار در بازه $[4 , 7]$ برابر ۵ می‌باشد. بنابراین ماکزیمم مقدار در بازه‌های $[8 , 15]$، $[16 , 31]$، $[32 , 63]$، ...، $[1024 , 2047]$، $[2048 , 4095]$ به‌ترتیب برابر ۷، ۹، ۱۱، ... ، ۲۱ و ۲۳ خواهد شد. در مورد عدد ۳۹۹۹ مقدار f به شکل زیر برابر ۲۳ می‌شود:

$$3999 \rightarrow 2000 , 1999 \rightarrow 1000 , 999 \rightarrow 500 , 499 \rightarrow 250 , 249 \rightarrow 125 , 124$$

$$\rightarrow 62 , 63 \rightarrow 31 , 32 \rightarrow 16 , 15 \rightarrow 8 , 7 \rightarrow 3 , 4 \rightarrow 2 , 1$$

۲۰. اگر آرش از سه‌تایی (x, y, z) سه‌تاییِ $(x+y, x-y, z)$ را چنان بسازد که هر سه عدد z، $x-y$ و $x+y$ بر ۳ بخش‌پذیر باشند، آنگاه خواهیم داشت:

$$z \overset{3}{\equiv} 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x-y \overset{3}{\equiv} 0 \\ x+y \overset{3}{\equiv} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow y \overset{3}{\equiv} 0$$

بنابراین معلوم می‌شود شرط لازم برای آنکه آرش بتواند برنده شود آن است که سه تایی ماقبل آخر باید چنان باشد که هر سه عدد موجود در آن سه‌تایی بر ۳ بخش‌پذیر باشند. و اگر این روند را به قبل ادامه دهیم معلوم خواهد شد که سه‌تایی اولیه نیز باید هر سه عددش بر ۳ بخش‌پذیر باشد تا آرش بتواند برنده شود که در بین سه‌تایی‌های داده شده هیچ سه‌تایی چنین خاصیتی را ندارد.

۲۱. با تغییر یکی از ضرایب s_iها از ۱ به ۱- و یا از ۱- به ۱ زوجیتِ عدد n تغییر نخواهد کرد، بنابراین اگر عددی مانند α توسط ماشین قابل نمایش باشد عدد $\alpha + 1$ قابل نمایش نخواهد بود.

۲۲. اگر هر سه رقم در بازهٔ [۰ ,۷] و یا در بازه [۳ ,۹] باشند، آنگاه با حداکثر ۷ مرحله، به صفر خواهیم رسید (در مورد اول گردونه مربوط به بزرگترین رقم را آنقدر به عقب می‌چرخانیم تا با عدد متوسط برابر باشد، سپس گردونه‌های مربوط به آن دو رقم را آنقدر به عقب می‌چرخانیم تا با عدد کوچک برابر باشند و در نهایت نیز هر سه گردونه را با هم می‌چرخانیم تا به سه تا صفر برسیم. در مورد دوم نیز کار را با چرخاندن گردونه مربوط به کوچکترین رقم به‌سمت جلو ادامه می‌دهیم.

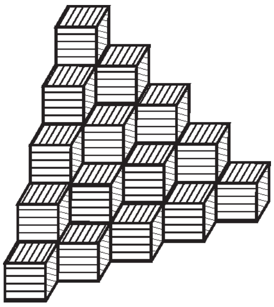
اگر دو رقم در بازهٔ [۰ ,۵] و رقم دیگر در بازهٔ [۸ ,۹] باشد نیز حداکثر مراحل کار برابر با ۷ می‌باشد، به این ترتیب که ابتدا عدد بزرگتر در بازهٔ [۰ ,۵] را آنقدر به عقب می‌چرخانیم تا با عدد دیگر برابر باشند، سپس آن دو گردونه را با هم آنقدر می‌چرخانیم تا به صفر برسند (معلوم است که این مراحل حداکثر برابر ۵ می‌باشد)، در نهایت نیز گردونهٔ سوم را که عددش ۸ و یا ۹ می‌باشد به جلو می‌چرخانیم تا به صفر برسد (در این مورد نظر حداکثر مراحل برابر ۲ می‌باشد).

اگر دو رقم در بازهٔ [۵ ,۹] و رقم دیگر در بازهٔ [۱ ,۲] باشد نیز همانند بندِ قبلی عمل می‌کنیم.

۲۳. تعداد مسیرهای به‌طول i $(2 \le i \le 14)$ در جدول زیر مشخص شده است:

طول مسیر	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
تعداد مسیر	۱۳	۲۴	۲۲	۲۰	۱۸	۱۶	۱۴	۱۲	۱۰	۸	۶	۴	۲

۲۴. حجم مورد نظر به شکل مقابل می‌باشد که دارای ۳۵ مکعب واحد می‌باشد:



۲۵. شرط لازم و کافی برای آنکه سوراخ‌های یک مستطیل $n \times m$، طلایی باشد آن است که n مضربی از m باشد. این موضوع در شکل مقابل نشان داده شده است.

فرض می‌کنیم مستطیل $n \times m$ مطابق شکل مقابل دارای سوراخ طلایی باشد، آنگاه پرتوهای ورودی و خروجی از تلاقی با یکدیگر k عدد مستطیل $a \times b$ ایجاد می‌کنند که طول مستطیل اولیه $\frac{\sqrt{2}k}{2}(a+b)$ و عرض آن مستطیل برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$ می‌شود، به این معنا که طول مستطیل باید k برابر عرض آن باشد (k عددی است صحیح). بنابراین شرط لازم و کافی برای آنکه سوراخ‌های مستطیلی $n \times m$، طلایی باشد آن است که n مضرب صحیحی از m باشد. معلوم است که در این حالت به غیر از دو سوراخ گوشه‌ای، مابقیِ $m - 1$ سوراخ همگی طلایی خواهند بود.

در بین مستطیل‌های داده شده، سوراخ‌های غیر واقع بر گوشه‌های ۱۳۸۴ × ۱۳۸۴ و ۱۳۸۴ × ۴۱۵۲ همگی طلایی‌اند که تعداد کل آنها ۱۳۸۳ + ۱۳۸۳ یعنی ۲۷۶۶ می‌شود.

۲۶. ابتدا باید اعداد را به مبنای ۲ تبدیل کرده و آن دو را به‌طوری در دو سطر بنویسیم که ارقام هم‌مرتبه در زیر هم قرار گیرند. چون مجموع هر دو عدد موجود در یک ستون برابر ۶۴ (که در مبنای ۲ به‌صورت ۱۰۰۰۰۰۰ قابل نمایش است) می‌باشد، بنابراین دو عدد موجود در یک ستون چنانند که به‌ازای اولین

«۱» از سمت راست در عدد پایینی، رقم متناظرش در عدد بالایی نیز ۱ است. از آن رقم به قبل هر دو رقم متناظر، در آن دو عدد تا جایگاه ششم از سمت راست، باید متفاوت باشد تا مجموع به‌صورت ۱۰۰۰۰۰۰ در بیاید. به‌عنوان مثال در مورد دو عدد ۴۷ و ۱۷ که در صورت سؤال اشاره شده است وضعیت، به‌قرار زیر می‌باشد:

۴۷	⟵	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱۷	⟵	۰	۱	۰	۰	۰	۱
جایگاه	⟵	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

برای تبدیل اعداد بالایی به پایینی و برعکس، کافی است در مورد ستون‌های به شکل «$\begin{smallmatrix}1\\0\\2^i\end{smallmatrix}$» که جایگاه سمت راست آن به شکل «$\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$» نمی‌باشد دقیقاً 2^i واحد از عدد بالایی برداشته و به عدد پایینی اضافه کنیم و در مورد ستون‌های به شکل «$\begin{smallmatrix}1\\0\\2^i\end{smallmatrix}$» که یک یا چند ستون بلافاصله بعد از آن به شکل «$\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$» می‌باشند، کافی است به اندازه 2^j از عدد بالایی برداشته و به عدد پایینی اضافه کنیم که 2^j جایگاه سمت راست‌ترین ستون به شکل «$\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$» می‌باشد که در آن دو عدد وجود دارد. در مورد اعداد ۴۷ و ۱۷ مقادیر اضافه شده به‌ترتیب به‌صورت 2^1، 2^2، 2^3 و 2^4 می‌باشد که از قاعده بالا پیروی می‌کنند.

بنابراین معلوم می‌شود که تعداد اعداد اضافه شده، برای تبدیل اعداد بالایی به اعداد پایینی یک واحد کمتر از تعداد «۱»های موجود در عدد بالایی می‌باشد.

اعداد از ۳۳ تا ۶۳ مجموعاً ۱۱۱ تا ۱ دارند که اگر به‌ازای هر یک از عدد «۱» کم کنیم معلوم می‌شود که تعداد مراحل لازم برابر ۱۱۱ - ۳۱ یعنی ۸۰ می‌شود. در مورد ستون مربوطه به دو عدد ۰ و ۶۴ نیز یک مرحله تعویض نیاز است. بنابراین جواب مورد نظر ۸۱ می‌شود.

۲۷. در هر مورد بهترین تبدیل مطابق الگوریتم زیر می‌باشد:

$$\boxed{\frac{63}{1}} \xrightarrow{2^0} \boxed{\frac{64}{0}} \xrightarrow{2^6} \boxed{\frac{0}{64}} \xrightarrow{2^0} \boxed{\frac{1}{63}}$$

$$\boxed{\frac{47}{17}} \xrightarrow{2^5} \boxed{\frac{15}{49}} \xrightarrow{2^1} \boxed{\frac{17}{47}}$$

$$\boxed{\frac{55}{9}} \xrightarrow{2^5} \boxed{\frac{23}{41}} \xrightarrow{2^4} \boxed{\frac{7}{57}} \xrightarrow{2^1} \boxed{\frac{9}{55}}$$

۲۸. بعد از سوتِ iام شماره روی کارت‌ها به شکلی در می‌آید که در جدول زیر نمایش داده شده‌اند:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
i=۰	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i=۱	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
i=۲	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
i=۳	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
i=۴	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
i=۵	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
i=۶	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
i=۷	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
i=۸	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
i=۹	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
i=۱۰	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
i=۱۱	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
i=۱۲	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

۲۹. مجموعهٔ داده شده را به شکل زیر به سه مجموعهٔ A، B و C افراز می‌کنیم، مجموعهٔ A مجموعه اعدادی است که مضرب ۳ هستند، مجموعهٔ B مجموعه اعدادی است که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده ۱ می‌آورند و مجموعهٔ C مجموعه اعدادی است که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده ۲ می‌آورند:

A = {۳ , ۶}

B = {۱ , ۴ , ۷}

C = {۲ , ۵}

برای تشکیل زیرمجموعهٔ مورد نظر باید i عضو از A، j عضو از B و k عضو از C انتخاب شود که تمامی حالات ممکن در ستون‌های جدول زیر مشخص شده‌اند:

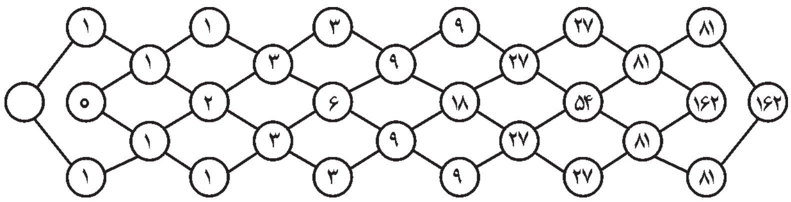
i	۰	۱	۲	۰	۱	۲	۰	۱	۲	۰	۱	۲
j	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳	۳
k	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۰	۰	۰
تعداد حالات ممکن	۱	۲	۱	۶	۱۲	۶	۳	۶	۳	۱	۲	۱

مجموع = ۴۴

۱	۲	۳	۴	۵
۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	●	۱۴	۱۵
۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵

۳۰. اگر خانه‌های جدول را مطابق شکل مقابل از ۱ تا ۲۵ شماره‌گذاری کنیم، آنگاه با وجود یک لوبیا در خانه شماره ۱۳ فقط خانه‌های ۲، ۴، ۶، ۱۰، ۱۶، ۲۰، ۲۲ و ۲۴ اَمن هستند؛ یعنی اگر فردی در خانه‌ای غیر از شماره‌های فوق لوبیایی را قرار دهد فردِ دیگر برنده خواهد شد. در بین شماره‌های فوق نیز دو شماره ۲ و ۴ با یکدیگر، ۶ و ۱۶ با یکدیگر، ۱۰ و ۲۰ با یکدیگر و بالاخره ۲۲ و ۲۴ با یکدیگر وابستگی دارند، به این صورت که اگر هر دو شماره وابسته به هم لوبیایی اختصاص داده شود، نفر بعدی می‌تواند با اختصاص دادن لوبیایی به خانه واقع در بین آن دو خانه وابسته، برنده می‌شود. بنابراین بهترین حرکات ممکن آن است که مهدی خانه ۱۰، مرتضی خانه ۴، مهدی خانه ۶ و بالاخره مرتضی خانه ۲۲ را انتخاب کند. در حرکت بعدی مهدی هر حرکتی را انجام دهد حداقل با یک لوبیا در یک ردیف ستونی، سطری و یا قطری قرار خواهد گرفت که مرتضی را در وضعیت بُرد قرار می‌دهد. در حرکت آخر مرتضی با قرار دادن لوبیا در خانه مورد نظر برنده می‌شود.

۳۱. در سمت چپ هر گره‌ای مانند m، حداکثر دو گره مانند n و k وجود دارد. تعداد راه‌های رسیدن به گره m با مجموع تعداد راه‌های رسیدن به دو گره n و k برابر است، بنابراین تعداد راه‌های رسیدن به هر گره مطابق شکل زیر می‌باشد:



۳۲. در مورد گزینهٔ ب، چون a در مکان ۶ قرار گرفته است معلوم می‌شود که قبل از آن مکان‌های ۳، ۴ و ۵ پر بوده است که یکی از آنها یعنی مکان ۴ توسط f پر شده است، بنابراین f قبل از a وارد جدول شده است. از طرف دیگر مکان اولیهٔ f خانه ۶ می‌باشد که هنگام ورود به جدول در صورت پر بودن آن خانه به یک خانه دیگر می‌رود. لحظهٔ ورود عنصر f به جدول، خانهٔ ۶ خالی بوده است و لزومی نداشت که به خانهٔ دیگر برود.

ترتیب ورود حروف به جدول در مورد گزینه‌های الف، ج و د به‌ترتیب به شکل زیر می‌تواند باشد:

الف: $a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow f \longrightarrow g$

ج: $a \longrightarrow c \longrightarrow e \longrightarrow g \longrightarrow b \longrightarrow d \longrightarrow f$

د: $a \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow f \longrightarrow c \longrightarrow g \longrightarrow b$

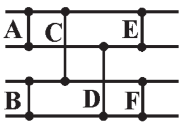
۳۳. تعداد افرادی از ردیف اول که در انتهای ساعت اول چای خورده‌اند را α و مابقی را β و این تعداد را در ردیف دوم به‌ترتیب γ و θ می‌نامیم، خواهیم داشت:

$\alpha+\beta=\gamma+\theta=$ ۱۰

$\alpha+\beta=$ ۱۳ , $\beta+\theta=$ ۷

معلوم است که از بین دو عدد α و γ یکی زوج و دیگری فرد است. بدون آنکه به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود α را زوج و γ را فرد در نظر می‌گیریم که در این صورت در انتهای ساعت دوم تعداد افرادی از ردیف اول که چایی می‌خورند برابر θ و مابقی برابر γ و نیز این تعداد در ردیف دوم به‌ترتیب برابر α و β به‌دست می‌آید. در انتهای ساعت سوم و بنابراین در انتهای ساعاتِ فرد وضعیت افراد چایی خورده همانند انتهای ساعت اول می‌شود.

۳۴. اگر سوئیچ‌ها را مطابق شکل مقابل با A، B، C، D، E و F نام‌گذاری کنیم، آنگاه اگر وضعیت آنها را به‌ترتیب مطابق جدول زیر در نظر بگیریم، آنگاه به هر یک از خروجی‌های موجود در گزینه‌ها خواهیم رسید (علامت × نشان‌گر ضربدری بودن سوئیچ و علامت → نشان‌گر مستقیم بودن آن سوئیچ می‌باشد):



گزینه	A	B	C	D	E	F
الف	→	×	×	→	→	→
ب	→	→	×	→	×	×
ج	→	→	×	×	×	×
د	×	→	×	→	→	×

۳۵. اگر صابون‌های موجود در شکل را به‌ترتیب از چپ به راست با A، B، C و D نام‌گذاری کنیم، آنگاه بهترین حرکات به شکل زیر می‌باشد:

۱) A : راست	۲) C : پایین	۳) B : راست
۴) C : بالا	۵) D : پایین	۶) D : چپ
۷) A : بالا	۸) B : بالا	۹) D : بالا

۳۶. بهترین الگوریتم برای حرکت ماشین‌ها به شکل زیر می‌باشد:

● همه ماشین‌ها از عوارضی رد شده و ماشین‌های ۴ و ۲ در خیابان سمت راست و ماشین‌های ۶، ۵ و ۳ در خیابان سمت چپ ردیف شده و ماشین ۱ به خروجی می‌رود که در این حالت مجموعاً ۶۰ تومان عوارض پرداخت می‌شود.

● ماشین ۴ از عوارضی رد شده و در پشت آخرین ماشین سمت چپ یعنی ماشین ۳ قرار می‌گیرد که در این حالت نیز ۱۰ تومان عوارض پرداخت می‌شود.

● تنها ماشین موجود در سمت راست یعنی ماشین ۲ از عوارضی رد شده و وارد پارکینگ می‌شود که ۱۰ تومان عوارض پرداخت می‌شود.

● ماشین‌های ۶ و ۵ از عوارضی رد شده و ماشین ۶ به خیابان سمت راست و ماشین ۵ به خیابان سمت چپ و به پشت ماشین ۴ منتقل می‌شوند و در این مجموعاً ۲۰ تومان به عوارضی پرداخت می‌شود.

● ماشین‌های ۳، ۴ و ۵ که در خیابان سمت چپ و به همین ترتیب قرار دارند از عوارضی رد شده و به‌ترتیب در پارکینگ قرار می‌گیرند و بعد از آنها ماشین شماره ۶ از خیابان سمت راست به عوارضی رفته و از آن‌جا به پارکینگ منتقل می‌شود. در این حالت نیز مجموع عوارض پرداخت شده برابر ۴۰ تومان می‌باشد. با توجه به حالت‌بندی فوق مجموع کل عوارض برابر ۴۰ + ۲۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۶۰ یعنی ۱۴۰ تومان به‌دست می‌آید.

۳۷. ابتدا با یک بار فشار دادن دکمهٔ نمایش، اعداد نشان داده شده را وارد ماشین حساب کرده و آنها را با هم جمع می‌کنیم، معلوم است که حاصل این جمع برابر $\frac{n(n+1)}{2} - (x+y)$ خواهد بود. از آن‌جا که مقدار $x + y$ حداقل برابر ۳ و حداکثر برابر $2n - 1$ می‌باشد. بنابراین حاصل عدد به‌دست آمده بین

$\frac{(n-۲)(n-۱)}{۲}$ و $\frac{(n-۲)(n+۳)}{۲}$ خواهد شد. فرض می‌کنیم آن حاصل جمع برابر α باشد. در این‌صورت در نابرابریِ $\frac{(n-۲)(n-۱)}{۲} \le \alpha \le \frac{(n-۲)(n+۳)}{۲}$ برای n بیش از دو جواب به‌دست نخواهد آمد. بار دیگر با فشار دادن دکمۀ نمایش، هر یک از اعداد نشان داده شده را به‌توان ۲ رسانده و با هم جمع می‌کنیم. می‌دانیم مجموع مربع اعداد از ۱ تا n برابر $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$ می‌باشد، بنابراین با توجه به محدودیت به‌دست آمده برای n در حالت قبلی، برای $x^۲+y^۲$ دو مقدار یافت می‌شود که با تشکیل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، مقادیر x و y به‌صورت منحصربه‌فرد پیدا می‌شود. به‌عنوان مثال فرض می‌کنیم مجموع داده‌ها برابر ۱۰۰۰ و مجموع مربع داده‌ها برابر ۳۰۴۷۰ باشد در آن صورت:

$$\frac{(n-۲)(n-۱)}{۲} \le ۱۰۰۰ \le \frac{(n-۲)(n+۳)}{۲} \Rightarrow n=۴۵ \text{ یا } n=۴۶$$

اگر $n=۴۵$ آنگاه:

$$۱+۲+۳+...+۴۵=\frac{۴۵\times۴۶}{۲}=۱۰۳۵ \Rightarrow x+y=۳۵$$

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+...+۴۵^۲=\frac{۴۵\times۴۶\times۹۱}{۶}=۳۱۳۹۵ \Rightarrow x^۲+y^۲=۹۲۵$$

در این حالت برای x و y جواب منحصر به‌فرد ۳۰ و ۵۰ به‌دست می‌آید.

و اما اگر $n=۴۶$ آنگاه:

$$۱+۲+۳+...+۴۶=\frac{۴۶\times۴۷}{۲}=۱۰۸۱ \Rightarrow x+y=۸۱$$

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+...+۴۶^۲=\frac{۴۵\times۴۷\times۹۳}{۶}=۳۳۵۱۱ \Rightarrow x^۲+y^۲=۳۰۴۱$$

در این حالت برای x و y جواب‌های صحیحی در محدودۀ از ۱ تا ۴۶ به‌دست نمی‌آید.

۳۸. اگر x نمایشگر آن باشد که وزنۀ x را در کفۀ دوم قرار دهیم و نیز $\cancel{x}$ نمایشگر آن باشد که وزنۀ x را از آن کفه برداریم، آنگاه الگوریتم توزین به شکل زیر خواهد بود:

$$۲۰, ۲۰, ..., ۲۰, \cancel{۲۰}, ۱۰, ۱۰, ..., ۱۰, \cancel{۱۰}, ۵, ۵, ..., ۵, \cancel{۵}, ۲, ۲, ..., ۲, \cancel{۲}, ۱$$

چون وزنه ۲۰ کیلویی آخر برداشته می‌شود. بنابراین تعداد ۱۰ ها نمی‌تواند بیش از ۲ باشد، به‌همین دلیل تعداد ۵ ها و ۲ ها نیز نمی‌تواند بیش از ۲ باشد. بنابراین الگوریتم بیشترین توزین به شکل زیر می‌باشد:

$$۲۰, ۲۰, ۲۰, ۲۰, ۲۰, \cancel{۲۰}, ۱۰, ۱۰, \cancel{۱۰}, ۵, ۵, \cancel{۵}, ۲, ۲, \cancel{۲}, ۱$$

۳۹. شکل داده شده از سه مؤلفه a، b و c تشکیل شده است. برای ساختن شبکه مطلوب باید به یکی از دو شکل $a \to b \to c$ و یا $a \to b \leftarrow c$ برسیم که تعداد کل حالات رسیدن به هر یک از آنها به‌ترتیب به شکل زیر به‌دست می‌آید:

I) $a \to b \to c$

- انتخاب یک مؤلفه از سه مؤلفه برای آنکه نقش a را بازی کند (این کار به ۳ طریق ممکن است).
- انتخاب یک رأس از رئوس آن برای آنکه از آن رأس فلشی خارج شود (این کار نیز به ۳ طریق ممکن است).
- انتخاب یک مؤلفه از دو مؤلفه باقی‌مانده برای آنکه نقش b را بازی کند (این کار به ۲ طریق ممکن است).
- انتخاب یک رأس از رئوس b برای آنکه فلشی به آن وارد شود (به ۳ طریق).
- انتخاب یک رأس از رئوس b برای آنکه فلشی از آن خارج شود (به ۳ طریق).
- انتخاب یک رأس از رئوس c برای آنکه فلش خارج شده از b به آن وارد شود (به ۳ طریق).

طبق اصل ضرب تعداد کل طُرق در این حالت برابر $۳ \times ۳ \times ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۳$ یعنی ۴۸۶ می‌شود.

II) $a \to b \leftarrow c$

- انتخاب یک مؤلفه از سه مؤلفه برای آنکه نقش b را بازی کند (به ۳ طریق). [البته مشخص است که دو مؤلفه a و c هم‌نقشند.]
- انتخاب یک رأس از رئوس a و یک رأس از رئوس c برای آنکه فلش‌هایی از آنها خارج شود (۳×۳ طریق).
- انتخاب یک رأس از رئوس b برای وارد شدن فلش خارج شده از a و یک رأس (نه لزوماً متمایز از قبلی) از رئوس b برای وارد شدن فلش خارج شده از c (۳×۳ طریق).

در این حالت نیز مجموع کل طرق برابر $۳^۲ \times ۳^۲ \times ۳$ یعنی ۲۴۳ می‌شود.

با توجه به حالت‌بندی فوق جواب مورد نظر $۲۴۳ + ۴۸۶$ یعنی ۷۲۹ به‌دست می‌آید.