پاسخ تشریحی

دوازدهمین المپیاد کامپیوتر

۱. هر عضوی از U وجودش در سه مجموعهٔ A، B و C یکی از چهار حالت زیر را می‌تواند داشته باشد، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $۴^{۵}$ یا $۲^{۱۰}$ می‌باشد.

A	B	C
✓	✓	✓
✓	—	—
—	✓	—
—	—	—

۲. چون مجموع اعداد موجود در مربع‌های A، B و C با مجموع اعداد موجود در مربع‌های A، D و C برابر است، بنابراین مجموع دو عدد موجود در B با مجموع دو عدد موجود در D برابر است. به همین ترتیب معلوم می‌شود که مجموع دو عدد موجود در یک مربع با مجموع دو عدد موجود در هر مربع دیگری برابر است که این مجموع برابر با ۱۹ می‌باشد. لذا اعداد ۱، ۲، ...، ۱۸ را به ۹ دستهٔ (۱ , ۱۸)، (۲ , ۱۷)، ... ، (۹ , ۱۰) دسته‌بندی کرده و آنها را به !۹ طریق بین ۹ مربع تقسیم کرده و سپس هر زوج را به !۲ طریق در مثلث‌های موجود در هر مربع قرار می‌دهیم. که تعداد کل روش‌ها $۹! \times ۲^{۹}$ خواهد شد.

A	B
D	C

۳. بهترین حالت ممکن آن است که دورتادور شبکه، ششلول‌بندها ایستاده و هر کدام از آنها به سمت بیرون شلیک کنند که در این صورت تعداد آنها برابر $n^{۲} - (n - ۲)^{۲}$؛ یعنی $۴n - ۴$ خواهد شد.

منبع: المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)، تألیف رسول حاجی زاده، انتشارات دانش پژوه، ۱۳۸۵

۴. ابتدا سه عدد از هفت عدد را به $\binom{7}{3}$؛ یعنی ۳۵ طریق انتخاب کرده و آنها را به‌ترتیب صعودی در خانه‌های ۱، ۴ و ۷ قرار می‌دهیم، سپس دو عدد از چهار عدد را به $\binom{4}{2}$ یعنی ۶ طریق انتخاب کرده و آنها را به‌ترتیب صعودی در خانه‌های ۲ و ۵ قرار می‌دهیم، و در نهایت نیز دو عدد باقی‌مانده را به‌ترتیب صعودی در خانه‌های ۳ و ۶ قرار می‌دهیم. بنابراین جواب مورد نظر 6×35؛ یعنی ۲۱۰ می‌باشد.

۵. یکی از رئوس از درجهٔ واحد را انتخاب و آن را با یکی از سه رنگ موجود رنگ می‌کنیم. رأس متصل به آن، سپس رأس متصل به دومی و ... را به دو طریق می‌توانیم رنگ کنیم، بنابراین تعداد روش‌های مطلوب برابر $2^{11} \times 3$؛ یعنی ۶۱۴۴ خواهد شد.

۶. حرکت دو دور کامل انجام یافته است که آن را به‌صورت ردیفی، به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$\boxed{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{5}, \underline{6}, \underline{7}, \boxed{8}, 1, \boxed{2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{5}, \underline{6}, \underline{7}, \underline{8}, \boxed{1}$

در نمایش فوق $\boxed{x}$ نشانگر آن است که در جایگاه x توقف یقیناً انجام شده است و $\underline{y}$ نشانگر آن است که جایگاه y قابل توقف است. اگر تعداد پرش‌های دور اول صفر باشد آن حرکت به $\binom{6}{0}$؛ یعنی ۱ طریق ممکن است. اگر تعداد پرش‌های دور اول یک بار باشد انتخاب آن جایگاه به $\binom{6}{1}$؛ یعنی ۶ طریق ممکن است. اگر تعداد پرش‌های دور اول دو بار باشد انتخاب آن دو جایگاه به $\binom{6}{2} - 5$؛ یعنی ۱۰ طریق ممکن است و بالاخره اگر تعداد پرش‌های دور اول سه بار باشد انتخاب آن سه جایگاه به ۴ طریق (۲۴۶ یا ۲۴۷ یا ۲۵۷ یا ۳۵۷) ممکن است که مجموع کل آن طرق برابر ۲۱ می‌شود. معلوم است که تعداد پرش‌های دور اول ۴ یا بیشتر نمی‌تواند باشد. تعداد طرق پرش‌ها در دور دوم مستقل از دور اول نیز برابر ۲۱ می‌شود که طبق اصل ضرب تعداد کل طرق برابر 21×21؛ یعنی ۴۴۱ خواهد شد.

۷. اگر خانه‌های موجود در خانه‌های قطر اصلی را به‌ترتیب با رنگ‌های ۱، ۲، ۳ و ۱ رنگ‌آمیزی کنیم سایر خانه‌ها به ناچار رنگ‌هایی پیدا می‌کنند که به‌صورت لاتین در جدول نمایش داده شده‌اند.

۱	3	2	1
3	۲	1	3
2	1	۳	2
1	3	2	۱

۸. S باید هر دو عضو ۱ و ۸ را داشته باشد. از بین اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ تعدادی می‌توانند در S نباشند، اگر این تعداد برابر ۰ باشد به $\binom{۶}{۰}$؛ یعنی ۱ طریق ممکن است. اگر این تعداد برابر ۱ باشد به $\binom{۶}{۱}$؛ یعنی ۶ طریق ممکن است. اگر تعداد مورد نظر ۲ باشد به ۵ - $\binom{۶}{۲}$؛ یعنی ۱۰ طریق ممکن است. و بالاخره اگر تعداد اشاره شده برابر ۳ باشد به ۴ طریق ممکن است. یادآوری می‌شود که از هر دو عضو متوالی حداقل یکی در S موجود است. بنابراین تعداد کل حالات برابر ۲۱ می‌باشد.

۹. هر مربع واحد یک قطر اصلی و یک قطر فرعی و کل شبکه ۹ قطر اصلی و ۹ قطر فرعی دارد که برای رسیدن به منظور لازم است یک قطر اصلی و یک قطر فرعی رسم شود. انتخاب این دو قطر به $\binom{۹}{۱} \times \binom{۹}{۱}$؛ یعنی ۸۱ طریق ممکن است.

۱۰. اگر رنگ‌آمیزی کامل شده باشد با تغییر رنگ هر یک از ۸ نقطهٔ ردیف اول (فقط یک نقطه) رنگ تمامی نقاط بالای آن از جمله رنگ نقطهٔ موجود در ردیف ۵ تغییر می‌کند، بنابراین در آخرین حرکت که از آنِ مهدی است، او می‌تواند نقطهٔ آخر از ۸ نقطهٔ ردیف اول را چنان رنگ‌آمیزی کند که رنگ نقطهٔ موجود در ردیف ۵ رنگ مورد دلخواه او باشد.

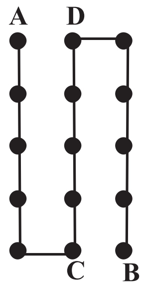
۱۱. اگر در خانهٔ بالا و سمت چپ جدول عدد ۱ و در خانهٔ پایین سمت راست جدول عدد m + n - ۱ را قرار دهیم آنگاه جدول به‌صورت منحصربه‌فرد، به شکل مقابل پر خواهد شد:

۱	۲	۳	•••	n
۲	۳	۴	•••	n+۱
۳	۴	۵	•••	n+۲
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
m	m+۱	m+۲	•••	m+n-۱

۱۲. در بعضی حالات خاص می‌توان با دانستن اعداد بعضی از خانه‌ها، عدد موجود در خانه‌ای را کشف کرد ولی در حالت کلی جواب مورد نظر برابر mn می‌باشد. برای رد چهار گزینهٔ دیگر می‌توانید جدول ۲ × ۲ را بررسی کنید.

۱۳. خانه (۱ , ۲) به دو طریق قابل پر شدن می‌باشد (۰ و یا ۲) و هر یک از ستون‌های چهارگانه دیگر متناسب با ستون قبلی خود به سه طریق می‌توانند پر شوند، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $۳^۴ \times ۲$ یعنی ۱۶۲ می‌باشد.

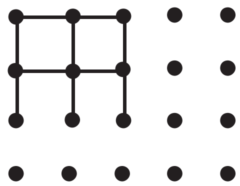
۱۴. کسی که در نوبتش با ۲ سنگ‌ریزه روبه‌رو شود یکی از آن دو را برداشته و برنده می‌شود. بنابراین به‌ازای $n = ۲$ نفر اول برنده می‌شود. به‌ازای $n = ۳$ نفر اول به‌ناچار ۱ سنگ‌ریزه برداشته و نفر دوم با ۲ سنگ‌ریزه مواجه شده و برنده می‌شود. به‌ازای $n = ۴$ نفر اول ۱ سنگ‌ریزه برداشته و نفر دوم با ۳ سنگ‌ریزه مواجه شده و بازنده می‌شود. به‌ازای $n = ۵$ نفر اول ۱ سنگ‌ریزه برداشته و نفر دوم با ۴ سنگ‌ریزه مواجه شده و برنده می‌شود. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که اگر تعداد سنگ‌ریزه‌ها زوج باشد نفر اول و در غیر این صورت نفر دوم برنده خواهد شد.



۱۵. شکل مقابل شکلی است که از هر نقطهٔ آن می‌توان به نقطهٔ دیگری رفت و کمترین پاره‌خط ممکن را نیز داراست (۱۴ پاره‌خط). معلوم است که با حذف هر پاره‌خط دلخواهی از آن دو نقطه یافت خواهند شد که به هم مسیری نداشته باشند، بنابراین لازم است به شکل فوق یک یا چند پاره‌خط اضافه کنیم. اگر مجاز بودیم از پاره‌خط‌های غیر واحد نیز استفاده کنیم می‌توانستیم A را به B وصل کنیم که در این صورت شکل به‌دست آمده (پانزده ضلعی فضایی) خاصیت مورد نظر را داشت، ولی چون مجاز به استفاده از پاره‌خط‌های غیر واحد نیستیم به ناچار B را به C و A را به D وصل می‌کنیم که شکل حاصل خاصیت مورد نظر را خواهد داشت و در ضمن دارای ۱۶ پاره‌خط به‌طول واحد می‌باشد.

۱۶. الگوریتم رسیدن از (۸۴ , ۳۵) به (۹۱ , ۴۹) به شکل زیر می‌باشد:

$$(۸۴,۳۵) \longrightarrow (۴۹,۳۵) \longrightarrow (۱۴,۳۵) \longrightarrow (۱۴,۲۱) \longrightarrow (۱۴,۷)$$
$$\longrightarrow (۲۱,۷) \longrightarrow (۲۸,۷) \longrightarrow (۳۵,۷) \longrightarrow (۴۲,۷)$$
$$\longrightarrow (۴۲,۴۹) \longrightarrow (۹۱,۴۹)$$



۱۷. اگر شبکهٔ مقابل را چهار بار به ماشین بدهیم شکل مطلوب به دست خواهد آمد.

۱۸. تعداد شهرهایی که هر دو لوله‌اش از یک مرکز باشد ۰، ۲، ۴ یا ۶ می‌تواند باشد که تعداد طرق لوله‌کشی در هر یک از چهار حالت فوق به‌ترتیب $\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$ خواهد شد که مجموع تمام آن طرق ۱۴۱ می‌شود.

۱۹. هر یک از مؤلفه‌های نقاط سه بار افزایش و یک بار کاهش می‌یابد. مختصات نقاط A_1، A_2 و A_3، ...، A_{10} به‌ترتیب به شکل (۱ , ۰)، (۳ , ۲)، (۲ , ۳)، (۰ , ۵)، (۴ , ۹)، (۹ , ۴)، (۱۵ , ۱۰)، (۱۰ , ۱۵)، (۱۷ , ۸)، (۱۶ , ۲۵)، (۲۵ , ۱۶)، (۳۵ , ۲۶) خواهد بود.

۲۰. در هر مرحله دو گردو به کل گردوها اضافه و یا دو گردو از کل گردوها کم می‌شود، بنابراین اگر کل گردوها فرد باشد در نهایت نیز فرد، و اگر کل گردوها زوج باشد در نهایت نیز کل گردوها زوج خواهد بود. مجموع کل گردوها در حالات a، b، c و d به‌ترتیب فرد، زوج، فرد و زوج می‌باشد، بنابراین a به b، a به d، c به b و c به d قابل تبدیل نیستند. و اما a به c و نیز b به d قابل تبدیلند که نحوهٔ تبدیل هر یک به شکل زیر می‌باشد:

نحوهٔ تبدیل a به c: اولی را رد کرده و پس از آن هر زوج متوالی را انتخاب کرده و گردو به آنها اضافه می‌کنیم.

- اولی، دومی و سومی را رد کرده و پس از آن هر زوج متوالی را انتخاب کرده و گردو به آنها اضافه می‌کنیم.
- اولی، دومی، سومی، چهارمی و پنجمی را رد کرده و پس از آن هر زوج متوالی را انتخاب کرده و گردو به آنها اضافه می‌کنیم.

اگر الگوریتم فوق را ادامه دهیم به حالت c خواهیم رسد.

نحوهٔ تبدیل b به d: زوج‌های (۲ , ۱)، (۴ , ۳)، ...، (۵۰ , ۴۹)، (۵۱ , ۵۰)، (۵۳ , ۵۲)، ...،

(۹۸ , ۹۹) را انتخاب کرده و به هر یک از اعضای ۲۵ زوج اول یک گردو اضافه و از هر یک از اعضای ۲۵ زوج دیگر یک گردو بر می‌داریم که به دنبالهٔ زیر خواهیم رسید:

۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ... , ۴۹ , ۵۰ , ۵۰ , ۵۰ , ۵۱ , ... , ۹۵ , ۹۶ , ۹۷ , ۹۸

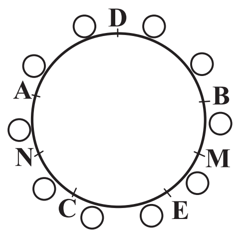
● زوج‌های (۲ , ۳)، (۴ , ۵)، ...، (۴۸ , ۴۹) را انتخاب کرده و به هر یک از اعضای آن زوج‌ها یک گردو اضافه و زوج‌های (۵۱ , ۵۲)، (۵۳ , ۵۴)، ...، (۹۸ , ۹۹) را انتخاب کرده و از هر یک از اعضای آن یک گردو بر می‌داریم که به دنبالهٔ زیر خواهیم رسید،

۳ , ۴ , ۵ , ... , ۴۹ , ۵۰ , ۵۰ , ۵۰ , ۵۰ , ۵۰ , ۵۱ , ... , ۹۵ , ۹۶ , ۹۷

با تکرار الگوریتم فوق پس از مدتی به دنبالهٔ متقارن زیر می‌رسیم:

۵۰ , ۵۱ , ۵۰ , ... , ۵۰ , ۵۱ , ۵۰ , ۵۱ , ۵۰ , ۵۰ , ۵۰ , ۵۱ , ۵۰ , ۵۱ , ۵۰ , ... , ۵۰ , ۵۱ , ۵۰

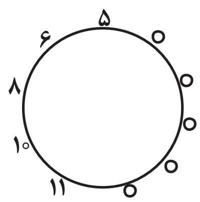
باز با تکرار آن الگوریتم به دنبالهٔ d خواهیم رسید.



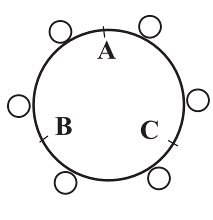
۲۱. برای تولید a هر یک از کمان‌های AB، BC، CD، DE و EA سه بار و سپس کمان AB را ۴ بار دیگر و کمان MN را ۱۴ بار انتخاب می‌کنیم.

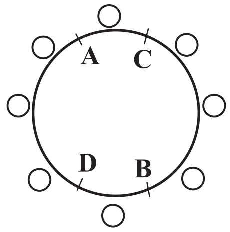
وضعیت b قابل تولید نیست.

کمان‌هایی که شامل هر دو خانه ۱۲ و ۴ باشند مجموعاً حداکثر ۴ بار به‌کار می‌روند. بنابراین کمان‌هایی که شامل ۱۲ بوده ولی شامل ۴ نباشند حداقل برابر ۸ می‌باشد (چنین کمانی فقط کمانی می‌تواند باشد که هر چهار عدد ۱۲، ۹، ۸ و ۸ را در بر دارد). بنابراین کمان یاد شده دقیقاً ۸ بار و کمان ۹ و ۱۲ و ۴ و ۹ دقیقاً ۱ بار به‌کار می‌رود. اگر گردوهای اضافه شده را کم کنیم به حالت مقابل می‌رسیم که قابل تولید نیست.



برای تولید وضعیت c هر یک از کمان‌های بزرگ AB، BC و CA را ۵۱ بار انتخاب می‌کنیم.





برای تولید وضعیت d کمان سمت راست AB را ۱ بار، کمان سمت راست CD را ۲ بار و بالاخره کمان سمت چپ AB را ۴ بار انتخاب می‌کنیم.

۲۲. اگر مقدار کالای تحویلی به راست و پایین از کارخانهٔ A را به‌ترتیب a و b بنامیم آنگاه اگر مقدار کالای اضافه شده به خاطر a در هر یک از ۴۹ نقطهٔ موجود را به‌صورت xa نمایش دهیم، در هر یک از آن ۴۹ نقطه مقدار x به شکل زیر پیدا می‌شود که در جدول ارائه شده هر عدد برابر مجموع دو عدد بالا و سمت چپ خود می‌باشد (غیر از ستون و سطر آخر)

۰	۱	۱	۱	۱	۱	۰
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۰
۰	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۰
۰	۱	۴	۱۰	۲۰	۳۵	۰
۰	۱	۵	۱۵	۳۵	۷۱	۰
۰	۱	۶	۲۱	۵۶	۱۲۶	۰
۰	۰	۰	۰	۰	۰	

مجموع کل اعداد جدول فوق برابر ۴۶۱ می‌شود. برای b نیز جدولی مشابه جدول فوق یافت می‌شود. با در نظر گرفتن a و b اولیه مقدار مادهٔ دریافتی توسط B برابر $(a+b) \times ۴۶۲$؛ یعنی ۲۳۱۰۰ می‌شود که با توجه به‌صورت مسأله مقدار کالای تولیدی ۲۳۱۰۰×۲؛ یعنی ۴۶۲۰۰ به‌دست می‌آید.

۲۳. برای رسیدن از A به B یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

I) چهار حرکت راست (R)، یک حرکت پایین (L) و سه حرکت بالا (U). تعداد دنباله‌های متشکل از چهار R، یک L و سه U که هر دنباله متناظر به یک مسیر مطلوب می‌باشد برابر $\binom{۸}{۱}\binom{۷}{۳}\binom{۴}{۴}$؛ یعنی ۲۸۰ می‌باشد.

II) پنج حرکت راست (R)، یک حرکت چپ (L) و دو حرکت بالا (U). تعداد دنباله‌های متشکل از پنج R، یک L و دو U که هر دنباله متناظر به یک مسیر مطلوب می‌باشد برابر $\binom{۸}{۱}\binom{۷}{۵}\binom{۲}{۲}$؛ یعنی ۱۶۸ می‌باشد.

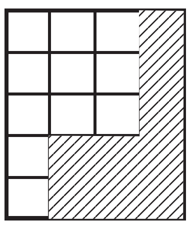
معلوم است که تعداد کل مسیرهای مطلوب برابر ۱۶۸ + ۲۸۰؛ یعنی ۴۴۸ می‌باشد.

۲۴. فرض می‌کنیم حرکت اول به سمت راست باشد در این صورت برای رسیدن به BC ده واحد طی خواهد شد که آن را به‌صورت aaaaaaaaaa نمایش می‌دهیم. هدف قرار دادن سه علامت به نشانهٔ مکان‌های تغییر جهت در بین a ها می‌باشد که این امر به $\binom{۹}{۳}$؛ یعنی ۸۴ طریق امکان‌پذیر است (بین هر دو a ی متوالی یک جا خالی برای قرار دادن مکان نما وجود دارد و بین ده عدد a مجموعاً نه جا خالی وجود دارد). اگر حرکت اول به سمت بالا باشد نیز برای رسیدن به BC به ۸۴ طریق می‌توان عمل کرد که مجموع کل مسیرهای مطلوب ۸۴ + ۸۴؛ یعنی ۱۶۸ خواهد شد.

۲۵. می‌دانیم تعداد کل جایگشت‌ها برابر !۷ می‌باشد. در $\frac{۱}{۷}$ از جایگشت‌ها رقم اول ۱، در $\frac{۱}{۷}$ از آنها رقم اول ۲، ... و بالاخره در $\frac{۱}{۷}$ از جایگشت‌ها رقم اول ۷ می‌باشد که در این صورت $\sum|\pi_i - i|$ بر رقم اول کل جایگشت‌ها $(۶+...+۲+۱+۰)\times ۶!$؛ یعنی $۶!\times ۲۱$ خواهد شد. این مجموع بر ارقام دوم، سوم، ... و هفتم نیز به‌ترتیب برابر ۱۶، ۱۳، ۱۲، ۱۳، ۱۶ و ۲۱ می‌باشد، بنابراین:

$$\bar{x} = \frac{\sum|\pi_i - i|}{۷!} = \frac{۶!\times(۲۱+۱۶+۱۳+۱۲+۱۳+۱۶+۲۱)}{۷!} = ۱۶$$

۲۶. گزاره‌های درست را با خانهٔ سیاه و گزاره‌های غلط را با خانه سفید نمایش می‌دهیم (مانند شکل زیر).



با ارتفاع خانه‌های سیاه ستون‌ها یک دنبالهٔ چهار عضوی می‌سازیم. دنبالهٔ متناظر به شکل ارائه شده ۵ , ۲ , ۲ , ۰ می‌باشد، معلوم است که با شرایط مسأله همهٔ دنباله‌های به‌دست آمده صعودی خواهند بود. تعداد ۰ های دنباله را x_0، تعداد ۱ های دنباله را x_1 ... و بالاخره تعداد ۵ های دنباله را x_5 می‌نامیم که در این صورت به معادلهٔ $x_0+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=۴$ می‌رسیم که در مجموعه اعداد نامنفی

$\begin{bmatrix} ۹ \\ ۵ \end{bmatrix}$؛ یعنی ۱۲۶ جواب دارد، به‌ازای هر جوابی از معادله یک دنبالهٔ صعودی و به‌ازای هر دنباله‌ای صعودی یک جواب مطلوب برای جدول به دست می‌آید.

۲۷. اولاً در هر مرحله دو عضو از اعضای دنباله کم می‌شود، بنابراین برای آن که در انتهای کار فقط یک عدد باقی بماند لازم است تعداد اعضای دنباله فرد باشد. ثانیاً می‌دانیم زوجیت عدد $a+b+c$ با زوجیت عدد $a+c-b$ یکی است، بنابراین برای آن که در انتهای کار عددی زوج باقی بماند لازم است مجموع اعداد زوج باشد. ثالثاً با تکرار عمل اشاره شده صرف نظر از آن که a، b و c کدام سه عدد متوالی باشند عدد نهایی برای دنبالهٔ $x_9, \dots, x_3, x_2, x_1$، عدد $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots - x_8 + x_9$ می‌باشد.

تنها دنباله‌ای از دنباله‌های داده شده که در هر سه شرط فوق صدق می‌کند دنبالهٔ زیر می‌باشد:

(۸, ۷, ۵, ۷, ۳, ۶, ۷, ۷, ۴)

۲۸. برای آن که شخص پس از ۴ حرکت به نقطهٔ A برگردد باید یکی از سه حالت زیر اتفاق بیافتد:

I) شخص روی یک لوزی حرکت کند. احتمال آن که حرکت اول، دوم، سوم و چهارم شخص مطلوب باشد به‌ترتیب $\frac{۶}{۶}$، $\frac{۴}{۶}$، $\frac{۱}{۶}$ و $\frac{۱}{۶}$ می‌باشد که در این صورت احتمال رسیدن به مقصد با طی کردن یک لوزی برابر $\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۴}{۶}\times\frac{۶}{۶}$؛ یعنی $\frac{۴}{۲۱۶}$ خواهد بود.

II) شخص یک پاره‌خط به طول ۲ (نه لزوماً پاره‌خط راست) را طی کرده و همان مسیر را برگردد که در این صورت احتمال مطلوب بودن حرکات اول، دوم، سوم و چهارم به‌ترتیب برابر $\frac{۶}{۶}$، $\frac{۵}{۶}$، $\frac{۱}{۶}$ و $\frac{۱}{۶}$ خواهد بود. بنابراین احتمال رسیدن به مقصد به طریق اشاره شده برابر $\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۶}{۶}$؛ یعنی $\frac{۵}{۲۱۶}$ خواهد بود.

III) ابتدا شخص یکی از ۶ پاره‌خط اطراف خود را به‌صورت رفت و برگشت طی کرده و سپس همین عمل را با همان پاره‌خط یا با پاره‌خط دیگر تکرار کند، که در این صورت احتمال مطلوب بودن هر یک از حرکات چهارگانه او به‌ترتیب $\frac{۶}{۶}$، $\frac{۱}{۶}$، $\frac{۶}{۶}$ و $\frac{۱}{۶}$ و در کل $\frac{۶}{۲۱۶}$ می‌باشد.

با در نظر گرفتن سه حالت ممکن احتمال رسیدن به مقصد $\frac{۶}{۲۱۶}+\frac{۵}{۲۱۶}+\frac{۴}{۲۱۶}$؛ یعنی $\frac{۱۵}{۲۱۶}$ یا $\frac{۵}{۷۲}$ می‌باشد.

۲۹. سطر اول به !۳ طریق قابل پر شدن می‌باشد. بدون آن که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود فرض می‌کنیم جدول مورد نظر مطابق شکل مقابل باشد که در این صورت خانه (۳ ,۲) به دو حالت پر می‌شود، یا با ۳ و یا با ۴.

۱	۳	۲	۴
	۱		
		۱	
			۱

درحالت اول جدول به شکل «الف» و در حالت دوم جدول به شکل «ب» در می‌آید.

۱	۳	۲	۴
	۱	۴	
		۱	
			۱

شکل الف

۱	۳	۲	۴
	۱	۳	
		۱	
			۱

شکل ب

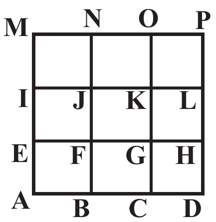
جدول الف فقط به یک حالت ولی جدول ب به سه حالت می‌تواند پر شود، بنابراین جواب مورد نظر ۳ × !۳ + ۱ × !۳ یا ۲۴ می‌باشد.

۳۰. در مرحلهٔ اول ۴، در مرحلهٔ دوم ۹، در مرحلهٔ سوم ۲۵ و در مرحلهٔ چهارم ۳۶ کارت می‌توان بر روی میز با شرایط مسأله قرار داد که در این صورت تعداد کل کارت‌ها برابر ۳۶ + ۲۵ + ۹ + ۴ + ۱ ؛ یعنی ۷۵ خواهد شد.

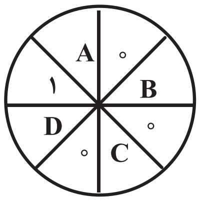
به‌راحتی می‌توانید بررسی کنید که تعداد کل کارت‌های روی میز پس از n مرحله برابر عبارت زیر می‌باشد:

$$\left\lfloor \frac{۳}{۳} \right\rfloor^۲ + \left\lfloor \frac{۷}{۳} \right\rfloor^۲ + \left\lfloor \frac{۱۱}{۳} \right\rfloor^۲ + \left\lfloor \frac{۱۵}{۳} \right\rfloor^۲ + \left\lfloor \frac{۱۹}{۳} \right\rfloor^۲ + \dots + \left\lfloor \frac{۴n+۳}{۳} \right\rfloor^۲$$

۳۱. تعداد پاره‌خط‌های افقی ۱۲ و نیز تعداد پاره‌خط‌های عمودی نیز ۱۲ می‌باشد، بنابراین اگر از هر پاره‌خط فقط یک بار عبور کنیم مدت زمان لازم ۲ × ۱۲ + ۱ × ۱۲؛ یعنی ۳۶ ثانیه خواهد بود. اما شرط لازم برای آن که بتوان یک گراف را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ و با عبور از هر یال دقیقاً یک بار چنان رسم کرد که نقطهٔ پایان همان نقطهٔ شروع باشد، آن است که درجهٔ همه رئوس آن زوج باشد که در گراف رسم شده درجهٔ ۸ رأس؛ یعنی رئوس B، C، E، H، I، L، N و O فرد بوده و به‌ازای هر دو رأس فرد که به یکدیگر وصل هستند یک حرکت اضافی لازم است. اگر حرکت به‌صورت زیر باشد، مدت زمان لازم ۴۲ ثانیه خواهد بود.



A-B-F-G-C-B-C-D-H-G-K-L-H-L-P-O-K-J-N-O-N-M-I-J-F-E-I-E-A

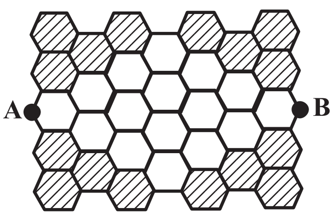


۳۲. هر یک از خانه‌های A، B، C و D را به دو طریق می‌توان پر کرد. بنابراین تعداد کل شیوه‌ها برابر $۲^۴$؛ یعنی ۱۶ می‌شود. اما حالت (۰ , ۰ , ۰ , ۱) برای (D , A , B , C) مانند حالت (۱ , ۰ , ۰ , ۰) و حالت (۰ , ۰ , ۱ , ۰) مانند حالت (۰ , ۱ , ۰ , ۰) می‌باشد. بنابراین جواب مطلوب ۱۴ می‌باشد.

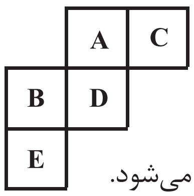
۳۳. به راحتی قابل درک است که $T(\phi) = \phi$ و $T(S) = S$. حاصل $T(\{۱\})$، $T(\{۲\})$، $T(\{۳\})$، $T(\{۴\})$، $T(\{۵\})$ و $T(\{۶\})$ را به دلخواه $\{۱\}$، $\{۲\}$، $\{۳\}$، $\{۴\}$، $\{۵\}$ و $\{۶\}$ در نظر می‌گیریم که این کار به !۶؛ یعنی ۷۲۰ طریق ممکن است. حال اگر فرض کنیم $T(\{x_۱\}) = \{y_۱\}$، $T(\{x_۲\}) = \{y_۲\}$، ...، $T(\{x_n\}) = \{y_n\}$، از مجموعه‌های دو عضوی به بعد عضو متناظر به هر زیرمجموعه به‌صورت منحصربه‌فرد به شکل زیر پیدا می‌شود:

$$T(\{x_{i_۱}, x_{i_۲}, \dots, x_{i_k}\}) = \{y_{i_۱}, y_{i_۲}, \dots, y_{i_k}\}$$

۳۴. اگر بخواهیم رنگ خانه‌ای عوض شود از خانهٔ مجاور آن به آن وارد شده و از آن خارج می‌شویم و اگر خانه‌ای خانهٔ گذر باشد و نخواهیم رنگ آن عوض شود به آن وارد شده و پس از خروج از آن دوباره به آن خانه برگشته و خروج از آن را تکرار می‌کنیم.



۳۵. خانه‌هایی که هاشور خورده‌اند در مسیر مطلوب شرکت ندارند. شکل باقی‌مانده یک شبکهٔ ۴ × ۴ می‌باشد که تعداد مسیرهای کوتاه موجود از گوشهٔ چپ و پایین آن به گوشهٔ راست و بالای آن برابر $\binom{۸}{۴}$؛ یعنی ۷۰ می‌باشد.



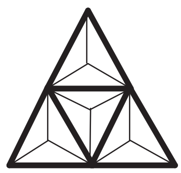
۳۶. دو حالت زیر پیش می‌آید:

I) در خانه‌های A و B دو عدد ۱ و ۲ باشد که در این حالت آن دو خانه را به !۲ و سه خانهٔ دیگر را به !۳ طریق می‌توان پر کرد که کل حالات !۳ × !۲؛ یعنی ۱۲ می‌شود.

II) در خانه‌های A و B دو عدد ۱ و ۳ باشد که در این حالت آن دو خانه را به !۲ طریق می‌توان پر کرد (مثلاً ۱ = A و ۳ = B). عدد ۲ وابسته به این که ۱ = A یا ۱ = B به‌صورت منحصربه‌فرد در یک خانه به‌ترتیب در C یا E قرار خواهد گرفت و دو عدد ۴ و ۵ نیز به دو حالت در خانه‌های باقی‌مانده می‌توانند قرار گیرند. بنابراین در این حالت نیز تعداد کل حالات ۲ × ۲ ؛ یعنی ۴ می‌شود.

با توجه به دو قسمت قبل تعداد کل جواب‌ها ۴ + ۱۲؛ یعنی ۱۶ می‌شود.

۳۷. با در نظر گرفتن ۴ مثلث پر رنگ در شکل زیر حالات زیر پیش می‌آید:



I) تعداد مثلث‌های سیاه صفر باشد که این کار به $\binom{12}{0}$ ؛ یعنی ۱ طریق ممکن است.

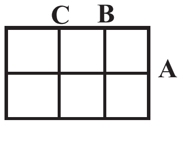
II) تعداد مثلث‌های سیاه یک باشد که این کار به $\binom{12}{1}$ ؛ یعنی ۱۲ طریق ممکن است.

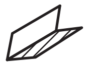
III) تعداد مثلث‌های سیاه دو باشد که در این صورت آن دو مثلث نمی‌توانند در داخل یک مثلث پر رنگ قرار گیرند. رنگ کردن دو مثلث با شرط فوق به $\binom{4}{2}\times\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}-3$ ؛ یعنی ۵۱ طریق ممکن است.

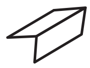
IV) تعداد مثلث‌های سیاه ۳ باشد که در این صورت آن سه مثلث در داخل سه مثلث پر رنگ متمایز قرار داشته و به $\binom{4}{3}\times\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}-\binom{3}{1}\binom{6}{1}$ ؛ یعنی ۹۰ طریق امکان‌پذیر است.

V) تعداد مثلث‌های سیاه ۴ باشد که در این صورت آن چهار مثلث در داخل چهار مثلث پر رنگ متمایز قرار داشته و به $\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}$ ؛ یعنی ۵۴ طریق ممکن است.

مجموع کل حالات به‌دست آمده ۵۴ + ۹۰ + ۵۱ + ۱۲ + ۱ ؛ یعنی ۲۰۸ می‌شود.



۳۸. خطوط جدول کاغذی را مطابق شکل نام‌گذاری می‌کنیم. طریقهٔ ساخت گزینه‌های ب، ج، د و ه را با دنباله نشان می‌دهیم، در این نمایش‌ها X ؛ یعنی این که کاغذ را از خط X به‌طرف داخل؛ یعنی به شکل  و x؛ یعنی این که کاغذ را

از خط X به‌طرف بیرون؛ یعنی به شکل  تا کنیم:

ب) Cab

ج) cba

د) CAb

ه) Abc

۳۹. بزرگترین عدد ساخته شده ۶۳ و کوچکترین عدد ساخته شده ۳۶- می‌باشد و همهٔ اعداد صحیح بین ۳۶- تا ۶۳ را نیز می‌توان ساخت. پس ۱۰۰ عدد متمایز با شرایط داده شده ساخته می‌شوند؛ یعنی از تخته ۱۰۰ عدد پاک شده است در حالی که تعداد اعداد نوشته شده بر روی تخته ۲ × ۲ × ۳ × ۲ × ۲ × ۳؛ یعنی ۱۴۴ می‌باشد، بنابراین ۱۰۰ - ۱۴۴؛ یعنی ۴۴ عدد بر روی تخته باقی می‌ماند.

۴۰. در هر یک از نقاط پر رنگ وجود یک نگهبان الزامی است به شرطی که حرکت را از شاخهٔ بالایی A شروع کنیم.