به نام خدا

پاسخ تشریحی
مرحله اول بیست و یکمین دوره المپیاد کامپیوتر
سال ۱۳۸۹

۱) گزینه‌ی (ج) درست است.

مجموعه‌ی اول: ۹، ۱۰، ۸+۳، ۷+۵ و ۱+۲+۴+۶ پس می شود.

مجموعه‌ی دوم: مجموع اعداد ۱ تا ۱۰ برابر ۵۵ است در حالیکه مجموع این اعداد ۵۶ است .پس نمی شود.

مجموعه‌ی سوم: ۵، ۳+۹، ۱+۲+۴+۱۰و ۶+۷+۸ پس می شود.

مجموعه‌ی چهارم: برای ساختن عدد ۵ باید از اعداد کوچکتر یا مساوی ۵ استفاده کرد. از آنجا که مجموع همه‌ی این اعداد ۱۵ است پس برای ۳ تا ۵ باید ۱+۴، ۳+۲ و ۵ استفاده کنیم. حال اعداد ۶ تا ۱۰ باقیمانده‌اند که مجموع هردوتا از آنها بیشتر از ۱۰ است، پس نمی‌توان.

۲) گزینه‌ی (ب) درست است.

۱۰ گلدان را طوری در نظر می‌گیریم که اولی و چهارمی و هفتمی و دهمی گل داشته باشند. در اینصورت بین هر دو گلدان پر، دو گلدان خالی وجود دارد. حال باید ۵ گلدان دیگر را در بین این گلدان‌ها قرار دهیم. که معادل با حل معادله‌ی زیر است:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$$

که در آن تمامی متغیرها نامنفی هستند. جواب این معادله نیز برابر با ۱۲۶ است.

۳) گزینه‌ی (د) درست است.

۶ توپ لازم و کافی است.

- اثبات لزوم شرط: سه دایره‌ی داخلی را در نظر بگیرید. اگر هرکدام از آنها باقی بماند (مثلا دایره‌ی پایین راست)، باید ۴تا از همسایه‌هایش حذف شوند (اگر هرکدام از دو دایره‌ی داخلی دیگر باقی بماند حداقل ۶ دایره حذف می‌شود). پس از حذف این رئوس ۴ راس با درجه‌ی سه باقی می‌ماند که باید حداقل دو راس دیگر حذف شوند که در نتیجه در مجموع ۶ دایره حذف شد. اگر همه‌ی رئوس میانی نیز حذف شوند ۶ راس درجه‌ی سه باقی مانده که با حذف هر راس حداکثر دو تا از آنها کم می‌شوند. در نتیجه حداقل باید سه راس دیگر حذف شوند.
- اثبات کافی بودن شرط: از مثلث داخلی (به طول دو) که برعکس است تمام رئوس آن را حذف کنید. در نتیجه سه مثلث به طول یک باقی می‌مانند که شرایط مسئله را دارند.

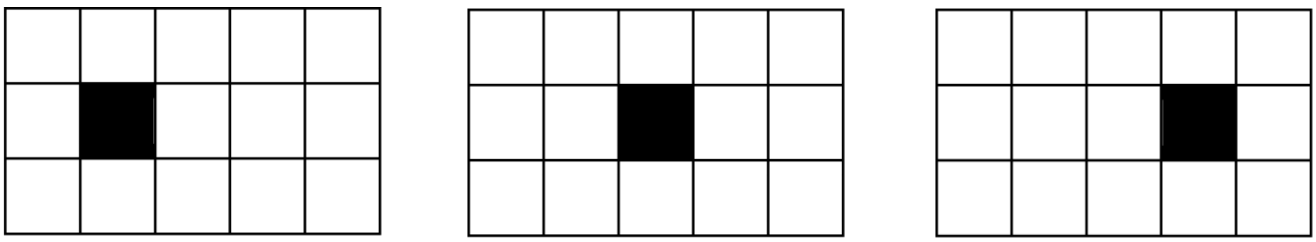
۴) گزینه‌ی (ه) درست است.

برای بدست آوردن تعداد حالات رسیدن به هر عدد کافیست مقدار حالات قبل از آن را بدانیم. درواقع برای رسیدن به عدد k یا از $\mathrm{k}-1$ و یا از $\frac{\mathrm{k}}{2}$ (در صورت زوج بودن k) استفاده کرده‌ایم و تعداد حالات رسیدن به ۵ و ۱۰ نیز صفر است. پس جدول تعداد حالات رسیدن به اعداد بصورت زیر است:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۱	۱	۱	۲	۰	۱	۱	۳	۳	۰	۰	۱	۱	۲	۲	۵	۵	۸	۸	۸

۵) گزینه‌ی (الف) درست است.

تعداد جدول‌هایی که شامل آن شکل هستند را می‌شماریم. این جدول‌ها یکی از سه حالت زیر را دارند:



تعداد حالات هرکدام 2^6 است، ولی تنها در یک حالت وضعیت اول و سوم یکسان خواهند شد. در نتیجه تعداد کل حالات نامطلوب برابر است با: $3 \times 2^6 - 1$. پس جواب مسئله برابر $2^{15} - (3 \times 2^6 - 1)$ می‌باشد که ۳۲۵۷۷ می‌شود.

۶) گزینه‌ی (د) درست است.
سه نقطه در بالا چپ و سه نقطه در پایین راست ناحیه‌ی همرنگ تشکیل داده‌اند که رنگ آنها با یکدیگر فرق دارد. پس از این رنگ‌آمیزی دو نقطه باقی می‌مانند که یکی یک حالت و دیگری دو حالت دارد. در نتیجه در کل 12 حالت خواهیم داشت.

۷) گزینه‌ی (ج) درست است.
فرض کنید خانه‌های جدول ورودی را به ترتیب از چپ به راست و سپس از بالا به پایین شماره‌گذاری کرده‌ایم.
در شکل زیر در هر خانه از جدول شماره خانه‌هایی از جدول ورودی که در آن خانه از جدول خروجی مجموعشان بدست می‌آید نوشته شده است:

۲،۵	۱،۶،۳	۲،۷،۴	۳،۸
۱،۶،۹	۲،۵،۷،۱۰	۳،۶،۸،۱۱	۴،۷،۱۲
۵،۱۰،۱۲	۶،۹،۱۱،۱۴	۷،۱۰،۱۲،۱۵	۸،۱۱،۱۶
۹،۱۴	۱۰،۱۲،۱۵	۱۱،۱۴،۱۶	۱۲،۱۵

حالا با انتخاب خانه‌های تیره و جمع زدن اعداد داخل آنها در جدول خروجی هر عدد از جدول ورودی یک بار آمده است و مجموع این سه عدد مجموع کل را می‌دهد.

۸) گزینه‌ی (الف) درست است.

این کشور با دو رنگ، قابل رنگ‌آمیزی است. اعدادی که مجموع ارقام آنها فرد هستند را به رنگ ۱ و بقیه اعداد (با مجموع ارقام زوج) را به رنگ ۲ رنگ‌آمیزی می‌کنیم. با این روش هر دو عدد مجاوری (چون دقیقا در یک رنگ متفاوت‌اند) در دو دسته قرار دارند و ناهمرنگ هستند.

۹) گزینه‌ی (ج) درست است.

چون درجه هر راس ۷ است پس جواب کمتر از ۷ نیست و با روش زیر با ۷ رنگ گراف را رنگ می‌کنیم پس ۷ رنگ لازم و کافی است.

روش:

اگر دو عدد فقط در بیت iام متفاوت بودند با رنگ i یال بین آن‌ها را رنگ می‌کنیم و چون هر بیت دو حالت دارد هر عدد دقیقا با یک عدد دیگر فقط در بیت iام متفاوت است پس هر راس از هر رنگ دقیقا یک یال خواهد داشت.

۱۰)گزینه‌ی (د) درست است.

جاده‌هایی که برای تفاوت بیت اول کشیده شده‌اند را گل‌کاری می‌کنیم. هر عدد با یک عدد دیگر در بیت اول متفاوت است پس همه‌ی شهرها پوشش داده می‌شوند. همچنین هر جاده می‌تواند دو شهر را پوشش دهد و در کل 2^{10} شهر داریم پس 2^9 جاده گل‌کاری شده لازم است.

۱۱)گزینه‌ی (ه) درست است.

2^{11} شهر داریم که به هریک ۱۱ جاده متصل است. پس در کل $2^{10} \times 11$ جاده داریم و با چراغانی‌کردن هر شهر شرط برای ۱۱ جاده متصل به آن برقرار می‌شود. پس 2^{10} شهر چراغانی شده لازم است.

حال اگر شهرهایی که شماره‌ی آنها تعداد زوجی یک دارد را چراغانی کنیم شرط سوال برای همه‌ی جاده‌ها برقرار می‌شود. زیرا هر جاده بین دو شهر کشیده شده است که شماره‌ی آنها به جز در یک بیت یکسان است. پس زوجیت تعداد یک‌های آنها با هم متفاوت است و یکی از آنها چراغانی شده است. بنابراین 2^{10} شهر چراغانی کافی است.

۱۲)گزینه‌ی (ه) درست است.

همه‌ی سکه‌های با یک شماره می‌توانند در یک ردیف باشد. در نتیجه جواب برابر ۱۶ است.

۱۳)گزینه‌ی (الف) درست است.

تمام سکه‌ها با عدد برابر پشت سر هم قرار دارند. برای اینکه دوتا از آنها در یک سطر باشند باید بین آنها ۱۵ سکه وجود داشته باشد که چون از هر عدد ۱۶ سکه داریم چنین چیزی ممکن نیست. پس در یک سطر هیچ دو سکه‌ی یکسانی وجود ندارد.

۱۴)گزینه‌ی (د) درست است.

اگر در ۱۶ خانه‌ی اول، ۱۶ خانه‌ی دوم و ۱۶ خانه‌ی سوم ۵ سکه با شماره‌ی یک و در ۱۶ خانه‌ی چهارم یک سکه با شماره‌ی یک داشته باشیم در ردیف اول ۷ عدد سکه با شماره یک قرار می‌گیرد.

در یک قسمت ۴×۴ جدول اگر بخواهیم حداکثر تعداد سکه‌های یکسان در یک ردیف یک باشد حداقل یک سکه، اگر بخواهیم این مقدار ۲ باشد حداقل به ۵ سکه و در کل اگر بخواهیم این مقدار i باشد به$4i-3$ سکه یکسان نیاز داریم. حال اگر بخواهیم ۸ عدد سکه‌ی یکسان در یک ردیف داشته باشیم ابتدا در هر ۴×۴ یک سکه قرار می‌دهیم. از این به بعد برای اضافه کردن یک واحد به تعداد حداکثر سکه‌های موجود در یک سطر باید این مقدار را برای یکی از ۴×۴ها زیاد کنیم. یعنی برای هر واحد زیاد کردن آن به ۴ سکه نیاز داریم و چون ۱۲ سکه دیگر داریم این مقدار به ۸ نمی‌رسد.

۱۵)گزینه‌ی (الف) درست است.
اعداد ما حداکثر ۵ بیتی هستند. پس خروجی هم ۵ بیتی است. همچنین اگر دو عدد در تمام بیت‌ها متمایز باشند جمع آنها ۳۱ می‌شود (چرا؟). پس اعدادی که علی به دستگاه می‌دهد حداقل در یک بیت یکسان‌اند و در نتیجه عدد خروجی نمی‌تواند ۳۱ باشد.
حال اگر اعداد ۱ و ۳۱ را به دستگاه بدهد عدد خروجی ۳۰ می‌شود. پس ۳۰ بیشترین مقدار خروجی است.

۱۶)گزینه‌ی (ج) درست است.
مقدار s در هر مرحله این‌گونه بدست می‌آید:
می‌دانیم درصورتی که در XOR یک عدد دوبار ظاهر شود خنثی می‌شود و همانند آن است که ظاهر نشده است. در نتیجه در طی این عملیات تمامی اعداد به جز عدد آخر دوبار ظاهر می‌شوند و در نتیجه در انتها عدد نهایی یعنی ۱۳۹۰ باقی می‌ماند.

۱۷)گزینه‌ی (ج) درست است.
این الگوریتم مجموع XOR زوج‌های متوالی از ۱ تا ۹۰ را حساب می‌کند.
کم‌ارزش‌ترین بیت دو عدد متوالی باهم متفاوت‌اند. پس XOR آنها حتما فرد است.
مقدار این XOR برای ۱ و ۲ برابر ۳ و برای سایر زوج اعداد نیز بزرگتر از صفر است. پس حاصل جمع XORها از ۹۰ بیشتر خواهد بود. چون همه‌ی این اعداد فرد هستند و تعداد آنها ۹۰تا است مجموع آنها زوج می‌شود.
تنها گزینه‌ای که این شرایط را دارد گزینه‌ی (ج) است.

۱۸)گزینه‌ی (ب) درست است.
برای دو ستون تعداد مکعب‌های ستون کوچکتر ۱، ۲ یا ۳ می‌باشد که تعداد حالات چیدن مکعب‌ها در این وضعیت‌ها به ترتیب ۷۲۰، ۷۲۰ و ۳۶۰ می‌باشد که مجموع آنها ۱۸۰۰ می باشد.
برای سه ستون تعداد مکعب‌های ستون‌ها ۲-۲-۲ یا ۱-۲-۳ و یا ۱-۱-۴ است.
تعداد حالات چیدن مکعب‌ها در حالت اول ۱۲۰، در حالت دوم ۷۲۰ و در حالت سوم ۳۶۰ است.
پس مجموع تعداد حالات برای سه ستون ۱۲۰۰ می باشد.

۱۹)گزینه‌ی (د) درست است.
برای رساندن به حالت صعودی: مکعب ۵ باید از بالای ۱ خارج شود و برای این‌کار دو حرکت لازم است (جابجایی ۲ و ۵). سپس هر مکعب در طی یک حرکت می‌تواند سر جای خود قرار گیرد (۷ حرکت)
برای رساندن به حالت نزولی: مکعب ۴ باید از بالای ۶ و مکعب ۲ باید از بالای ۵ خارج شود. سپس هر مکعب در طی یک حرکت می‌تواند سر جای خود قرار گیرد (۷ حرکت).

۲۰)گزینه‌ی (ب) درست است.
جواب ۱۰ حرکت است.
شرط لازم: اگر بخواهیم "۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱" را به "۱، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲" تبدیل کنیم به ۱۰ حرکت نیاز داریم. چون با ۵ حرکت مکعب ۱ روی میز قرار می‌گیرد و هیچ کدام از دیگر مکعب‌ها به درستی روی هم قرار نگرفته‌اند. پس ۵ حرکت دیگر لازم است تا همگی روی مکعب ۲ قرار گیرند.
شرط کافی: برای ساختن هر ترتیبی ابتدا با حداکثر ۵ حرکت ۶ ستون یک مکعبی می‌سازیم و سپس با ۵ حرکت مکعب‌ها را به ترتیب روی مکعبی که باید زیر باشد می‌چینیم.

۲۱)گزینه‌ی (الف) درست است.
با یک شهر که ممکن نیست. چون باید هم جاده‌ی خاکی و هم آسفالت به خود شهر برود که در این صورت شهر نه می‌تواند استقلالی باشد نه پرسپولیسی. ولی برای دو شهر به سادگی می‌توان یک مثال ساخت که شامل یک شهر استقلالی و یک شهر پرسپولیسی باشد. کافیست که مسیر خاکی شهر را تغییر دهد و مسیر آسفالت به همان شهر برگردد.

۲۲)گزینه‌ی (ب) درست است.
جواب ۱۳۸۹ است.
شرط لازم: در گراف، کوچکترین دوری را بیابید که شامل حداقل یک (خ) باشد. می‌دانیم تعداد (خ)های دور حداقل ۱۳۸۹تا است در غیر اینصورت با هر مضربی از آن عدد نیز می‌توان به شهر استقلالی رسید. از طرفی چون کوچکترین دور را در نظر گرفتیم هیچ شهر تکراری نداریم، پس تعداد رئوس حداقل ۱۳۸۹ است
شرط کافی: ۱۳۸۹ راس در نظر بگیرید که با جاده‌های خاکی یک دور کامل ساخته‌اند. مسیرهای آسفالت هر شهر به خودش ختم می‌شود. بدین ترتیب شهر پایتخت استقلالی است و بقیه‌ی شهرها پرسپولیسی خواهند بود.

۲۳)گزینه‌ی (ب) درست است.
وضعیت هر حالت باید در راسی که قرار دارد ذخیره شود در مجموع ۱۰ حالت برای راه آسفالت و ۲۰ حالت برای راه آسفالت وجود دارد. این دو حالت تنها در شهر مقصد با یکدیگر مشترک هستند. از طرفی یک حالت برای شروع وجود دارد (حالت صفر) و یک حالت هم باید وجود داشته باشد که در غیر حالات مورد نظر به آنها برود و بین حالات قبلی تکرار نشود. پس در مجموع حداقل ۳۱ شهر مورد نیاز است.
مثال: شهر پایتخت به شهر استقلالی دو مسیر دارد. یکی به طول ۲۰ که با راه‌های خاکی هرکدام به بعدی متصل است و دیگری به طول ۱۰ که با راه‌های آسفالت پشت سرهم قرار دارند. مسیرهای اشتباه نیز به حالت غیرمجاز می‌رود که از قبل یک راس برای آن در نظر می‌گیریم.

۲۴)گزینه‌ی (ه) درست است.
فرض می‌کنیم جدول را شطرنجی رنگ کرده‌ایم. در جایگاه‌های فرد ربات‌ها در یک رنگ و در جایگاه‌های زوج در رنگ دیگر هستند. اگر تعداد یک‌های خانه‌های همرنگ در یک گزینه با بقیه گزینه‌ها متفاوت باشد آن ربات دروغ‌گو خواهد بود:
الف:۴ و ۲
ب:۴ و ۲
ج:۴ و ۲
د:۴ و ۲
ه:۳ و ۳
پس گزینه‌ی (ه) دروغ است.

۲۵)گزینه‌ی (ب) درست است.
تعداد یک‌ها در گزینه‌ی ب با بقیه فرق دارد. در نتیجه گزینه‌ی ب دروغ است.

۲۶)گزینه‌ی (الف) درست است.
همانند سوال ۲۶ عمل می‌کنیم. بازهم تعداد یک‌های جایگاه‌های فرد و زوج را با بقیه گزینه‌ها مقایسه می‌کنیم تا گزینه‌ی دروغ مشخص شود:
الف:۳ و ۱
ب:۰ و ۴
ج:۴ و ۰
د:۴ و ۰

ه: ۰ و ۴
پس گزینه‌ی (الف) دروغ است.

۲۷)گزینه‌ی (ه) درست است.
این الگوریتم برای عدد x آن را بگونه‌ای به مبنای ۲ می‌برد که رقم سمت راست پرارزش‌ترین بیت باشد پس در واقع مقداری دودیی عدد را متقارن می‌کند.

۲۸)گزینه‌ی (ه) درست است.
طبق ۲۷: ۴۴۴ در مبنای دو برابر با (۱۱۰۱۱۱۱۰۰) است که برعکس آن (۱۱۱۱۰۱۱) می‌شود که همان ۱۲۳ است.

۲۹)گزینه‌ی (ج) درست است.
ابتدا اعدادی که یکانشان صفر هست را حذف می‌کنیم. چرا که در طی این عملیات تعداد ارقام کمتری دارند و در نتیجه عدد نهایی کمتر از قبل خواهد شد.
در بین بقیه‌ی اول، اعداد متقارن (عددی که $R(A) = A$) را حذف می‌کنیم. از باقی اعداد دقیقا نصفشان زیبا هستند چرا که دو به دو با یکدیگر جفت هستند و پس از اعمال تغییر به دیگری تبدیل می‌شوند.
اعداد فرد: ۳۲ تا
اعداد متقارن فرد: رقم یکان این اعداد یک هست. در نتیجه باتوجه به اینکه طول عدد، بین ۱ تا ۶ باشد به ترتیب ۱، ۱، ۲، ۲، ۴ و ۴تا عدد متقارن داریم. در نتیجه تعداد آنها ۱۴تاست.
پس طبق نکات گفته شده تعداد اعداد زیبا برابر است با $\frac{32-14}{2} = 9$.

۳۰)گزینه‌ی (ب) درست است.
طبق نکاتی که در سوال ۲۹ گفته شد:
اعداد فرد: 2^{11}.
اعداد متقارن فرد: چون رقم سیزدهم این اعداد یک است پس ۱۱ رقم دیگر باقی می‌ماند که 2^6 عدد بدست می‌آید (۵ رقم دیگر بصورت یکتا مشخص می‌شوند).
در نتیجه تعداد اعداد زیبا برابر است با $\frac{2^{11}-2^6}{2} = 992$.