مرحله‌ی اول بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

این پاسخ‌ها با تلاش طراحان سوال‌ها و اعضای کمیته‌ی مرحله‌ی اول المپیاد کامپیوتر فراهم شده‌اند و ممکن است که کمبودها و خطاهایی در آن وجود داشته باشد. لطفا هرگونه پیشنهاد برای اصلاح یا تکمیل این پاسخ‌ها را از طریق سامانه‌ی اینترنتی http://inoi.ir به اطلاع کمیته‌ی ملی المپیاد کامپیوتر برسانید.

۱ کاغذی به ضخامت یک دهم میلی‌متر داده شده است. این کاغذ را بیست بار تا می‌زنیم. با هر بار تا زدن ضخامت کاغذ دو برابر می‌شود. ضخامت نهایی کاغذ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟ فرض کنید کاغذ به اندازه‌ی کافی برای تا زدن بزرگ است.

۱) ۲ میلی‌متر ۲) ۱۰۰ متر ۳) ۱ متر ۴) ۱۰ سانتی‌متر ۵) ۲ سانتی‌متر

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

ضخامت نهایی کاغذ برابر است با $2^{20} \times 10^{-4} = 104/8576$ متر. □

۲ می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۹ را در یک جدول ۳ × ۳ بچینیم طوری که اعداد هر سطر از چپ به راست و اعداد هر ستون از بالا به پایین به صورت صعودی مرتب باشند. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم، با این فرض که مکان عدد ۳ در جدول همانند شکل روبه‌رو از پیش تعیین شده است؟

		۳

۱) ۱۶ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۵ ۵) ۱۷

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

۱	۲	۳
۴		
		۹

مکان اعداد ۱، ۲، ۴ و ۹ همانند جدول روبه‌رو به صورت یکتا مشخص می‌شود. برای عدد ۵ دو انتخاب داریم. اگر ۵ در خانه‌ی (۱, ۳) قرار گیرد، ۶ در خانه‌ی (۲, ۲) خواهد بود و در نتیجه برای قرار دادن ۷ و ۸ دو راه وجود دارد. اگر ۵ در خانه‌ی (۲, ۲) قرار گیرد، هر یک از سه عدد دیگر می‌توانند در خانه‌ی (۲, ۳) قرار گیرند و سپس مکان دو عدد دیگر به صورت یکتا مشخص می‌شود. پس در کل به ۵ طریق می‌توان جدول را پر کرد. □

۳ کلاس اول مدرسه‌ی محمودآباد ۱۲ دانش‌آموز دارد. معلم کلاس قصد دارد دانش‌آموزان را به سه دسته تقسیم کند و بین هر دو دانش‌آموزی که هم‌دسته نیستند، یک مسابقه برگزار کند. اگر تقسیم‌بندی طوری انجام شود که تعداد مسابقات بیشینه شود، این بیش‌ترین تعداد چند تا است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸ ۵) ۶۶

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

بیش‌ترین تعداد زمانی حاصل می‌شود که سه گروه ۴ نفره داشته باشیم. در این حالت بین هر دو گروه ۱۶ مسابقه و در مجموع ۴۸ = ۱۶ × ۳ مسابقه انجام می‌شود. □

۴ روی محور اعداد حقیقی ۱۳۹۲ نقطه‌ی رنگی متمایز داده شده است که هر یک با یکی از ۹۲ رنگ موجود رنگ شده‌اند. یک بازه را «مینیمال رنگی» می‌گوییم اگر همه‌ی رنگ‌ها را پوشش دهد (یعنی از هر رنگی حداقل یک نقطه داخل آن باشد) و هیچ زیربازه‌ای از این بازه، همه‌ی رنگ‌ها را پوشش ندهد. حداکثر تعداد بازه‌های مینیمال رنگی چند تا است؟

۱) ۱ ۲) ۱۳۰۱ ۳) ۹۱ ۴) ۹۲ ۵) ۱۳۹۱

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

اگر n نقطه داشته باشیم که با یکی از k رنگ، رنگ شده باشند، جواب $n - k + ۱$ خواهد شد. با توجه به تعریف بازه‌ی مینیمال رنگی، هیچ دو بازه‌ی مینمال رنگی نقاط انتهایی یکسان ندارند. بنابراین هر بازه‌ی رنگی را می‌توان با نقطه‌ی شروع آن به طور یکتا مشخص کرد. در ضمن نقطه‌ی شروع بازه‌ی مینیمال رنگی نمی‌تواند بین $k - ۱$ نقطه‌ی پایانی باشد چرا که هر بازه‌ی مینیمال رنگی حداقل باید شامل k نقطه باشد. در نتیجه تعداد چنین بازه‌هایی $n - k + ۱$ خواهد شد. مثالی که دقیقا این تعداد بازه‌ی مینیمال رنگی داشته باشد دنباله‌ی متناوب زیر است که هر رنگ با یکی از اعداد ۱ تا k نمایش داده شده است: $۱, ۲, \ldots, k, ۱, ۲, \ldots, k, ۱, ۲, \ldots, k, \ldots$. □

۵ ما عادت کرده‌ایم وقتی عددی را می‌بینیم آن را به طور پیش‌فرض در مبنای ده تفسیر می‌کنیم. حال تصور کنید که استفاده از مبناهای ۲ تا ۱۰ به یک اندازه رایج است. در این حالت عدد ۱۲ را می‌توان به ۸ شکل مختلف (در مبناهای ۳ تا ۱۰) تفسیر کرد، اما عدد ۴۵۹ تنها به یک شکل قابل تفسیر است. تعداد اعداد از ۱ تا ۱۳۹۲ (در مبنای ده) که تنها به یک شکل قابل تفسیراند، چند تا است؟ دقت کنید که اعداد تک‌رقمی تنها به یک شکل قابل تفسیراند.

۱) ۳۴۹ ۲) ۲۷۱ ۳) ۴۴۰ ۴) ۳۵۸ ۵) ۳۴۸

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

باید تعداد اعدادی که حداقل یک رقم ۹ دارند را به همراه اعداد یک رقمی حساب کنیم. حالت‌بندی می‌کنیم.

- تعداد حالاتی که از ۱۳۹۰ کم‌تر نیستند: ۳
- تعداد حالاتی که بین ۱۳۰۰ تا ۱۳۸۹ هستند: ۹
- تعداد حالاتی که بین ۱۰۰۰ تا ۱۲۹۹ هستند: $۳۰۰ - ۳ \times ۹ \times ۹ = ۵۷$
- تعداد حالاتی که بین ۱ تا ۹۹۹ هستند: $۱۰۰۰ - ۹ \times ۹ \times ۹ + ۸ = ۲۷۹$

که مجموع این چهار عدد جواب است. □

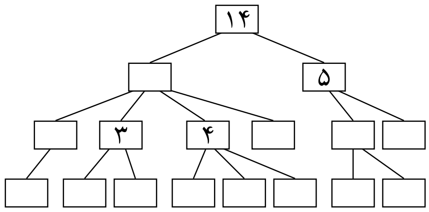
۶ جدولی ۱۳۹۲×۱۳۹۲ داریم که خانه‌ی $(۱, ۱)$ آن رنگ شده است. در هر مرحله جدول را از یکی از خطوط موازی اضلاع تا می‌کنیم. در صورتی که یک خانه‌ی رنگی روی یک خانه‌ی بی‌رنگ قرار گیرد، هر دو رنگی می‌شوند. پس از هر مرحله، جدول را به حالت اولیه برمی‌گردانیم. حداقل چند حرکت لازم است تا تمامی خانه‌های جدول رنگی شوند؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۱۱ ۵) ۲۲

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

برای رنگی شدن ستون اول دست کم ۱۱ تای افقی و برای رنگی شدن سطر اول دست کم ۱۱ تای عمودی مورد نیاز است و با این تعداد نیز به سادگی می‌توان به جدولی کاملا رنگی دست یافت. □

۷ درخت وراثت نموداری برای نشان دادن میزان ارثی است که به هر یک از اعضای یک خانواده طی سال‌ها رسیده است. فرض کنید تمام اموال هر فرد بین فرزندانش (در صورتی که فرزندی داشته باشد) تقسیم می‌شود. میزان ارث هر نفر عددی صحیح و نامنفی است. به چند طریق می‌توان درخت وراثت روبه‌رو را تکمیل نمود؟



۱) ۴۰۳۲ ۲) ۱۱۳۴ ۳) ۳۷۸۰ ۴) ۲۰۱۶ ۵) ۱۵۱۲

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

کافی است میزان اموال افرادی را مشخص کنیم که فرزندی ندارند (برگ‌های درخت ریشه‌دار). اموال بقیه‌ی افراد به صورت یکتا مشخص می‌شود. باید زیردرخت رئوسی که مقدارشان معلوم است را به صورت جداگانه حل کنیم و برای به دست آوردن جواب نهایی جواب زیر مسئله‌ها را در هم ضرب کنیم. برای مثال برای معلوم کردن برگ‌های مربوط به رأس با عدد ۱۴ باید مقدار $۱۴ - ۵ - ۴ - ۳ = ۲$ را بین دو برگ مربوطه پخش کنیم، که این کار به سه روش ممکن است. به همین ترتیب می‌توان تعداد روش‌های حل بقیه‌ی زیر درخت‌ها را پیدا کرد. جواب نهایی برابر با $۲۱ \times ۳ \times ۴ \times ۱۵ = ۳۷۸۰$ می‌باشد. □

۸ روی یک خط ۱۳۹۲ درخت قرار گرفته‌اند که فاصله‌ی هر دو درخت متوالی از هم ۱۰۰ واحد است. ارتفاع درخت‌ها یک عدد صحیح از ۱ تا ۱۳۹۲ است و ارتفاع هیچ دو درختی برابر نیست. ما می‌توانیم در هر گام یکی از درخت‌ها را انتخاب کرده، آن را ببریم. هر درخت پس از بریده شدن به سمت راست می‌افتد و در صورتی که به درخت‌های دیگری برخورد کند آن‌ها را نیز خواهد انداخت. دو درخت در صورتی برخورد می‌کنند که ارتفاع درخت افتاده بیش‌تر یا مساوی فاصله‌ی دو درخت باشد. با توجه به این که اطلاعی درباره‌ی ترتیب قرار گرفتن درخت‌ها نداریم، حداقل باید چند درخت را قطع کنیم تا تمامی درخت‌ها بیافتند؟

۱) ۱۲۹۲　　۲) ۶۹۶　　۳) ۵۰　　۴) ۱۰۰　　۵) ۳۷

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

در صورتی که درخت‌ها به ترتیب ارتفاع قرار گرفته باشند حداقل ۱۰۰ درخت باید قطع شوند. در حالت کلی نیز با تقسیم کردن خط به بازه‌هایی که ارتفاع درخت‌ها حداقل ۱۰۰ است می‌توان با قطع اولین درخت در هر بازه آن‌ها را انداخت. پس ۱۰۰ مرحله کافی است. □

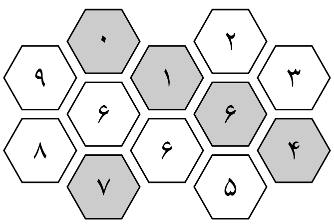
۹ در مسئله‌ی قبل، فرض کنید تعداد درخت‌ها ۵۰ و ارتفاع هر درخت یک عدد صحیح غیرتکراری از ۱ تا ۵۰ است. همچنین فاصله‌ی بین تمامی درخت‌ها عدد صحیح x است. در ضمن ترتیب چیدن درخت‌ها نیز در اختیار ما است. می‌خواهیم x را طوری تعیین کنیم که بتوان با یک برش تمامی درخت‌ها را انداخت. مقدار x حداکثر چند است؟

۱) ۱۶　　۲) ۱۸　　۳) ۱۹　　۴) ۲۰　　۵) ۱۷

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

افتادن هر درخت معادل با افتادن چند درخت دیگر خواهد بود در صورتی که ارتفاع آن از x بیش‌تر باشد. در نتیجه باید تعداد این چنین درخت‌هایی با ضریب انداختنشان (یک درخت می‌تواند چند درخت را بیاندازد) بیش‌تر از ۴۹ شود که به ازای $x = ۱۷$ چنین اتفاقی می‌افتد. □

۱۰ تعدادی شش‌ضلعی همانند شکل مقابل داریم که داخل هر خانه یک عدد نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان یکی از خانه‌هایی را که دقیقا شش همسایه دارد انتخاب کرد و تمام شش‌ضلعی‌های دور آن را در جهت عقربه‌های ساعت چرخاند. می‌خواهیم مجموع اعداد در خانه‌های خاکستری بیشینه شود. این مجموع بیشینه چند است؟ دقت کنید که در حین چرخش اعداد جابه‌جا می‌شوند ولی رنگ خانه‌ها ثابت می‌ماند.



۱) ۳۶　　۲) ۳۰　　۳) ۲۶　　۴) ۱۸　　۵) ۳۲

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

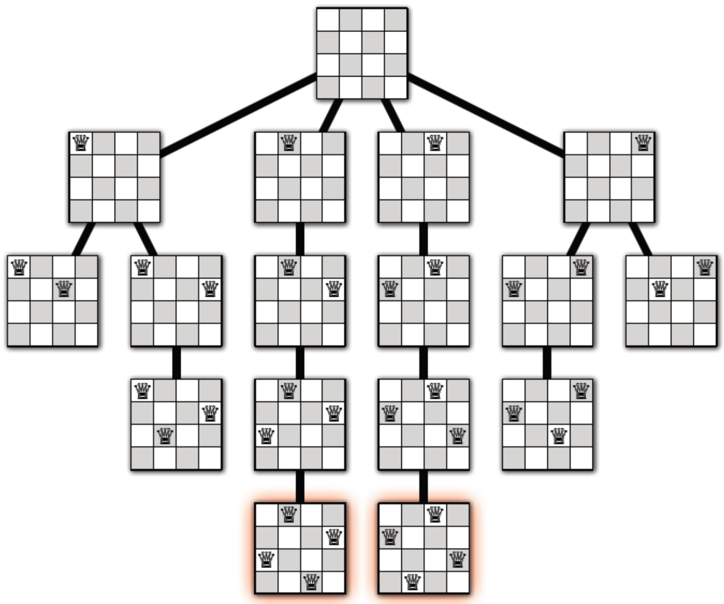
به جز خانه‌های وسط شش‌ضلعی‌ها تمامی اعداد را می‌توان به هر حالت دیگری رساند. در نتیجه می‌توان در ۵ خانه بیش‌ترین اعداد را قرار داد. □

۱۱ به چند حالت می‌توان چهار وزیر را روی یک صفحه‌ی شطرنج ۴×۴ قرار داد طوری که یک‌دیگر را تهدید نکنند؟ دو وزیر یک‌دیگر را تهدید می‌کنند اگر هم‌سطر، هم‌ستون یا هم‌قطر باشند. فرض کنید صفحه‌ی شطرنج ثابت است و نمی‌چرخد.

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۸ ۴) ۴ ۵) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

با رسم درخت حالات که در شکل زیر نمایش داده شده به عدد ۲ می‌رسیم.



□

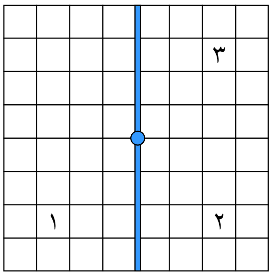
۱۲ یک صفحه‌ی شطرنج ۶×۶ داریم که یک مهره‌ی اسب در خانه‌ی (۱, ۱) آن قرار گرفته است. می‌دانیم که اسب به شکل L روی صفحه حرکت می‌کند. روی هر خانه حداقل تعداد حرکات لازم برای رسیدن اسب به آن خانه را نوشته‌ایم. بزرگ‌ترین این اعداد چند است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

در هر حرکت می‌توان حداکثر سه واحد به هدف نزدیک‌تر شد. در صورتی که بخواهیم به خانه‌ی (۶, ۶) جدول برسیم باید حداقل ۱۰ واحد حرکت کنیم که معادل حداقل ۴ حرکت اسب است. همچنین با بررسی خانه‌های نهایی جدول می‌توان مثالی آورد که با ۴ حرکت به تمام آن خانه‌ها رسید. □

۱۳ یک جدول ۸ در ۸ داریم. هر خانه یک خانه‌ی قرینه نسبت به نقطه‌ی وسط دارد. برای مثال خانه‌ی ۳ در شکل قرینه خانه‌ی ۱ نسبت به نقطه‌ی وسط می‌باشد. همچنین هر خانه یک خانه‌ی قرینه نسبت به خط عمودی مرکزی نیز دارد. برای مثال خانه‌ی ۲ قرینه‌ی خانه‌ی ۱ نسبت به خط عمودی مرکزی می‌باشد. می‌خواهیم این جدول را با ۳ رنگ، رنگ کنیم به شرطی که هر خانه‌ی این جدول حداقل با یکی از دو خانه‌ی قرینه‌ی خود (قرینه نسبت به خانه‌ی مرکز و قرینه نسبت به خط عمودی وسط) همرنگ باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟



۱) $۱۶^{۱۵}$ ۲) $۳^{۶۴}$ ۳) $۳^{۱۶}$ ۴) $۹^{۱۶}$ ۵) $۱۵^{۱۶}$

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

یک خانه را به همراه قرینه‌ی آن نسبت به خط عمودی و نسبت نقطه‌ی مرکز و همچنین به همراه قرینه‌ی نسبت به خط عمودی قرینه‌ی نسبت به مرکز آن را (در مجموع چهار خانه) را در نظر می‌گیریم. این چهار خانه یا همگی همرنگ هستند یا ضربدری همرنگ هستند و یا دوتای پایین همرنگ و دوتای بالا نیز همرنگ می‌باشند. پس در مجموع ۳ + ۶ + ۶ حالت داریم و چون تعداد این چهارتایی‌ها برابر ۱۶ می‌باشد در مجموع ۱۵ به توان ۱۶ حالت داریم. □

۱۴ برای مرتب‌سازی، عمل «ابرجابه‌جایی» را چنین تعریف می‌کنیم. در هر ابرجابه‌جایی، یک زیررشته‌ی دلخواه از دنباله‌ی داده‌شده را معکوس می‌کنیم. برای مثال دنباله‌ی ⟨۵ ,۲ ,۳ ,۴ ,۱⟩ با یک ابرجابه‌جایی مرتب می‌شود. کافی است زیررشته‌ی ⟨۲ ,۳ ,۴⟩ را معکوس کنیم. ولی برای مرتب‌سازی دنباله‌ی ⟨۱ ,۳ ,۲ ,۴⟩ دو ابرجابه‌جایی نیاز داریم. ابتدا کل دنباله را معکوس می‌کنیم تا به ⟨۴ ,۲ ,۳ ,۱⟩ برسیم. سپس زیررشته‌ی ⟨۲ ,۳⟩ را معکوس می‌کنیم. حداقل تعداد ابرجابه‌جایی که برای مرتب‌سازی هر دنباله‌ی دلخواه به طول ۴ کافی است، چند است؟

۱) در برخی حالات مرتب‌سازی با ابرجابه‌جایی ممکن نیست. ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

با حالت‌گیری و رسیدن به دنباله‌ی ⟨۲ ,۴ ,۱ ,۳⟩ جواب به دست می‌آید. □

۱۵ «جدول صفر و یک» به جدولی می‌گوییم که در هر خانه‌ی آن صفر یا یک قرار گرفته است. عملی را تعریف می‌کنیم که از روی یک جدول صفر و یک ۴ × ۴، یک جدول صفر و یک ۴ × ۴ دیگر را به این شکل می‌سازد که هر خانه‌ی جدول جدید برابر حاصل‌ضرب خانه‌های مجاور آن خانه در جدول قدیمی است (خانه مجاور یک خانه، خانه‌ای است که با آن خانه یک ضلع مشترک دارد). برای مثال با دو بار اعمال این عمل روی جدول زیر به «جدول تمام صفر» (جدولی که تمام خانه‌های آن صفر است) می‌رسیم.

۰	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۱

⟵

۰	۰	۰	۱
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۱

⟵

۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰

تعداد کل جدول‌های صفر و یک ۴ × ۴ که با تکرار این عمل روی آن‌ها به جدول تمام صفر نمی‌رسیم چند تا است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۵۱۱ ۳) ۱ ۴) ۰ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

دو حالت شطرنجی صفر و یک حالت مادر هستند که هر یک $۲^۸$ حالت را در بردارند که یک حالت تمام یک بین آن‌ها مشترک است. □

۱۶ تعداد رشته‌های ۱۰تایی از ارقام را بیابید که در هر یک از آن رشته‌ها هر رقم برابر با تعداد رقم‌های یک مجاورش باشد.

۱) ۲۰ ۲) ۱ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲ ۵) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

چند لم برای سادگی در زیر آمده است که اثبات آن‌ها دشوار نیست.

- لم ۱: هر رقم صفر یا یک یا دو است.
- لم ۲: مجاور رقم ۲ حتما یک است.
- لم ۳: هر بلوک از یک های متوالی تنها دو رقم یک دارد.
- لم ۴: اگر رقم صفر داشته باشیم کل رشته صفر است.
- لم ۵: تنها رشته قابل قبول صفر است!

پس پاسخ مسئله یک است. □

۱۷ تعداد رشته‌های ۱۰تایی از ارقام را بیابید که در هر یک از آن رشته‌ها هر رقم برابر با تعداد رقم‌های صفر مجاورش باشد.

۱) ۱۴ ۲) ۱۰ ۳) ۲۲ ۴) ۱۶ ۵) ۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

چند لم برای سادگی در زیر آمده است که اثبات آنها دشوار نیست.

- لم ۱: هر رقم صفر یا یک یا دو است.
- لم ۲: دو صفر مجاور نداریم.
- لم ۳: مجاور رقم ۲ حتما صفر است.
- لم ۴: بین هر ۳ رقم متوالی حداقل یکی صفر است.
- لم ۵: اگر جایگاه صفرها با خاصیت لم ۲ و ۴ مشخص شود، بقیه‌ی ارقام به طور یکتا به دست می آید.
- لم ۶: به ۱۶ طریق می‌توان جایگاه صفرها را بنا بر لم ۲ و ۴ مشخص کرد.

پس پاسخ ۱۶ است. □

۱۸ ۱۳۹۳ بادکنک را به ترتیب در یک ردیف قرار داده‌ایم. در هر مرحله می‌توانیم یکی از بادکنک‌ها را بترکانیم. فقط باید این شرط رعایت شود که هر بادکنکی که می‌ترکد تعداد بادکنک‌های سمت چپ و راست آن که ترکیده‌اند حداکثر یکی اختلاف داشته باشد. به چند طریق می‌توانیم این بادکنک‌ها را بترکانیم؟

۱) $۳^{۶۹۷}$ ۲) $۲^{۶۹۷}$ ۳) $۲^{۶۹۶}$ ۴) $۳^{۶۹۶}$ ۵) $۲^{۱۳۹۳}$

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

فرض کنید بادکنک ابتدا و انتها در دو حرکت اول نترکند، پس حداقل در حرکت سوم ترکیده‌اند و با توجه به این که حداقل یک طرف آن‌ها دو بادکنک ترکیده و طرف دیگر آنها هیچ بادکنکی نترکیده است به تناقض می‌رسیم. پس دو حرکت اول باید دو بادکنک ابتدا و انتها باشند. به همین ترتیب باقی بادکنک‌ها نیز باید بترکند. □

۱۹ خیکوله و خیکولتا روی جدول ۴ × ۴ روبه‌رو بازی زیر را انجام می‌دهند:

۰	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰

۱. ابتدا خیکوله سطرها را به دلخواه جابه‌جا می‌کند (سطرها را جایگشت می‌دهد).
۲. سپس ستون‌ها را به دلخواه جابه‌جا می‌کند (ستون‌ها را جایگشت می‌دهد).
۳. سپس خیکولتا تعداد جفت ۱ های مجاور را می‌شمارد (دو خانه‌ای که ضلع مشترک دارند مجاورند) و به تعداد آن به خیکوله شکلات می‌دهد.

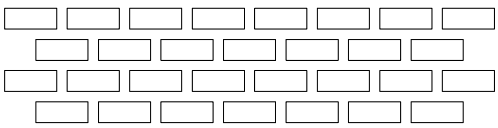
اگر خیکوله به بهترین نحو ممکن بازی کند چند شکلات می‌تواند به دست بیاورد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۷ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵ ۵) ۱۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

تعداد جفت‌های سطری و ستونی کنار هم جدا شمرده می‌شوند. سطری‌ها بهترین حالت ۷ تا و ستونی‌ها هم ۷ تا است. □

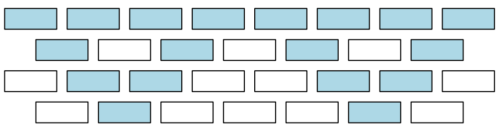
۲۰ تعدادی آجر همانند شکل مقابل داده شده‌اند. هر آجر روی یک یا دو آجر دیگر و یا روی زمین قرار دارد. آجری که روی زمین نیست تنها زمانی می‌افتد که آجر دیگری زیرش قرار نداشته باشد. می‌خواهیم تعدادی از آجرها را برداریم طوری که آجرهای سطر بالا برداشته نشوند و هیچ آجری نیافتد. در این صورت حداکثر چند آجر را می‌توان برداشت؟



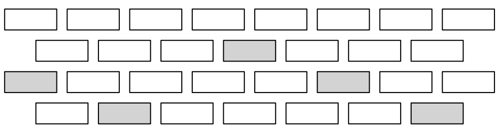
۱) ۱۱ ۲) ۱۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳ ۵) ۱۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

دو خانه‌ی گوشه‌ای جدول باید باقی بمانند و پس از نگه‌داشتن آن‌ها بقیه‌ی آجرها به صورت یکتا تعیین می‌گردند. در شکل مقابل آجرهایی که باید باقی بمانند با رنگ تیره و آجرهایی که می‌توان برداشت با رنگ سفید مشخص شده‌اند. □



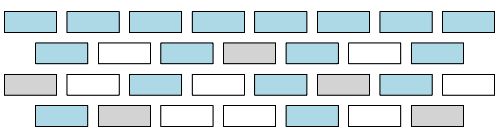
۲۱ همانند مسئله‌ی قبل آجرهایی همانند شکل روبه‌رو داریم، با این تفاوت که آجرهای خاکستری نباید برداشته شوند. در این صورت حداکثر چند آجر را می‌توان برداشت؟



۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

همانند مسئله‌ی قبلی ابتدا باید آجرهایی که باید باقی گذاشت را می‌گذاریم. سپس بین حالات ممکن که محدود است، حالتی را انتخاب می‌کنیم که بهترین نتیجه به دست آید. بهترین نتیجه همانند شکل روبه‌رو ۸ است. □



۲۲ جدولی ۱۳۹۲×۱۳۹۲ داریم. خانه‌های این جدول را به ترتیب با اعداد ۰ تا $۱۳۹۲^۲ - ۱$ به ترتیب سطری از بالا به پایین و سپس ستونی از چپ به راست شماره‌گذاری می‌کنیم. به این ترتیب خانه‌های سطر iام با اعداد $i \times ۱۳۹۲$ تا $(i+۱) \times ۱۳۹۲ - ۱$ از چپ به راست شماره‌گذاری شده‌اند. دو خانه از جدول را مجاور می‌نامیم در صورتی که در یک ضلع اشتراک داشته باشند و آن ضلع توسط هیچ‌کدام از آن دو خانه بسته نشده باشد. طریقه‌ی بسته شدن اضلاع جدول این‌گونه است که عدد نوشته شده در خانه را به صورت دودویی می‌نویسیم. در صورتی که این عدد کمتر از چهار رقم داشت با گذاشتن ۰ در پشت عدد، آن را چهار رقمی می‌کنیم. حال یک بودن هر کدام از چهار رقم اول این عدد باعث بسته شدن ضلع متناظرش می‌شود. ارقام اول تا چهارم به ترتیب با ضلع‌های بالا، راست، پایین و چپ آن خانه متناظرند. (رقم اول کم ارزش‌ترین رقم در نمایش دودویی است). یک حرکت مجاز را رفتن از خانه‌ای به یکی از خانه‌های مجاورش تعریف می‌کنیم. حال در جدول ساخته‌شده به یک مجموعه از خانه‌ها «همبند» می‌گوییم اگر هر دو خانه با انجام تعدادی حرکت مجاز از یک‌دیگر قابل دسترسی باشند. اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه‌ی همبند این جدول را محاسبه کنید.

۱) ۴۱۷۶ ۲) ۲۷۸۴ ۳) ۶۹۶۰ ۴) ۵۵۶۸ ۵) ۱۳۹۲

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

با توجه به این‌که ۱۳۹۲ بر ۱۶ بخش‌پذیر است، تمامی اعضای یک ستون به یک صورت ضلع‌های مجاورشان را می‌بندند. همچنین الگوی جدول در هر ۱۶ ستون تکرار می‌شود. بنابراین کافی است تنها ۱۶ ستون اول را بررسی کنیم. □

۲۳ دنباله‌ی $\langle ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰\rangle$ بر روی کاغذ نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان یکی از تغییرات زیر را روی دنباله اعمال کرد:

- تمامی اعداد داخل لیست در دو ضرب می‌شوند.
- یکی از اعداد دنباله انتخاب و به‌علاوه‌ی یک می‌شود.

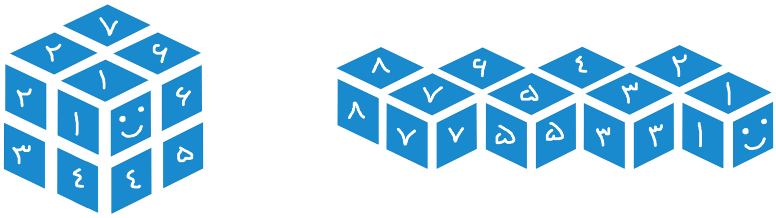
کم‌ترین تعداد مرحله برای رسیدن به دنباله‌ی $\langle ۸, ۳, ۱, ۵, ۱۱, ۷\rangle$ چند است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۷ ۴) ۱۵ ۵) ۱۶

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

کم‌ترین مرحله برابر است با مجموع تعداد بیت‌های ۱ در نمایش دودویی اعداد دنباله به علاوه‌ی بزرگ‌ترین xای که بزرگ‌ترین عدد دنباله از ۲^x بزرگ‌تر مساوی است. روش ساخت هم این‌گونه است که در مرحله‌ی اول اعداد که بیت x-ام آن‌ها یک است را به‌علاوه‌ی یک می‌کنیم و سپس کل اعداد را در دو ضرب می‌کنیم، در مرحله دوم اعدادی که بیت $x - ۱$-ام آن‌ها یک است را به‌علاوه‌ی یک می‌کنیم و سپس کل اعداد را در دو ضرب می‌کنیم. به همین ترتیب این کار را x بار انجام می‌دهیم. در آخر نیز اعدادی که بیت ۰-ام آن‌ها یک است، به‌علاوه‌ی یک می‌شوند. دقت کنید که بعد از آخرین مرحله‌ی اضافه کردن دیگر اعداد را در دو ضرب نمی‌کنیم. □

۲۴ مار کوچکی متشکل از ۸ مکعب به ضلع ۱ همانند شکل زیر داریم که از سر تا دم با شماره‌های ۱ تا ۸ شماره‌گذاری شده‌اند. هر دو مکعب پشت سر هم با مفصل کوچکی به هم وصل شده‌اند و فقط قابلیت چرخش نسبت به یک‌دیگر را دارند. این مار کوچک را به چند حالت مختلف می‌توان در یک جعبه‌ی مکعبی به ضلع ۲ جا داد؟ دو حالت مختلف در نظر گرفته می‌شوند اگر دو قطعه با شماره‌های مختلف از بدن مار در یک مکان از جعبه‌ی مکعبی قرار بگیرند. یعنی اگر دو حالت با چرخش جعبه‌ی مکعبی به هم تبدیل شوند، یکسان نیستند.



۱) ۱۹۲　۲) ۹۶　۳) ۴۸　۴) ۶۴　۵) ۱۴۴

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

انتخاب سر مار (مکعب شماره‌ی ۱) ۸ حالت دارد. انتخاب مکعب دوم مستقل از اولی ۳ حالت دارد و انتخاب مکعب سوم ۲ حالت. اما بعد از مکعب سوم حالت‌ها دیگر تقارن ندارند و نمی‌توان به این صورت شمرد. اما در کل بعد از انتخاب ۳ مکعب اول ۳ حالت ممکن است پیش بیاید. پس جواب برابر است با: $۱۴۴ = ۳ \times ۲ \times ۳ \times ۸$.
□

برنامه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

- مقدار s را برابر با ۰ قرار بده.
- به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, x$ عملیات زیر را انجام بده:
  - اگر x به i بخش‌پذیر بود، مقدار s را برابر با $s+i$ قرار بده.
- مقدار s را گزارش کن.

فرض کنید خروجی برنامه‌ی بالا برابر با $f(x)$ باشد. به طور مثال اگر x را برابر با ۴ قرار دهیم، به ازای $i=۱$، $i=۲$ و $i=۴$ مقدار s افزایش پیدا می‌کند. پس مقدار $f(۴)$ برابر با ۷ خواهد بود.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۵ مقدار $f(۴۴۱)$ برابر با چند است؟

۱) ۳۶۲　۲) ۷۴۰　۳) ۷۶۲　۴) ۳۰۰　۵) ۷۴۱

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

عدد ۴۴۱ برابر است با $۳^۲ \times ۷^۲$ که دارای ۹ مقسوم‌علیه است. باید جمع این ۹ عدد محاسبه شود. □

۲۶ مقدار $f(۱) + f(۲) + f(۳) + \cdots + f(۱۰۰)$ برابر با چند است؟

۱) ۳۲۴۹　۲) ۸۳۵۴　۳) ۸۲۹۹　۴) ۸۲۴۹　۵) ۳۲۹۹

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

کافی است به ازای هر عدد داشته باشیم این عدد چندبار در مجموع نهایی حاضر می‌شود. با این کار اعداد به تعدادی دسته تقسیم می‌شوند و به ازای هر دسته داریم که اعداد این دسته چندبار در مجموع نهایی حضور دارند. سپس مجموع اعداد هر دسته را در عدد حضور آن‌ها ضرب می‌کنیم و پاسخ نهایی را محاسبه می‌کنیم. □

اخیرا در پی آزمایش‌های هسته‌ای در مجمع‌الجزایر پنیر، جنگی بین دو کشور پنیر شمالی و پنیر جنوبی در گرفته است. در این مجمع الجزایر ۱۰ جزیره وجود دارد که این دو کشور در پی تصرف آن‌ها هستند. در این جنگ هر یک از دو کشور به هر جزیره تعدادی نیرو اعزام می‌کند و در هر جزیره کشوری که نیروی بیش‌تری اعزام کرده باشد، پیروز نبرد خواهد شد و اگر تعداد نیروها مساوی باشد جزیره به هیچ یک از دو کشور تعلق نخواهد گرفت.
اما همه می‌دانند که کشور پنیر جنوبی با همکاری کشورهای دیگر به تکنولوژی‌ای دست یافته که می‌تواند تعداد نیروهایی که طرف مقابل به هر جزیره ارسال می‌کند را پیش‌بینی کند و بر اساس آن نیروهای خود را به جزیره‌ها بفرستد. می‌دانیم هر یک از دو کشور بهترین شیوه را برای تصاحب بیش‌ترین تعداد جزیره به کار می‌بندند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۷ اگر کشور پنیر شمالی ۱۰۰ نیرو و کشور پنیر جنوبی ۴۵ نیرو در اختیار داشته باشد. کشور پنیر شمالی حداکثر چند جزیره را می‌تواند تصاحب کند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۷ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

چون کشور پنیر جنوبی از نحوه‌ی چینش کشور پنیر شمالی اطلاع می‌یابد یک استراتژی بهینه برای آن این است که همیشه سعی کند جزیره‌هایی که کمترین نیرو را دارند اشغال کند. اما می‌دانیم مجموع تعداد نیروهایی که پنیر شمالی به چهار جزیره‌ای که کم‌ترین نیروها را دارند اعزام کرده است حداکثر ۴۰ است (چرا؟). در نتیجه کشور پنیر جنوبی می‌تواند حداقل ۴ جزیره را تصاحب کند. اما اگر کشور پنیر شمالی به هر جزیره دقیقا ۱۰ نیرو اعزام کند پنیر جنوبی نمی‌تواند بیش‌تر از ۴ جزیره را تصاحب کند و در نتیجه پنیر شمالی می‌تواند ۶ جزیره را تصاحب کند. □

۲۸ اگر کشور پنیر جنوبی ۴۵ نیرو در اختیار داشته باشد، کشور پنیر شمالی حداقل چند نیرو باید داشته باشد تا مطمئن باشد که نیمی از جزیره‌ها را تصاحب می‌کند؟

۱) ۶۸ ۲) ۷۰ ۳) ۶۹ ۴) ۷۳ ۵) ۷۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

اگر پنیر شمالی در هر جزیره ۷ نیرو قرار دهد، پنیر جنوبی حداکثر می‌تواند ۵ جزیره را اشغال کند. اما پنیر شمالی می‌تواند در یک جزیره ۶ نیرو قرار دهد به طوری که باز هم پنیر جنوبی نتواند بیش‌تر از ۵ جزیره را اشغال کند. با استفاده از اصل لانه‌کبوتری می‌توان نشان داد که پنیر شمالی با کمتر از ۶۸ نیرو نمی‌تواند این کار را انجام دهد، چون در این صورت پنیر جنوبی با ۴۵ نیرو می‌تواند حداقل ۶ جزیره را تصاحب کند (چرا؟). البته با ۶۸ نیرو اگر چه پنیر جنوبی نمی‌تواند بیش‌تر از ۵ جزیره را تصاحب کند اما پنیر شمالی هم نمی‌تواند مطمئن باشد که ۵ جزیره را تصاحب می‌کند، زیرا ممکن است در یکی از جزایر تساوی رخ دهد. □

شش نفر دور یک میز نشسته‌اند که هر یک از آن‌ها کلاهی بر سر دارد. کلاه‌ها به رنگ‌های قرمز، آبی و سبز هستند. می‌دانیم که از هر رنگ حداقل یک کلاه وجود دارد. هر کسی می‌تواند رنگ کلاه پنج نفر دیگر را ببیند، اما توان دیدن رنگ کلاه خود را ندارد. این شش نفر بسیار باهوش هستند و در صورتی که از لحاظ منطقی امکان تشخیص رنگ کلاه خود با توجه به رنگ کلاه دیگران وجود داشته باشد، رنگ کلاه خود را تشخیص می‌دهند. برای مثال اگر شخصی هیچ کلاهی با رنگ آبی روی سر پنج نفر دیگر نبیند، متوجه می‌شود که رنگ کلاه او آبی است، چرا که می‌داند از هر رنگ باید حداقل یک کلاه، در بین کلاه‌ها موجود باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۹ اگر از این شش نفر بخواهیم در صورتی که توان تشخیص رنگ کلاه خود را دارند، دست خود را هم‌زمان بلند کنند، با فرض پاسخ صادقانه حداقل و حداکثر چند نفر ممکن است دست خود را بلند کنند؟

۱) ۲ و ۲ ۲) صفر و ۶ ۳) صفر و ۲ ۴) ۲ و ۶ ۵) ۶ و ۶

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

فقط کسانی که کلاه تک بر سر دارند قدرت تشخیص رنگ کلاه خود را دارند. حالت ۲ ۲ ۲ جواب حداقل و حالت ۱ ۱ ۴ جواب حداکثر را تولید می‌کند. □

۳۰ حالا پس از این پاسخ صادقانه، مجددا از این شش نفر می‌خواهیم که در صورتی که هم اکنون رنگ کلاه خود را می‌دانند، دست خود را بلند کنند. در این حالت (باز با فرض پاسخ صادقانه) حداقل و حداکثر چند نفر ممکن است دست خود را بلند کنند؟

۱) صفر و ۲ ۲) صفر و ۶ ۳) ۲ و ۲ ۴) ۶ و ۶ ۵) ۲ و ۶

پاسخ: جواب صحیح «۳ و ۶» است که در گزینه‌ها موجود نیست.

کافی است حالت‌گیری کنیم.

- در حالت ۱ ۱ ۴ دو نفر دست بلند می‌کنند و چهار نفر دیگر متوجه تک بودن آن‌ها و در نتیجه رنگ کلاه خود می‌شوند.
- در حالت ۲ ۲ ۲ کسی دست بلند نمی‌کند و همه متوجه حالت ۲ ۲ ۲ می‌شوند. پس هر رنگی را تک دیدند رنگ کلاه خود آن‌ها است.
- در حالت ۱ ۲ ۳ فقط یک نفر دست بلند می‌کند و همه متوجه حالت ۱ ۲ ۳ می‌شوند. گروه ۱ و ۲ به راحتی رنگ کلاه خود را تشخیص می‌دهند. ولی اعضای گروه ۳ رنگ‌ها را به صورت ۱ ۲ ۲ می‌بینند و قادر به تشخیص رنگ کلاه خود از بین دو ۲ نیستند.

پس پاسخ ۳ و ۶ است. □