- سؤال‌های **۲۴ تا ۳۰** در دسته‌های چندسؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ به چند طریق می‌توان در یک جدول ۳ × ۳ دو مهره‌ی شاه با رنگ‌های سیاه و سفید گذاشت طوری که همدیگر را تهدید نکنند؟ هر مهره‌ی شاه تمام مهره‌های ۸ خانه‌ی مجاورش را تهدید می‌کند.

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۴۸ ۴) ۳۲ ۵) ۱۶

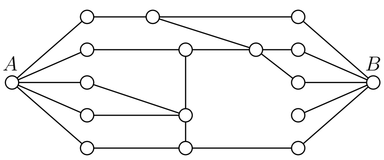
پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

با حالت‌بندی بر روی مکان‌های مختلف مهره‌ی سفید تعداد حالات را می‌شماریم.

A	B	A
B	C	B
A	B	A

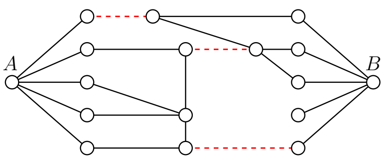
اگر مهره‌ی سفید در مکان A باشد مهره‌ی سیاه در ۵ خانه‌ی دیگر می‌تواند باشد. اگر مهره‌ی سفید در مکان B باشد مهره‌ی سیاه در ۳ خانه‌ی دیگر می‌تواند باشد. اگر مهره‌ی سفید در مکان C باشد مهره‌ی سیاه در هیچ خانه‌ای نمی‌تواند باشد.
جمع این حالات مختلف برابر با ۳۲ = (۳ + ۵) × ۴ می‌باشد که جواب مسئله است. □

۲ در شکل مقابل می‌خواهیم با حذف تعدادی از پاره‌خط‌ها به حالتی برسیم که دیگر مسیری از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B وجود نداشته باشد. حداقل چند پاره‌خط باید حذف شوند؟



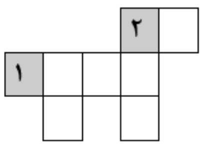
۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۲ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.



با حذف خطوطی که در شکل مشاهده می‌کنید می‌توان با حذف سه خط به هدف رسید. همچنین جوابی با کمتر از سه خط وجود ندارد چون به سادگی می‌توان سه مسیر در شکل از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B یافت که خط مشترکی نداشته باشند. در این صورت از هر مسیر حداقل باید یک خط حذف شود. پس پاسخ سه خط است. □

۳ در جدول مقابل می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۸ را به گونه‌ای قرار دهیم که اعداد در هر سطر از چپ به راست صعودی و در هر ستون نیز از بالا به پایین صعودی باشند. اگر مکان قرار گرفتن اعداد ۱ و ۲ در جدول مطابق شکل مقابل باشد، بقیه‌ی اعداد را به چند طریق می‌توان در جدول چید؟ دقت کنید که دو خانه‌ی پایینی جدول در یک سطر قرار دارند.

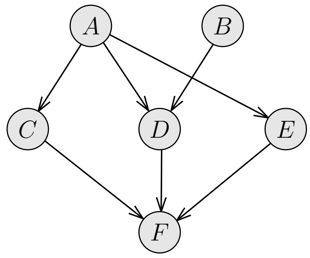


۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶ ۵) ۱۸

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

اگر جدول را به شکل یک اسب ببینیم، هر یک از اعداد ۳ تا ۸ را می‌توان در سر اسب قرار داد. از پنج عدد باقی‌مانده، بیش‌ترین در پای جلویی اسب و کم‌ترین در کنار ۱ قرار می‌گیرد. هر یک از سه عدد باقی‌مانده می‌تواند در پای پشتی اسب قرار بگیرد و سپس محل دو عدد دیگر به طور یکتا مشخص می‌شود. پس در کل $۱۸ = ۶ \times ۳$ حالت برای قرار دادن اعداد وجود دارد. □

۴ شش درس با نام‌های A تا F داریم که روابط پیش‌نیازی آن‌ها در شکل مقابل نشان داده شده است. اگر درس x پیش‌نیاز درس y باشد، آن‌گاه پیکانی از x به y در این شکل رسم شده است. می‌خواهیم این شش درس را در شش ترم متوالی و در هر ترم یک درس بگیریم طوری که تمامی روابط پیش‌نیازی رعایت شده باشند، یعنی اگر درس x پیش‌نیاز درس y است، آن گاه درس x باید پیش از درس y گرفته شود. به چند ترتیب مختلف می‌توان درس‌ها را با رعایت روابط پیش‌نیازی گرفت؟ به طور مثال، ترتیب $\langle A, B, D, E, C, F\rangle$ یک ترتیب مجاز است.



۱) ۱۸ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴ ۵) ۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

درس F باید همیشه به عنوان آخرین درس گرفته شود، پس می‌توان آن را حذف کرد. سه درس میانی C, D, E به هر ۶ ترتیب ممکن می‌توانند ظاهر شوند. در هر صورت A باید پیش از این سه درس و B باید پیش از D باشد. اگر دروس C و E را با $-$ نشان دهیم، به ازای ترتیب $AD--$ درس B دو انتخاب، به ازای $A-D-$ درس B سه انتخاب، و به ازای $A--D$ درس B چهار انتخاب دارد. پس تعداد ترتیب‌های ممکن $۱۸ = (۲+۳+۴) \times ۲$ است. □

۵ در ایستگاه تاکسی موصل به صلاح‌الدین، مردم برای استفاده از تاکسی در صف می‌ایستند. به محض آمدن یک تاکسی، اگر تعداد افراد صف حداقل چهار نفر بود، ۴ نفر جلوی صف و در غیر این صورت تمام افراد صف در تاکسی می‌نشینند و تاکسی بلافاصله حرکت می‌کند.
سه تروریست می‌خواهند از موصل به صلاح‌الدین بروند. آن‌ها یک تفنگ دارند و می‌توانند با هر تیر آن، یک نفر از افراد دیگر صف را بکشند. این سه تروریست همزمان به انتهای صف رسیده و می‌خواهند حتما با هم در یک تاکسی بنشینند. قبل از آن‌که آن‌ها به ایستگاه تاکسی بروند، می‌خواهند تعدادی تیر با خود بردارند که بتوانند به طور تضمینی، به هدفشان (نشستن با هم در تاکسی) برسند. آن‌ها حداقل چند تیر باید با خود بیاورند؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۳ ۵) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

آن‌ها کافی است تعدادی از افراد صف را بکشند، تا نفر اول خودشان مکان $۴k + ۱$ یا $۴k + ۲$ از صف را داشته باشد که این کار با ۲ تیر قابل انجام است. □

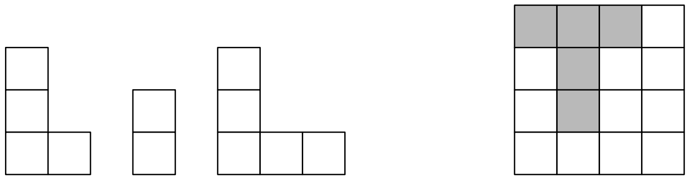
۶ دو تاس در اختیار داریم. پس از پرتاب آن‌ها به اندازه‌ی ضرب دو عددی که روی تاس‌ها آمده امتیاز می‌گیریم. اگر هر تاس با احتمال یکسان عددی بین ۱ تا ۶ بیاورد، به صورت میانگین چه امتیازی می‌توانیم کسب کنیم؟

۱) ۱۰٫۲۵ ۲) ۹ ۳) ۱۲٫۲۵ ۴) ۱۳٫۵ ۵) ۱۲٫۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

با توجه به اینکه احتمال هر ۳۶ حالت ممکن یکسان است، کافیست مجموع امتیاز همه‌ی حالات را محاسبه و بر ۳۶ تقسیم کنیم. ضرب هر دو عدد بین ۱ تا ۶ باید یکبار ظاهر شود که همانند یک جدول ضرب ۶ در ۶ است که مجموع خانه‌های آن می‌شود: $(۱ + ۲ + ... + ۶)^۲ = ۲۱^۲$ در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با: $\frac{۲۱^۲}{۳۶} = \frac{۴۹}{۴} = ۱۲٫۲۵$ □

۷ به چند طریق می‌توان خانه‌های خالی (سفید رنگ) جدول ۴×۴ پایین سمت راست را با قطعاتی که در شکل پایین سمت چپ می‌بینید پر کرد، طوری که هر خانه توسط دقیقا یک قطعه پوشیده شود و قطعه‌های استفاده‌شده به طور کامل درون خانه‌های سفید جدول قرار بگیرند؟ از هر قطعه به تعداد دل‌خواه وجود دارد و قطعات را می‌توان چرخاند یا دوران داد.



۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۱ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

همانطور که مشاهده می‌شود تعداد خانه‌های خالی جدول فرد است. در نتیجه از قطعه‌ی ۵ خانه‌ای نیز باید فرد بار استفاده شود. اما براحتی مشاهده می‌شود که حداکثر یک بار می‌توان از این قطعه استفاده کرد. اگر جای قطعه‌ی ۵ خانه‌ای را مشخص کنیم، نحوه‌ی قرار گیری بقیه‌ی قطعات بصورت یکتا مشخص می‌شود. با توجه به اینکه قطعه‌ی ۵ خانه‌ای می‌تواند در دو جای جدول قرار گیرد جواب این مسئله نیز برابر ۲ خواهد بود. □

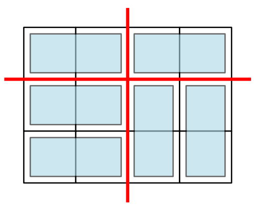
۸ امروز بانک شهر فسقلی‌ها ۵۰ مشتری دارد. مشتری‌ها در یک صف ایستاده‌اند و هرکدام کارتی دارد که نوبت او را مشخص می‌کند (عددی بین ۱ تا ۵۰). این بانک سه باجه برای پاسخ‌گویی دارد و هر مشتری اگر نوبت به او برسد می‌تواند به یکی از این سه باجه مراجعه کند. ساعت ۱۲ ظهر است و هم‌اکنون به ترتیب در سه باجه نوبت مشتری‌های ۴۴، ۴۸ و ۵۰ است. این ۵۰ مشتری به چند طریق از سه باجه می‌توانند استفاده کرده باشند؟

۱) $۳^{۴۳} \times ۲^{۳}$ ۲) $۳^{۴۷}$ ۳) $۳^{۴۴} \times ۲^{۴}$ ۴) $۳^{۴۳} \times ۲^{۴}$ ۵) $۳^{۴۴} \times ۲^{۳}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

هر مشتری که نوبت او بین ۱ تا ۴۷ باشد کارش تمام شده است و می‌توانسته از هرکدام از سه باجه استفاده کرده باشد. مشتری ۴۴ در باجه اول است و مشتری‌ها ۴۵ تا ۴۷ می‌توانستند در یکی از باجه‌های دوم یا سوم باشند (چون در باجه‌ی اول هنوز کار نفر ۴۴ تمام نشده است). به همین ترتیب مشتری ۴۸ در باجه دوم است و نفر ۴۹ و ۵۰ نیز حتما از باجه‌ی سوم استفاده کرده‌اند. در نتیجه پاسخ برابر است با: $۳^{۴۳} \times ۲^{۳}$ □

۹ یک جدول ۱۰×۲۱ را با کاشی‌هایی به شکل مستطیل‌های ۲×۱ فرش کرده‌ایم. حداکثر چند خط می‌توان روی خطوط داخل این جدول رسم کرد که هیچ یک از کاشی‌ها را قطع نکند؟ به طور مثال در جدول ۳×۴ روبه‌رو تنها دو خط قابل رسم است، ولی اگر همه‌ی کاشی‌ها را افقی قرار دهیم، تعداد خطوط قابل رسم ۳ خواهد بود که بیش‌ترین مقدار ممکن است.



۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۲ ۴) ۲۷ ۵) ۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

اگر همه‌ی کاشی‌ها افقی باشند، $۲۴ = ۴ + ۲۰$ خط با این خاصیت خواهیم داشت. از طرفی هیچ دو خط عمودی مجاور نمی‌توانند دارای این خاصیت باشند، زیرا بین آن‌ها ۲۱ خانه است. پس حداکثر ۴ خط عمودی و حداکثر ۲۰ خط افقی خواهیم داشت. □

۱۰ در یک دنیا ۱۶ کشور با شماره‌های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. هر کشور با شماره‌ی x، با کشورهای $x - ۱$، $x + ۱$، $x - ۴$ و $x + ۴$ (در صورت وجود) رابطه‌ی اقتصادی دارد. برای نمونه، کشور ۷ با کشورهای ۳، ۶، ۸ و ۱۱، و کشور ۲ با کشورهای ۱، ۳ و ۶ رابطه دارد. ۳ تا از کشورها یک اتحادیه تشکیل داده‌اند. هر سال هر کشوری که با دست کم دو تا از کشورهای اتحادیه رابطه‌ی اقتصادی داشته باشد، به اتحادیه اضافه می‌شود. با در نظر گرفتن حالت‌های مختلف برای ۳ کشور اولیه‌ی اتحادیه، این اتحادیه پس از ۲۰ سال حداکثر چند کشور خواهد داشت؟

۱) ۱۶   ۲) ۸   ۳) ۹   ۴) ۱۴   ۵) ۱۲

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

اگر در ابتدا، کشورهای ۱ و ۳ و ۵ عضو اتحادیه باشند، تمام کشورها عضو اتحادیه خواهند شد. پس پاسخ برابر ۱۶ است. □

۱۱ هُژَبر یک دستگاه «سیب‌شناس» خریده است. این دستگاه ۳ سیب می‌گیرد و اگر حداقل k سیب خراب در بین این ۳ سیب وجود داشته باشد، بوق می‌زند! حال هژبر ۱۴ سیب خریده است و می‌داند k تا از این سیب‌ها خراب است. در حالات زیر حداکثر چند بار باید از دستگاه استفاده کند تا یکی از سیب‌های خراب را بیابد: حالت اول $k = ۱$ و حالت دوم $k = ۳$ (جواب این دو حالت به ترتیب از راست به چپ آمده‌اند.)

۱) ۵ و ۳۶۳   ۲) ۶ و ۳۶۳   ۳) ۷ و ۳۶۳   ۴) ۷ و ۳۶۴   ۵) ۶ و ۳۶۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

برای قسمت $k = ۱$ اگر تعداد کل سیب‌ها ۵تا باشد می‌توان سیب خراب را با ۳ حرکت پیدا کرد: ابتدا ۳ سیب را انتخاب می‌کنیم و به دستگاه می‌دهیم، اگر همگی سالم باشند در حرکت بعدی یک سیب انتخاب نشده و دو سیب سالم را به دستگاه می‌دهیم و وضعیت همه سیب‌ها مشخص می‌شود اما اگر دستگاه بوق بزند می‌فهمیم که ۲ سیب انتخاب نشده سالم‌اند و با استفاده از آن ها وضعیت ۳سیب اولی را مشخص می‌کنیم.
به طور کلی اگر پس از یک آزمایش دستگاه بوق بزند با دو آزمایش بعدی می‌توان سیب گندیده را تعیین کرد. اگر $f(x)$ را برابر با تعداد آزمایش‌های مورد نیاز برای تعیین کردن سیب خراب در بین x سیب در نظر بگیریم ($x \geqslant ۵$) می‌توان رابطه‌ی بازگشتی $f(x) = f(x - ۳) + ۱$ را اثبات کرد: اگر سه سیب را به دستگاه دهیم و دستگاه بوق بزند، قطعاً سیب خراب داخل این دسته است و سیب‌های خارج این دسته سالم‌اند و به راحتی می‌توان سیب خراب را با ۲ حرکت پیدا کرد. در غیر اینصورت می‌توان این ۳ سیب را در نظر نگرفت و ادامه داد. جواب نهایی برابر است با: $f(۱۴) = f(۵) + ۳ = ۶$. برای قسمت $k = ۳$ اگر دو دسته ۳تایی متفاوت از سیب‌ها وجود داشته باشد که هیچکدام را به دستگاه نداده باشیم و دستگاه نیز تاکنون بوق نزده باشد نمی‌توان تشخیص داد که کدام یک از این دو دسته تمامی سیب‌هایش گندیده است. بنابراین تنها می‌توانیم یک دسته ۳تایی داشته باشیم که به دستگاه داده نشده و نتیجه آن با توجه به نتیجه بقیه دسته‌ها به صورت یکتا مشخص خواهد شد.
در این صورت باید تمامی راه‌های انتخاب ۳ سیب از ۱۴ سیب به جز یک حالت را امتحان کرد تا به جواب برسیم.
بنابراین تعداد دفعات استفاده از دستگاه برابر است با: $\binom{۱۴}{۳} - ۱ = ۳۶۳$. □

۱۲ تعداد ۱۳۹۳ ماشین داریم. هر ماشین در یک لحظه از زمان روی یک نقطه از محور مختصات ظاهر شده و تا ابد با سرعتی ثابت در یک جهت مشخص (سمت چپ یا راست) شروع به حرکت می‌کند. در هر لحظه، ماشینی

که در سمت راست همه‌ی ماشین‌های دیگر قرار بگیرد، ماشین بَرنده می‌نامیم. در طول زمان ماشین برنده حداکثر چند بار تغییر می‌کند؟

۱) ۱۳۹۲ ۲) ۲۰۹۰ ۳) ۲۷۸۴ ۴) ۱۳۹۳ ۵) بی‌نهایت

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

ماشین برنده به دو علت می‌تواند تغییر کند: (۱) به علت ظاهر شدن یک ماشین در سمت راست ماشین برنده‌ی فعلی (۲) به علت سبقت گرفتن یک ماشین از ماشین برنده‌ی فعلی. بدیهی است که تغییرات از نوع (۱) حداکثر به تعداد ماشین‌ها منهای یک یعنی ۱۳۹۲ است. در مورد تعداد تغییرات از نوع (۲) نیز می‌توان از این شهود استفاده کرد که هر ماشین برنده‌ای که از ماشین دیگری عقب بیافتد دیگر نمی‌تواند ماشین برنده لقب بگیرد. بنابراین تعداد تغییرات از نوع (۲) برابر $۱۳۹۲ = ۱ - ۱۳۹۳$ خواهد شد. در ضمن می‌توان مثالی زد که ماشین برنده ۲۷۸۴ بار تغییر کند. تصور کنید که ماشین iام در در زمان i در نقطه i از محور مختصات ظاهر شود. فرض کنید همه‌ی ماشین‌ها به غیر از ماشین اول با سرعت نزدیک به صفر به سمت راست حرکت کنند و ماشین اول با سرعت ثابت کمی کمتر از ۱ به سمت راست حرکت کند. به سادگی می‌توان دید در این مثال ماشین برنده ۲۷۸۴ بار تغییر می‌کند. □

۱۳ فاطمه جایگشت‌ها را خیلی دوست دارد. او همیشه درایه‌های جایگشت‌ها را از صفر شماره‌گذاری می‌کند و برای یک جایگشت عدد زیبایی آن را این گونه تعریف می‌کند: به ازای هر درایه، XOR شماره‌ی آن درایه و عددی که در آن قرار دارد را حساب می‌کند، و سپس اعداد حاصل را با هم جمع می‌کند. به نظر او هر چه عدد زیبایی یک جایگشت بیش‌تر باشد، جایگشت زیباتر است! حال به او بگویید بین جایگشت‌های مختلف اعداد ۰ تا ۶، بیش‌ترین میزان زیبایی چقدر است.

۱) ۴۲ ۲) ۳۶ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰ ۵) ۴۸

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

یکی از حالاتی که جواب ۴۲ می‌شود این است که جایگشت $\langle ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۰\rangle$ باشد. اثبات می‌کنیم جواب هیچ گاه از ۴۲ بیش‌تر نخواهد شد. برای راحتی کار فرض کنید که اعداد ۰ تا ۶ را با سه رقم باینری نمایش دهیم. در عملیات XOR تعداد ارقام باینری افزایش پیدا نخواهد کرد، پس نتیجه XOR زمانی بیشینه خواهد شد که هر رقم در دقیقاً یکی از دو عدد یک باشد و می دانیم در این حالت XOR مشابه جمع عمل خواهد کرد.
بنابراین حداکثر مجموع کل زمانی رخ خواهد داد که XOR هر جایگاه برابر با جمع شماره آن جایگاه و عدد درونش باشد.پس تمامی اعداد ۰ تا ۶ دو بار در مجموع کل می‌آیند و جواب کل برابر با $۴۲ = ۲ \times \frac{۶\times۷}{۲}$ خواهد بود. □

۱۴ تعدادی سیب و انار و پرتقال و دو گلدان جادویی داریم که محصولاتشان پس از یک ماه می‌رسند. ابتدای هر ماه می‌توانیم به یکی از شیوه‌های زیر در آن‌ها میوه بکاریم و در انتهای ماه محصول را جمع‌آوری کنیم. (هر حالت به تنهایی در یک گلدان انجام می‌شود و پس از جمع‌آوری هیچ اثری از درخت و میوه‌ی کاشته‌شده باقی نمی‌ماند):

- یک سیب بکاریم و سه سیب برداشت کنیم.
- یک انار بکاریم و پنج انار برداشت کنیم.
- یک پرتقال بکاریم و دو پرتقال برداشت کنیم.
- دو سیب و دو انار بکاریم و چهار پرتقال برداشت کنیم.

فرض کنید در ابتدا از هر میوه یکی داریم. به چه تعداد از حالات زیر می‌توان رسید؟ $(۱, ۲, ۳)$ یعنی یک سیب و دو انار و سه پرتقال.

- $(۱۳۹۳, ۲۰۱۵, ۱۴۳۶)$
- $(۱۳۹۳, ۱۴۳۶, ۲۰۱۵)$
- $(۱۳, ۷, ۴)$
- $(۱۰۰, ۱۰۰, ۱۰۰)$

۱) ۳ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۴ ‏ ۵) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

اولین شرط برای حالت نهایی، فرد بودن تعداد سیب‌ها و انارها است. چون در هر ماه زوجیت تعداد سیب‌ها و انارها ثابت است). چون در ابتدا یک سیب و یک انار داریم پس همواره تعداد آن ها فرد است. در حالتی که تعداد انارها $۴k + ۱$ باشد، می‌توان با سه حرکت اول تمام حالاتی که شرط بالا را دارند تولید کرد. ولی اگر تعداد انارها $۴k + ۳$ باشد حداقل یکبار از روش چهارم باید استفاده کنیم و در نتیجه حداقل ۵ پرتقال خواهیم داشت. هر حالتی که دو شرط بالا را داشته باشد را به سادگی می‌توان تولید کرد. در نتیجه تنها حالت $(۱۳۹۳, ۲۰۱۵, ۱۴۳۶)$ قابل دستیابی است. □

۱۵ ۱۰۲۴ لامپ خاموش با شماره‌های ۱ تا ۱۰۲۴ در یک ردیف قرار دارند. کیان در ۱۰ مرحله کلید تعدادی از لامپ‌ها را می‌زند که منجر به تغییر وضعیت آن لامپ‌ها می‌شود (از خاموش به روشن و برعکس). اگر کیان در مرحله iام کلید همه‌ی لامپ‌هایی را که باقی‌مانده‌ی شماره آن‌ها بر ۲^i صفر **نیست** بزند، در پایان چند لامپ روشن وجود خواهد داشت؟

۱) ۳۴۱ ‏ ۲) ۶۸۳ ‏ ۳) ۶۸۲ ‏ ۴) ۳۴۲ ‏ ۵) ۱۰۲۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

کافی است اعداد را به صورت دودویی در نظر بگیریم و روی اولین جایی که رقم ۱ ظاهر شده است حالت‌بندی کنیم. در جدول زیر تعداد خوردن کلید برای هر دسته از لامپ‌ها و تعداد لامپ‌های موجود در هر دسته نوشته شده است. واضح است که در هر دسته، تعداد زده‌شدن کلید به تعداد رقم‌های بعد از اولین رقم ۱ می‌باشد. در نمایش اعداد x به منظور ۱ یا ۰ می‌باشد و لامپ‌های دسته‌هایی در پایان روشن خواهد بود که «فرد» بار کلید آن‌ها خورده شده باشد.

تعداد خوردن کلید	تعداد اعداد هر دسته	حالت اعداد
۱۰	$۲^۹$	$۰xxxxxxxxx۱$
۹	$۲^۸$	$۰xxxxxxxx۱۰$
۸	$۲^۷$	$۰xxxxxxx۱۰۰$
۷	$۲^۶$	$۰xxxxxx۱۰۰۰$
۶	$۲^۵$	$۰xxxxx۱۰۰۰۰$
۵	$۲^۴$	$۰xxxx۱۰۰۰۰۰$
۴	$۲^۳$	$۰xxx۱۰۰۰۰۰۰$
۳	$۲^۲$	$۰xx۱۰۰۰۰۰۰۰$
۲	$۲^۱$	$۰x۱۰۰۰۰۰۰۰۰$
۱	۱	۰۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰
۰	۱	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

پس پاسخ سوال برابر با $۳۴۱ = ۲^۸ + ۲^۶ + ۲^۴ + ۲^۲ + ۱$ است. □

۱۶ یک گراف را «زیبا» می‌نامیم اگر رأسی در آن وجود داشته باشد که در تمام دورهای به طول فرد آمده باشد. بین تمام گراف‌های ساده‌ی ۱۰۱ رأسی زیبا، گرافی را در نظر بگیرید که بیش‌ترین تعداد یال را دارد. این گراف چند یال دارد؟

۱) ۴۷۰ ۲) ۲۵۰۰ ۳) ۲۶۰۰ ۴) ۱۰۱ ۵) ۵۰۵۰

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

اگر راسی که در همه‌ی دورهای فرد وجود دارد را حذف کنیم، در این صورت گراف به‌دست‌آمده دور فرد ندارد و در نتیجه دوبخشی است. گراف دوبخشی ۱۰۰ راسی هم زمانی بیش‌ترین تعداد یال را دارد که اندازه دو بخش برابر بوده و گراف دوبخشی کامل باشد. این گراف دوبخشی ۲۵۰۰ یال دارد و راس حذف شده هم حداکثر درجه‌اش ۱۰۰ است. پس تعداد یال‌های گراف حداکثر ۲۶۰۰ است. در ضمن اگر به گراف دوبخشی کامل که اندازه‌ی هر بخشش ۵۰ است، یک راس اضافه شود که به همه‌ی رئوس دیگر متصل باشد، گراف به‌دست‌آمده زیبا است و ۲۶۰۰ یال خواهد داشت. □

۱۷ یک جدول ۴×۴ داده شده است. می‌خواهیم شش مهره‌ی یکسان را در شش خانه‌ی متفاوت از جدول قرار دهیم طوری که در هر سطر و در هر ستون تعداد زوجی مهره قرار گرفته باشد. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲۸ ۵) ۹۶

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

واضح است که در یک سطر نمی‌توان ۴ مهره قرار داد، زیرا با دو مهره‌ی باقی‌مانده نمی‌توان زوج بودن تمام ستون‌ها را حفظ کرد. بنابراین در هر سطر (و در هر ستون) صفر یا دو مهره قرار دارد. با توجه به وجود ۶ مهره، دقیقا یک سطر و یک ستون خالی خواهیم داشت. برای انتخاب این سطر و ستون خالی ۴×۴ انتخاب وجود دارد. به ازای هر انتخاب، در جدول ۳×۳ باقی‌مانده به ۶ طریق می‌توان مهره‌ها را قرار داد. بنابراین پاسخ برابر $۹۶ = ۶ \times ۴ \times ۴$ است. □

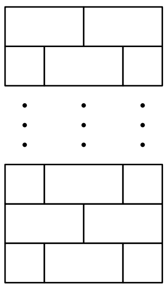
۱۸ دنباله‌ی $\langle ۱, ۶, ۱۰, ۱, ۵, ۹, ۱۱, ۷ \rangle$ را در نظر بگیرید. به چند طریق می‌توان بین اعداد این دنباله عملگرهای AND و OR قرار داد طوری که حاصل عبارت برابر صفر شود؟ دقت کنید که باید هفت عملگر گذاشته شود و عملگرها از چپ به راست محاسبه می‌شوند.

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۴۲ ۵) ۶۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

برای صفر شدن حاصل عبارت، باید تمامی رقم‌های آن صفر شوند. آخرین عدد عبارت را در نظر بگیرید، در صورتی که تمامی رقم‌های آن صفر باشند بر حسب آخرین عملگر مسئله را حل می‌کنیم. برای سادگی عملگرهای AND و OR را به ترتیب با $\wedge$ و $\vee$ نشان می‌دهیم. اگر عملگر آخر $\wedge$ باشد، عبارت مستقل از سایر عملگرها صفر خواهد شد که در این صورت $۲^{k-۱}$ حالت داریم (k تعداد عملگرهاست) و در صورتی که $\vee$ باشد، پاسخ برابر است با تعداد راه‌هایی که می‌توان بقیه‌ی دنباله را صفر کرد. اما اگر آخرین عدد صفر نباشد، قطعا آخرین عملگر $\wedge$ است، زیرا در غیر این صورت حاصل‌عبارت صفر نخواهد شد. حال در صورتی که $\wedge$ بگذاریم، این استدلال را برای سایر اعداد دنباله تکرار می‌کنیم. □

۱۹ جدولی با ۱۰۰ سطر همانند شکل روبرو در نظر بگیرید که ۵۰ سطر آن دو خانه و ۵۰ سطر آن سه خانه دارند. می‌خواهیم از گوشه‌ی پایین چپ به گوشه‌ی بالا راست برویم به صورتی که از روی خط‌ها حرکت کرده و همواره به سمت بالا و یا راست حرکت کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟



۱) ۴۳۵　　۲) ۳۸۰　　۳) ۴۲۰　　۴) ۳۹۹　　۵) ۴۱۸

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

از اولین باری که به سمت راست حرکت کنیم همواره در هر سطر، یک بار به سمت راست حرکت می‌کنیم. در نتیجه پس از حداکثر سه سطر به ستون سمت راست می‌رسیم. پس کافی است اولین حرکت به سمت راست را در نظر بگیریم (با توجه به این که در سطر شماره‌ی فرد هست یا زوج) و تعداد حالات ممکن را محاسبه کنیم:
سطرهای فرد: $۴۹ \times ۵ + ۴ + ۱ = ۲۵۰$
سطرهای زوج: $۴۹ \times ۳ + ۲ = ۱۴۹$
در نتیجه در مجموع ۳۹۹ حالت وجود دارد. □

۲۰ سه نفر داریم که پول هر یک از آن‌ها (به دلار) یک عدد صحیح بزرگ‌تر از صفر است و مجموع پول آن‌ها ۱۰۱ دلار است. هر گاه پول یکی از این افراد از مجموع پول دو نفر دیگر بیش‌تر باشد، می‌گوییم بین این سه نفر «تضاد طبقاتی» وجود دارد. به چند حالت ممکن است بین این سه نفر تضاد طبقاتی وجود داشته باشد؟

۱) ۳۸۲۵　　۲) ۳۶۷۵　　۳) ۱۲۷۵　　۴) ۱۲۲۵　　۵) ۷۳۵۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

افراد را با شماره‌های ۱ تا ۳ شماره‌گذاری می‌کنیم و فرض می‌کنیم پول نفر شماره i، برابر x_i دلار باشد. ابتدا به ۳ حالت، فردی که پولش از بقیه بیش‌تر است را انتخاب می‌کنیم. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید این فرد، نفر شماره ۱ باشد. پول این نفر حداقل ۵۱ دلار است و پول هر یک از دو نفر دیگر حداقل ۱ دلار است. پس جواب، برابر تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۰۱, \quad x_۱ \geqslant ۵۱,\ x_۲ \geqslant ۱,\ x_۳ \geqslant ۱$ در مجموعه اعداد صحیح است که برابر

$$\binom{۱۰۱ - (۵۱ + ۱ + ۱) + ۲}{۲}$$

است. پس پاسخ نهایی برابر است با:

$$۳\binom{۵۰}{۲} = ۳ \times \frac{۵۰ \times ۴۹}{۲} = ۳۶۷۵$$

□

۲۱ یارا یک قطعه چوب به طول ۲۰ به یاور داده و از او خواسته که آن را به ۲۰ قطعه به طول ۱ تبدیل کند. هر بار که یاور یک قطعه چوب به طول $x + y$ را به دو قطعه با طول‌های x و y تقسیم کند، یارا $x \times y$ تومان به او و $x + y$ تومان به شاگردش می‌دهد. حداکثر پولی که یاور و شاگردش می‌توانند به دست بیاورند به ترتیب چند است؟

۱) ۲۱۰ و ۱۱۶　　۲) ۱۹۰ و ۲۰۹　　۳) ۱۷۰ و ۲۰۹　　۴) ۱۹۰ و ۸۸　　۵) ۱۷۰ و ۸۸

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

پولی که یاور به دست می‌آورد برای همه‌ی روش‌های خرد کردن ثابت است. قطعه چوب به طول ۳ + ۲ را به صورت (۱ + ۱ + ۱) + (۱ + ۱) در نظر بگیرید. هنگام شکستن این قطعه چوب به دو قطعه به میزان (۱ + ۱ + ۱) × (۱ + ۱) تومان پول به یاور داده می‌شود. حال تکه‌های چوب به طول واحد در یک قطعه چوب را شماره‌گذاری کنید. تکه iام و jام تا زمانی که پس از تقسیم شدن هر دو در یک قطعه قرار بگیرند، یارا پولی بابت آن دو به یاور نمی‌دهد. اما اولین باری که تکه iام و jام پس از تقسیم در دو قطعه‌ی جداگانه قرار گیرند، یارا یک واحد پول بابت ضرب iامین ۱ که در پرانتز اول قرار می‌گیرد، در jامین ۱ که در پرانتز دوم قرار می‌گیرد به یاور می‌دهد. از آن‌جایی که اکنون این دو تکه در یک قطعه قرار ندارند، دیگر بابت آن‌ها پولی به یاور داده نخواهد شد. پس یاور به هر صورتی که چوب را خرد کند، به میزان ثابتی پول از یارا می‌گیرد. حال اگر هر بار یک قطعه به طول واحد از چوب جدا کند، $\frac{۱۹\times۲۰}{۲}$ تومان به دست می‌آورد. پس پاسخ برابر با گزینه ۲ یعنی ۱۹۰ می‌باشد.
برای شاگرد یاور، بهترین حالت زمانی رخ می‌دهد که از یکی از دو سر چوب شروع کنیم و هر بار یک واحد از چوب ببریم. با استقرای قوی ثابت می‌کنیم برای یک قطعه چوب به طول n بیش‌ترین پول قابل دست‌یابی برابر است با $\frac{(n+۲)(n-۱)}{۲}$. به ازای $n = ۲$ حکم بدیهی است. فرض کنید در مرحله اول چوب به دو قسمت به طول‌های k و $n + ۱ - k$ تقسیم شود. آن گاه پولی که شاگرد یاور می‌گیرد، در بهترین حالت برابر است با:

$$T(n+۱) = (k + n + ۱ - k) + T(k) + T(n + ۱ - k)$$

بدون از دست رفتن کلیت مساله فرض کنید: $k < n + ۱ - k$، حال طبق فرض استقرا داریم:

$$T(n+۱) = n + ۱ + \frac{(k+۲)(k-۱)}{۲} + \frac{(n+۳-k)(n-k)}{۲} = n + \frac{n^۲}{۲} + \frac{۳n}{۲} + k^۲ - k(n+۱)$$

حال به دو جمله‌ی آخر توجه کنید، چون $k > n + ۱ - k$ است. بیشترین مقدار عبارت بالا زمانی خواهد بود که k کمترین مقدار خود را داشته باشد، پس باید $k = ۱$ باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$T(n+۱) = n + \frac{n^۲}{۲} + \frac{۳n}{۲} + ۱ - (n+۱) = \frac{n^۲}{۲} + \frac{۳n}{۲} = \frac{n(n+۳)}{۲}$$

□

۲۲ سلطان در نقطه‌ی ۰ از محور اعداد صحیح قرار گرفته است و گرفتار ۹ غول خطرناک با شماره‌های ۱ تا ۹ شده است. غول‌ها دو نوع هستند: دسته‌ی نخست، غول‌های راست‌گرا که دستور می‌دهند سلطان ۲ واحد به راست برود، و دسته‌ی دوم غول‌های چپ‌گرا که دستور می‌دهند سلطان ۱ واحد به چپ برود.
کار در ۹ مرحله انجام می‌شود. در مرحله‌ی iام، غول شماره‌ی i، دستور موردنظر را (بر اساس راست‌گرا یا چپ‌گرا بودنش) به سلطان می‌دهد. سلطان می‌تواند به دستور غول عمل کند یا این‌که غول را بکشد و جابه‌جا نشود. اگر سلطان یکی از غول‌ها را بکشد، خسته می‌شود و ۲ غول بعدی را نمی‌تواند بکشد. در صورتی که در انتها، سلطان در خانه‌ی ۰ مختصات باشد، آزاد می‌شود و در غیر این صورت، زندانی می‌ماند. سلطان تنها می‌داند که k تا از غول‌ها راست‌گرا هستند و $۹ - k$ غول دیگر، چپ‌گرا هستند، اما شماره‌ی غول‌ها را نمی‌داند و طبیعتا از ابتدا نمی‌داند که در مرحله‌ی iام چه غولی دستور خواهد داد. به ازای چند عدد صحیح k با شرط $۰ \leqslant k \leqslant ۹$، سلطان الگوریتمی دارد که بتواند به طور تضمینی آزاد شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) ۳ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

سلطان می‌تواند حداکثر ۳ غول را بکشد. ابتدا فرض کنید $k \geqslant ۶$ باشد. در این صورت سلطان حداقل باید حرف حداقل ۳ = ۳ − ۶ غول راست‌گرا را گوش کند و دست کم ۶ = ۲ × (۳ − ۶) واحد به راست برود. پس برای رسیدن به نقطه‌ی ۰، دست کم ۶ غول چپ‌گرا نیاز است؛ در حالی که حداکثر ۳ = ۶ − ۹ غول چپ‌گرا وجود دارد.
حال فرض کنید $k = ۵$ باشد. اگر سلطان کم‌تر از ۳ غول راست‌گرا را بکشد، دست کم نیاز به ۶ = ۲ × (۲ − ۵) گام به سمت چپ دارد؛ در حالی که تنها ۴ غول چپ‌گرا وجود دارد. از طرفی اگر ترتیب غول‌ها به این صورت

باشد که در ابتدا هر ۵ غول راست‌گرا دستور بدهند و سپس ۴ غول چپ‌گرا دستور بدهند، سلطان می‌تواند حداکثر ۲ تا از غول‌های راست‌گرا را بکشد. پس در $k = ۵$ هم الگوریتم تضمینی وجود ندارد.
حال فرض کنید $k < ۲$ باشد. در این صورت سلطان با دست کم ۸ غول چپ‌گرا مواجه است که می‌تواند حداکثر ۳ تا از آن‌ها را بکشد. پس حداقل $۵ = ۳ - ۸$ گام باید به سمت چپ انجام بدهد؛ در حالی که حداکثر ۱ غول راست گرا وجود دارد و سلطان نمی‌تواند در انتها در نقطه‌ی ۰ باشد.
حال فرض کنید $k = ۴$ باشد. تنها حالت برد سلطان این است که ۲ غول راست‌گرا و ۱ غول چپ‌گرا را بکشد. غول‌ها را در ۳ دسته‌ی ۱ و ۲ و ۳ تقسیم‌بندی می‌کنیم که دسته‌ی شماره i، شامل غول‌های شماره $۳i - ۲, ۳i - ۱, ۳i$ است. سلطان از هر دسته حداکثر ۱ غول می‌تواند بکشد و از طرفی باید ۳ غول بکشد؛ پس از هر دسته باید دقیقن یک غول بکشد. اگر در دسته‌ي ۱، تنها ۱ غول راست‌گرا باشد، سلطان باید آن را بکشد؛ چون ممکن است ۳ غول دیگر، در یک دسته باشند و نمی‌توان از آن‌ها ۲ غول را کشت. پس سلطان هنگام دیدن غول‌های دسته‌ی اول، تا غول شماره ۳، اگر غول راست‌گرا ندید، نباید آن را بکشد. حال فرض کنید ترتیب غول‌ها از چپ به راست، به ترتیب زیر تنظیم شده باشد (سلطان این ترتیب را نمی‌داند، R یعنی راست‌گرا و L یعنی چپ‌گرا):

$$LLRRRLRLL$$

سلطان تا غول شماره ۳ کسی را نمی‌کشد و غول شماره ۳ را می‌کشد. پس غول‌های شماره ۴ و ۵ را نمی‌تواند بکشد. پس مجبور است غول شماره ۶ را بکشد. پس غول‌های ۷ و ۸ را نمی‌تواند بکشد. پس مجبور است غول شماره ۹ را بکشد که به هدف خود نخواهد رسید. پس در $k = ۴$ هم الگوریتم تضمینی وجود ندارد.
حال فرض کنید $k = ۳$ باشد. سلطان اگر هیچ غولی را نکشد، به راحتی به هدف خود می‌رسد. پس در $k = ۳$ الگوریتم تضمینی وجود دارد.
برای $k = ۲$، سلطان باید ۳ غول چپ‌گرا را بکشد. مانند حالت $k = ۴$، غول‌ها را ۳ دسته می‌کنیم. سلطان اگر در هر دسته، نخستین غول چپ‌گرایی که می‌توانست بکشد را بکشد، به هدف خود خواهد رسید. پس در $k = ۲$ الگوریتم تضمیمی وجود دارد.
پس پاسخ برابر ۲ ($k = ۲$ و $k = ۳$) است. □

۲۳ دنباله‌ی $\langle ۵, ۶, ۵, ۴, ۷, ۵, ۳, ۴, ۷, ۵, ۳ \rangle$ را در نظر بگیرید. دستگاهی داریم که می‌تواند جمع هر بازه از این اعداد را حساب کند. یعنی اگر دو عدد i و j را به آن بدهیم ($i \leqslant j$)، جمع اعداد iام تا jام (شامل خود این دو عدد) را محاسبه می‌کند. اما این دستگاه یک مشکل دارد و آن این که در هنگام حساب کردن جمع اعداد (در مبنای دو) سرریز اعداد (دو بر یک آن‌ها) را حساب نمی‌کند. یعنی برای ورودی‌های ۶ و ۷ که باید جمع ۵ و ۳ را محاسبه کند، خروجی‌اش عدد ۶ است ($۱۱۰ = ۱۱ + ۱۰۱$).
برای این که ثابت کنیم دستگاه اشتباه کار می‌کند می‌خواهیم یک بازه را نشان دهیم که جمع اعداد آن با این دستگاه صفر شود. در این دنباله چند بازه داریم که جمع‌شان با این دستگاه صفر شود؟ به عبارت دیگر چند زوج i و j داریم که به ازای آن‌ها ماشین جواب صفر می‌دهد؟

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱۰ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

جمع بدون سرریز در مبنای دو یعنی همان XOR . برای حل سوال هم چون تمام جمع‌ها بازه‌ای اند می‌توانیم از ایده‌ی جمع پیشوندی prefix sum استفاده کنیم و به ازای هر تکرار در XOR پیشوندی این اعداد، یک بازه داریم که جمعش صفر است.
برای چک کردن، نمایش دودویی و در کنارش جمع پیشوندی آن‌ها آمده:

array	binary	prefix XOR
		۰۰۰
۵	۱۰۱	۱۰۱
۶	۱۱۰	۰۱۱
۵	۱۰۱	۱۱۰
۴	۱۰۰	۰۱۰
۷	۱۱۱	۱۰۱
۵	۱۰۱	۰۰۰
۳	۰۱۱	۰۱۱
۴	۱۰۰	۱۱۱
۷	۱۱۱	۰۰۰
۵	۱۰۱	۱۰۱
۳	۰۱۱	۱۱۰

پس ۳ بار ۰۰۰ تکرار شده و ۳ بار ۱۰۱ و دو بار ۰۱۱ و دو بار ۱۱۰ و دو تای دیگر فقط یک بار آمده‌اند:

$$۳ + ۳ + ۱ + ۱ = ۸$$

□

یک جدول ۴ × ۴ را «خال‌خالی» می‌گوییم، اگر خانه‌های آن به صورت شطرنجی (یک در میان) با رنگ‌های سیاه و سفید رنگ شده باشند. دو خانه از یک جدول را مجاور می‌گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. منظور از یک قطر در یک جدول، هر قطری اعم از اصلی و فرعی است. به این ترتیب، هر یک از خانه‌های گوشه به تنهایی یک قطر هستند و یک جدول ۴ × ۴، ۱۴ قطر دارد.
باب‌اسفنجی، آقای خرچنگ و اختاپوس هر کدام یک جدول ۴ × ۴ خال‌خالی دارند. باب اسفنجی در هر مرحله می‌تواند دو خانه‌ی مجاور از جدول خودش را در نظر بگیرد و رنگ آن دو خانه را جابه‌جا کند. آقای خرچنگ در هر مرحله می‌تواند دو خانه‌ی مجاور از جدول خودش را در نظر بگیرد و رنگ هر دو خانه را عوض کند (از سیاه به سفید و برعکس). اختاپوس نیز در هر مرحله می‌تواند یک قطر از جدول خودش را در نظر بگیرد و رنگ تمام خانه‌های آن قطر را عوض کند.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۴ چند جدول ۴ × ۴ متفاوت وجود دارد که باب‌اسفنجی با تعدادی مرحله می‌تواند به آن‌ها برسد؟

۱) $۲^{۸}$ ۲) $۲^{۱۵}$ ۳) $۲\binom{۱۶}{۸}$ ۴) $\binom{۱۶}{۸}$ ۵) $\frac{۱}{۲}\binom{۱۶}{۸}$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

تعداد خانه‌های سیاه ثابت (۸ تا) می‌ماند. از طرفی می‌توان الگوریتمی داد که به هر جدول با ۸ خانه‌ی سیاه رسید. پس پاسخ برابر $\binom{۱۶}{۸}$ است. □

۲۵ چند جدول ۴ × ۴ متفاوت وجود دارد که آقای خرچنگ با تعدادی مرحله می‌تواند به آن‌ها برسد؟

۱) $۲\binom{۱۶}{۸}$ ۲) $۲^{۱۶}$ ۳) $۲^{۸}$ ۴) $\binom{۱۶}{۸}$ ۵) $۲^{۱۵}$

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

زوجیت تعداد خانه‌های سیاه ثابت می‌ماند. از طرفی می‌توان الگوریتمی داد که به هر جدول با تعداد زوج خانه‌ی سیاه رسید. تعداد چنین جدول‌هایی نیز $۲^{۱۶-۱}$ است. پس پاسخ برابر $۲^{۱۵}$ است. □

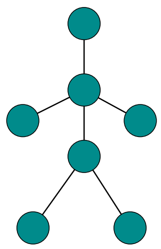
۲۶ چند جدول ۴×۴ متفاوت وجود دارد که اختاپوس با تعدادی مرحله می‌تواند به آن‌ها برسد؟

۱) $۲^{۴}$ ۲) ۹×۲^{۱۲} ۳) $۲^{۱۲}$ ۴) $۲^{۱۴}$ ۵) $۲^{۱۶}$

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

خانه‌های گوشه، مستقلا می‌توانند تغییر کنند. پس $۲^{۴}$ حالت دارند. خانه‌های سفید ابتدایی تنها با یک‌دیگر و خانه‌های سیاه ابتدایی نیز تنها با یک‌دیگر تغییر می‌کنند. پس کافی است حالات یکی از آن‌ها را حساب کنیم. خانه‌های سفید ابتدایی به جز گوشه‌ها، ۶ خانه هستند که با حالت‌بندی ۱۶، به ۱۶ حالت می‌توانند برسند. پس پاسخ برابر $۲^{۱۲} = ۱۶^{۳}$ است. □

گراف G را به این شکل می‌سازیم: ابتدا به ازای هر یک از اعداد ۰ تا ۶۳ یک رأس در نظر می‌گیریم. سپس بین هر دو رأس که نمایش دودویی آن‌ها دقیقاً در یک بیت اختلاف دارد یک یال رسم می‌کنیم.
به هر زیرمجموعه‌ی ۷تایی از رأس‌های G که دقیقاً شکل روبه‌رو را بسازند یک «آدمک» می‌گوییم. دقت کنید که بین رأس‌های یک آدمک نباید هیچ یالی غیر از یال‌های نشان‌داده‌شده در شکل مقابل در گراف G وجود داشته باشد.

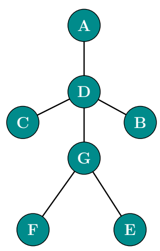


با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۷ در گراف G چند آدمک می‌توان پیدا کرد؟

۱) ۹۶۰۰ ۲) ۳۸۴۰ ۳) ۵۷۶۰ ۴) ۴۶۰۸۰ ۵) ۶۰۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.



راس‌ها را به شکل روبه‌رو نام‌گذاری می‌کنیم. نمایش عدد رأس D در مبنای دو را برابر با $(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶)_۲$ در نظر می‌گیریم.عدد راس‌های A, B, C, G باید دقیقاً در یک بیت با D اختلاف داشته باشند و رأس‌های A, B, C با هم تفاوتی ندارند. پس تا اینجا $۴ \times \binom{۶}{۴} \times ۶۴$ حالت داریم. عدد E و F در یک بیت با G متفاوت‌اند و به خاطر این که E و F نباید به A, B, C, D یال داشته باشند تنها در دو بیت خاص می‌توانند با G فرق کنند و از آنجایی که E و F در شکل تفاوتی ندارند این دو عضو یکتا معلوم می‌شوند. پس جواب نهایی برابر با $۳۸۴۰ = ۴ \times \binom{۶}{۴} \times ۶۴$ است. □

۲۸ عدد یک آدمک را برابر با XOR مقدار راس‌های آن در نظر می‌گیریم. مجموع اعداد تمام آدمک‌ها در گراف G چند است؟

۱) ۱۹۳۵۳۶۰ ۲) ۱۸۱۴۴۰ ۳) ۱۴۵۱۵۲۰ ۴) ۲۰۱۶ ۵) ۱۲۰۹۶۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

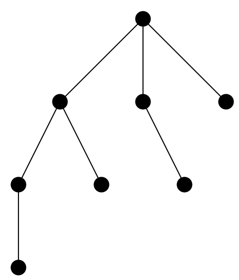
ادعا می‌کنیم عدد هر آدمک برابر با نقیض عدد D است. برای اثبات ادعا اول ترتیب بیت‌ها رو جوری تغییر می‌دهیم که اختلاف A و B و C و G با D به ترتیب در بیت‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ باشند و تفاوت F و E با G در بیت‌های ۵ و ۶ باشند.

$$\begin{aligned}
D &= (a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶)_۲\\
A &= (\overline{a_۱}, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶)_۲\\
B &= (a_۱, \overline{a_۲}, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶)_۲\\
C &= (a_۱, a_۲, \overline{a_۳}, a_۴, a_۵, a_۶)_۲\\
G &= (a_۱, a_۲, a_۳, \overline{a_۴}, a_۵, a_۶)_۲\\
E &= (a_۱, a_۲, a_۳, \overline{a_۴}, \overline{a_۵}, a_۶)_۲\\
F &= (a_۱, a_۲, a_۳, \overline{a_۴}, a_۵, \overline{a_۶})_۲
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه به ازای هر بیت درD نقیض آن فرد بار آمده و خود آن زوج بار، XOR همه‌ی اعداد در نهایت برابر با نقیض D خواهد بود. با توجه به سوال قبل داریم که به ازای هر D دل‌خواه $۴ \times \binom{۶}{۴}$ حالت مختلف داریم. پس مجموع عدد همه‌ی آدمک‌ها برابر با است با:

$$\sum_{x=۰}^{۶۳} x \times \binom{۶}{۴} \times ۴ = \binom{۶۴}{۲} \times \binom{۶}{۴} \times ۴ = ۱۲۰۹۶۰$$

□



باستان‌شناسان به تازگی روی سنگ‌های یک غار اشکالی از شجره‌نامه‌های یک قبیله‌ی باستانی یافته‌اند که نشان می‌دهد این قبیله در بچه‌دار شدن رسومات عجیبی داشته‌اند. در این قبیله اگر یک پدر k پسر داشته باشد، پسر بزرگ‌تر خانواده $k - ۱$ پسر به دنیا می‌آورد، پسر دوم خانواده $k - ۲$ پسر و همین طور تا پسر کوچک خانواده که هیچ پسری به دنیا نمی‌آورد و نباید پسردار شود. در شکل روبه‌رو شجره‌نامه‌ی یک خاندان از این قبیله را می‌بینید که جد بزرگ آن‌ها دارای سه پسر بوده است. در این شکل پسران به ترتیب سن از چپ به راست قرار دارند (از بزرگ به کوچک). توجه داشته باشید که در این شجرنامه‌ها تنها اطلاعات مردان فامیل می‌آمده است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۹ در یکی از شجره‌نامه‌ها که روی سنگ‌ها یافت شده است، مشخص است که جد بزرگ خاندان ۱۰ پسر داشته است، اما اطلاعات مربوط به پسر سوم جد بزرگ بر اثر مرور زمان مخدوش شده است. با استفاده از اطلاعات فوق دانشمندان می‌خواهند بدانند تعداد مردان در خاندانی که جد بزرگش این پسر بوده، چند است؟

۱) ۵۰۴۰ ۲) ۸۴ ۳) ۴۰۳۲۰ ۴) ۱۲۸ ۵) ۲۵۶

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

تعداد گره‌های موجود در هر زیر درخت با این خاصیت برابر با توانی از دو است. بصورت دقیق‌تر تعداد گره‌های یک درخت که ریشه‌ی آن k فرزند دارد برابر با ۲^k می‌باشد. فرزند سوم هفت فرزند خواهد داشت و در نتیجه در این زیر درخت $۲^۷$ گره وجود خواهد داشت. □

۳۰ فاصله‌ی فامیلی دو فرد در یک شجره‌نامه را طول مسیری که باید روی شجره‌نامه طی کرد تا از یک فرد به فرد دیگر رسید تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال فاصله‌ی فامیلی یک فرد با پدرش یک، با پدربزرگش دو و با عمویش سه است. حال در یک خاندان که جد بزرگش ۱۰۰ پسر دارد، فاصله‌ی فامیلی چند جفت از افراد در این خاندان برابر با ۱۹۸ می‌باشد؟ (جفت‌های (a,b) و (b,a) در شمارش تفاوتی ندارند و یک بار شمرده می‌شوند.)

۱) ۱۹۷ ۲) ۱۹۸ ۳) ۴ ۴) ۵ ۵) ۱۰۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

برای این که مسیر به طول ۱۹۸ داشته باشیم این مسیر حتما باید از ریشه عبور کند. همچنین می‌دانیم یک سر مسیر باید در زیر درخت اول ریشه قرار داشته باشد (در غیر این صورت طول مسیر کم‌تر از ۱۹۸ خواهد بود).
لم. در درختی که ریشه‌ی آن k فرزند داشته باشد، تعداد راس‌های به عمق $k-۱$ برابر k می‌باشد.
اگر مسیر از عمیق‌ترین برگ زیر درخت اول شروع شود وقتی به ریشه می‌رسد، طولش برابر ۱۰۰ خواهد بود. در این صورت اگر به زیر درخت دوم برود طبق لم ۹۸ حالت برای ادامه مسیر وجود دارد و اگر به زیر درخت سوم برود، یک حالت برای ادامه مسیر وجود خواهد داشت. پس اگر مسیر از عمیق‌ترین برگ در زیردرخت اول شروع شود ۹۹ حالت وجود خواهد داشت.
همچنین اگر مسیر از یک راس در عمق ۹۹ شروع شود وقتی به ریشه می‌رسد، طول ۹۹ خواهد داشت و تنها می‌تواند به عمیق‌ترین راس در زیر درخت دوم برود. چون طبق لم برای شروع مسیر ۹۹ راس کاندیدا داریم در این حالت نیز ۹۹ مسیر به دست می‌آید. پس پاسخ صحیح $۱۹۸ = ۹۹ + ۹۹$ است. □