- سؤال‌های **۲۵ تا ۳۰** در دسته‌های چندسؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ مجموعه‌ی اعداد $\{۸۵, ۳۱, ۲۴, ۶۹, ۵۱, ۱۷\}$ به ما داده شده است. حداقل چند عدد از این مجموعه را باید حذف کنیم تا میانگین اعداد باقی‌مانده برابر با ۴۲ شود؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۳ ۵) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

اگر بخواهیم دقیقاً یک عدد را حذف کنیم، مجموع اعداد باقی‌مانده باید برابر با ۴۲×۵ باشد. بنابراین عدد حذف‌شده باید برابر

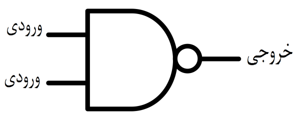
$$(۱۷ + ۵۱ + ۶۹ + ۲۴ + ۳۱ + ۸۵) - ۵ \times ۴۲ = ۶۷$$

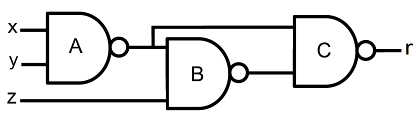
باشد که این مقدار در بین اعداد نیست. اگر بخواهیم دو عدد را حذف کنیم مجموع دو عدد حذف‌شده باید برابر

$$(۱۷ + ۵۱ + ۶۹ + ۲۴ + ۳۱ + ۸۵) - ۴ \times ۴۲ = ۱۰۹$$

باشد که این مقدار با حذف کردن دو عدد ۸۵ و ۲۴ حاصل می‌شود. بنابراین پاسخ برابر ۲ است. □

۲ برای ساخت مدارهای الکترونیکی از گیت‌ها استفاده می‌شود. هر گیت تعدادی ورودی و تنها یک خروجی دارد. تمامی ورودی‌ها و خروجی یک گیت می‌توانند تنها یکی از دو مقدار صفر و یک را داشته باشند. گیت NAND که در شکل مقابل نشان داده شده است، یک گیت با دو ورودی و یک خروجی است. خروجی این گیت تنها موقعی صفر است که هر دو ورودی آن یک باشند، در غیر این صورت خروجی آن برابر یک می‌شود. با استفاده از گیت NAND مداری به شکل زیر طراحی کرده‌ایم. به ازای چند حالت از ورودی‌های x، y و z مقدار خروجی r برابر صفر می‌شود؟ دقت کنید که در این مدار، خروجی گیت A ورودی گیت‌های B و C است.



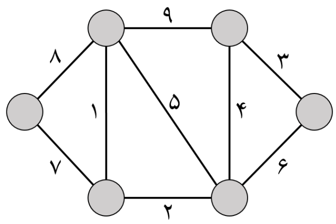


۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۲ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

برای این‌که مقدار r برابر صفر شود، لازم است که هر دو ورودی گیت C برابر ۱ باشند. بنابراین خروجی گیت‌های A و B برابر با ۱ هستند. برای این‌که خروجی گیت A برابر ۱ شود، حداقل یکی از ورودی های x یا y باید برابر صفر باشند. با توجه به این‌که خروجی گیت A یک است، بنابراین برای این‌که خروجی گیت B برابر ۱ شود، ورودی z باید مقدار صفر بگیرد. بنابراین به ازای سه حالت $x = ۱, y = ۰, z = ۰$، $x = ۰, y = ۱, z = ۰$ و $x = ۰, y = ۰, z = ۰$ خروجی r برابر صفر می‌شود. □

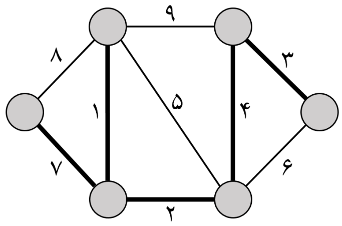
۳ استان دور (زادگاه فامیل دور) از ۶ شهر تشکیل شده است که همانند شکل مقابل با جاده‌های خاکی به هم متصل‌اند. هزینه‌ی آسفالت کردن هر جاده به صورت یک عدد صحیح کنار جاده نشان داده شده است. نامزد نمایندگی این استان وعده داده است که در صورت پیروزی در انتخابات، با آسفالت کردن تعدادی از این جاده‌ها کاری کند که بین هر دو شهر از این استان یک مسیر آسفالت (نه لزوما مستقیم) به وجود آید. کم‌ترین هزینه‌ای که این نامزد در صورت پیروزی در انتخابات برای تحقق وعده‌اش باید بپردازد چقدر است؟



۱) ۲۶ ۲) ۳۶ ۳) ۲۱ ۴) ۱۷ ۵) ۲۸

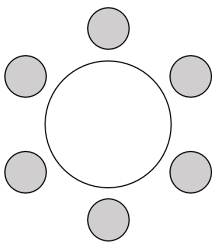
پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

با انتخاب جاده‌های نشان‌داده‌شده در شکل زیر می‌توان با مجموع هزینه‌ی ۱۷ تمام شهرها را با مسیر آسفالت به هم متصل کرد.



□

۴ یک خرابه به شکل مقابل شش جایگاه دارد. یک دزد در یکی از این جایگاه‌ها است. تیم امنیتی سلطان شامل تعدادی پلیس ماهر است. پلیس‌ها نمی‌دانند دزد کجا است و می‌خواهند او را دست‌گیر کنند. در ابتدای هر مرحله هر پلیس در یکی از جایگاه‌ها قرار می‌گیرد. اگر دزد در یکی از جایگاه‌هایی بود که پلیسی در آن قرار دارد، دست‌گیر می‌شود. در غیر این صورت پلیس‌ها از جایگاه‌ها خارج می‌شوند و دزد یکی از حرکات زیر را انجام می‌دهد:



- به جایگاه سمت راست خود می‌رود.
- به جایگاه سمت چپ خود می‌رود.
- به جایگاه روبه‌روی خود (با سه واحد فاصله) می‌رود.

سپس مجددا پلیس‌ها در جایگاه‌ها (نه لزوما جایگاه‌های مرحله‌ی قبل) قرار می‌گیرند و این مراحل تا یافتن دزد ادامه می‌یابد. با توجه به این نوع حرکات، تیم سلطان باید حداقل چند پلیس داشته باشد تا بتواند به طور تضمینی در تعداد محدودی مرحله دزد را دست‌گیر کند؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

از آن‌جایی که دزد در هر مرحله به سه جای مختلف می‌تواند برود، پس اگر تعداد پلیس‌ها کم‌تر از سه تا باشد، ممکن است دزد در هر مرحله به جایی برود که پلیسی آن را پوشش نخواهد داد. پس پاسخ از ۳ کم‌تر نیست.
حال در جایگاه‌ها یک در میان پلیس بگذارید. فرض کنید دزد در مرحله‌ی اول دست‌گیر نشود، یعنی در یکی از سه خانه‌ی دیگر است. در مرحله‌ی دوم دوباره پلیس‌ها را همان‌جای قبل بگذارید. در هر صورت دزد به یکی از جایگاه‌های پلیس‌دار آمده است و دست‌گیر می‌شود. پس پاسخ برابر ۳ است. □

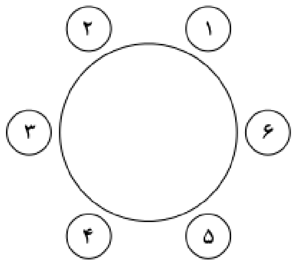
۵ همان سوال قبل را در نظر بگیرید، با این تفاوت که دزد در هر مرحله یکی از حرکات زیر را انجام می‌دهد:

- یک واحد به سمت راست خود حرکت می‌کند.
- دو واحد به سمت چپ خود حرکت می‌کند.

در این صورت حداقل چند پلیس لازم است؟

۱) ۳   ۲) ۵   ۳) ۲   ۴) ۴   ۵) ۱

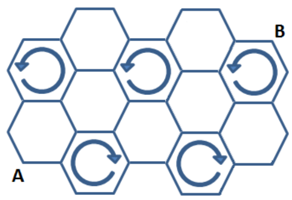
پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.



مانند استدلال قسمت قبل ثابت می‌شود حداقل دو پلیس لازم است. حال روشی ارائه می‌دهیم که سلطان بتواند با دو پلیس، دزد را دست‌گیر کند. جایگاه‌ها را به شکل مقابل با شماره‌های ۶ ,... ,۲ ,۱ شماره‌گذاری کنید:

- اگر دزد در جایگاه ۱ یا ۴ باشد، به جایگاه ۲ یا ۵ می‌رود.
- اگر دزد در جایگاه ۲ یا ۵ باشد، به جایگاه ۳ یا ۶ می‌رود.
- اگر دزد در جایگاه ۳ یا ۶ باشد، به جایگاه ۱ یا ۴ می‌رود.

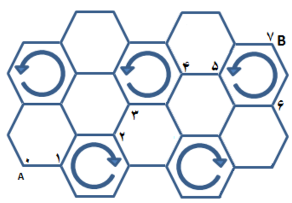
حال همواره در هر مرحله پلیس‌ها را در جایگاه‌های ۱ و ۴ بگذارید. حداکثر در مرحله‌ی سوم دزد به این خانه‌ها خواهد آمد و دست‌گیر می‌شود. پس پاسخ برابر ۲ است. □



۶ مورچه‌ای به کندوی زنبورها راه پیدا کرده است. او تنها می‌تواند روی مرز لانه‌ها حرکت کند. زنبورها از لانه‌هایی چرخان استفاده می‌کنند تا عسل آن‌ها شکرک نزند! این لانه‌ها در هر ثانیه یک واحد در جهت مشخص‌شده می‌چرخند. مورچه یک ضلع را می‌تواند در یک ثانیه طی کند و همواره در ابتدای هر ثانیه تصمیم می‌گیرد که یا سر جای خود بایستد، یا به سمت یکی از تقاطع‌های مجاور خودش حرکت کند و تا رسیدن به تقاطع تصمیم خود را تغییر نمی‌دهد (حتی اگر به علت چرخش جهت حرکتش تغییر کند). اگر مورچه در تقاطع A باشد، کم‌ترین زمان لازم برای آن که به تقاطع B برسد چقدر است؟

۱) ۱۱   ۲) ۶   ۳) ۷   ۴) ۱۰   ۵) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

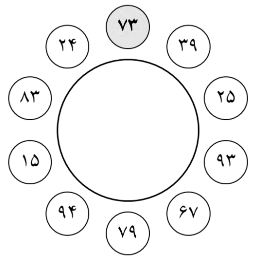


کافی است به صورت دینامیک مساله را حل کنیم. از پایین سمت چپ شروع کرده و کم‌ترین زمانی که می‌توانیم به هر کدام از تقاطع‌ها برسیم را محاسبه می‌کنیم. واضح است که اگر مورچه در یک تقاطع روی یک لانه‌ی چرخان باشد، پس از یک ثانیه در یکی از سه تقاطع زیر قرار دارد:

۱. همان تقاطع (اگر خود مورچه در خلاف جهت چرخش بتواند حرکت کند و حرکت بکند.)
۲. یک تقاطع جلوتر در جهت چرخش (اگر حرکت نکند.)
۳. دو تقاطع جلوتر در جهت چرخش (اگر در جهت چرخش بتواند حرکت کند و حرکت بکند.)

در شکل بالا کوتاه‌ترین مسیر تا مقصد مشخص شده است. □

۷ ده نفر دور یک میز نشسته‌اند. هر نفر مقداری پول دارد که به ما اطلاع نمی‌دهد. اما در عوض هر نفر از میزان پول دو نفر مجاور خود باخبر است و مجموع پول کناردستان خود را بلند اعلام می‌کند. در تصویر مقابل عددی که هر فرد اعلام کرده آمده است. در این صورت میزان پول نفری که بالای میز با رنگ خاکستری مشخص شده چقدر می‌تواند باشد؟

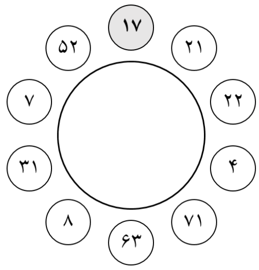


۱) ۱۷ ۲) ۱۵ ۳) ۲۵ ۴) ۰ ۵) ۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

افراد را با شروع از فرد خاکستری در جهت ساعتگرد به ترتیب از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری کنید. فرض کنید a_i مقدار عدد اعلامی توسط نفر iام باشد. آن گاه جواب برابر است با:

$$\frac{a_{۲} - a_{۴} + a_{۶} - a_{۸} + a_{۱۰}}{۲} = \frac{۳۹ - ۹۳ + ۷۹ - ۱۵ + ۲۴}{۲} = ۱۷$$



مقدار پول هر نفر در شکل مقابل نشان داده شده است. □

۸ هفت کشور از جمله ایران برای میزبانی مسابقات جهانی المپیاد کامپیوتر در سال ۲۰۱۷ نامزد شده‌اند. برای انتخاب کشور میزبان، هیئت داوران در هر مرحله دو کشور از میان کشورهای باقی‌مانده را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کند و بر اساس نظر داوران، کشور بازنده را از دور خارج می‌کند. این کار تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که تنها یک کشور باقی بماند. تنها کشور باقی‌مانده میزبان مسابقات خواهد شد. فرض کنید از قبل نظر هیئت داوران را به ازای هر دو کشور انتخاب‌شده می‌دانیم. نظر هیئت داوران در جدول مقابل آمده است. به ازای $۱ \leqslant i \neq j \leqslant ۷$ اگر عددی که در ردیف iام و ستون jام آمده است برابر ۱ باشد، کشور i برنده خواهد شد (یعنی نظر هیئت دواران با کشور i است). در غیر این‌صورت، کشور j برنده خواهد شد. با توجه به این جدول چند کشور شانس میزبانی را خواهند داشت؟

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰
۲	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۳	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰
۴	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۵	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۰
۶	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰
۷	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۷ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

یک گراف کامل ۷ راسی با شماره راس‌های ۱ تا ۷ را در نظر بگیرید. اگر بین دو کشور i و j، نظر هیئت داوران با کشور i بود، یال بین این دو راس را از j به i جهت‌دار می‌کنیم. به سادگی می‌توان ثابت کرد کشور i شانس میزبانی دارد اگر و فقط اگر از همه‌ی راس‌های گراف فوق به راس i مسیر وجود داشته باشد. مولفه‌های قویا همبند گراف فوق را پیدا می‌کنیم. کشورهایی که رئوس متناظرشان در مولفه‌ی قویا همبندی قرار دارند که یال خروجی ندارد، شانس میزبانی خواهند داشت. □

۹ فرض کنید a یک بیت دل‌خواه (۰ یا ۱) باشد. منظور از $\bar{a}$ برابر با $۱ - a$ است. حال فرض کنید یک رشته‌ای دودویی داریم. در هر مرحله می‌توان یکی از دو عمل زیر را انجام داد:

- یک بیت مانند b در رشته را در نظر بگیریم و در دو طرف آن $\bar{b}$ بنویسیم. برای مثال از رشته‌ی $\langle ۱, ۱, ۰ \rangle$ و با انتخاب بیت وسط می‌توان به رشته‌ی $\langle ۱, ۰, ۱, ۰, ۰ \rangle$ رسید.
- دو بیت متوالی مانند ab را در نظر بگیریم و به جای آن‌ها $\bar{a}\bar{b}$ بنویسیم. برای مثال از رشته‌ی $\langle ۱, ۱, ۰ \rangle$ و با انتخاب دو بیت سمت راست می‌توان به رشته‌ی $\langle ۰, ۰, ۰ \rangle$ رسید.

اگر ابتدا رشته‌ی دودویی ⟨۰⟩ را داشته باشیم، با استفاده از دو عمل فوق نمایش دودویی چند عدد صحیح از ۲۱ تا ۲۶ را می‌توانیم بسازیم؟ توجه کنید که قرار گرفتن رقم‌های ۰ در ابتدای نمایش اشکال ندارد. برای مثال اگر به رشته‌ی ⟨۰, ۰, ۱, ۱, ۰, ۱⟩ برسیم، در واقع عدد ۱۳ را ساخته‌ایم.

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

ثابت می‌کنیم یک عدد قابل ساختن است، اگر و تنها اگر در نمایش دودویی آن زوج رقم ۱ وجود داشته باشد. با انجام این دو نوع عمل، زوجیت تعداد ارقام ۱ تغییری نمی‌کند. کافی است ثابت کنیم هر عدد که نمایش دودویی آن زوج رقم ۱ دارد، قابل ساختن است. فرض کنید عدد n چنین باشد و $۲p$ رقم ۱ و q رقم ۰ در نمایش دودویی آن موجود باشد. با تبدیل ۰ به ۰۱۱ به شکل زیر می‌توان به رشته‌ی ۰۱۱ . . . ۱ که $۲p$ رقم ۱ دارد، رسید:

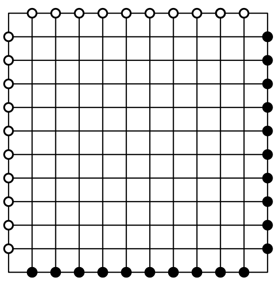
$$۰ \to ۱۰۱ \to ۰۱۱ \to ۱۰۱۱۱ \to ۰۱۱۱۱ \to \ldots$$

حال با تبدیل ۰ به ۰۰۰ به شکل زیر می‌توان به رشته‌ی ۰۰ . . . ۰۱۱ . . . ۱ رسید که $۲p$ رقم ۱ و بیش‌تر از q رقم ۰ دارد:

$$۰۱۱\ldots۱ \to ۱۰۱۱۱\ldots۱ \to ۱۱۰۱۱\ldots۱ \to ۰۰۰۱۱\ldots۱ \to \ldots$$

حال با تبدیل ۰۱ به ۱۰ می‌توان هر ۰ را آن‌قدر به سمت راست انتقال داد تا به جای مورد نظر برسد و به این ترتیب عدد n ساخته می‌شود.
در نمایش دودویی اعداد ۲۶ , . . . ,۲۲ ,۲۱ تنها دو عدد هستند که زوج رقم ۱ دارند. پس پاسخ برابر ۲ است. □

۱۰ در شبکه‌ی ۱۲ × ۱۲ مقابل ۲۰ ماشین در نقاط پررنگ قرار گرفته‌اند و می‌خواهند به نقاط توخالی روبه‌روی خود بروند. ماشین‌های سمت راست جدول تنها به سمت چپ حرکت می‌کنند و ماشین‌های پایین جدول تنها به سمت بالا حرکت می‌کنند. سرعت هر ماشین یک متر بر ثانیه است و فاصله‌ی هر دو نقطه‌ی مجاور در جدول یک متر است. می‌خواهیم به هر ماشین عددی طبیعی از ۱ تا k نسبت دهیم طوری که اگر هر ماشین در زمانی که به آن نسبت داده شده شروع به حرکت کند، بدون برخورد با ماشین دیگری به مقصد خود برسد. کوچک‌ترین عدد k که بتواند شرایط فوق را برآورده کند چقدر است؟



۱) ۱۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

می توانیم طوری به ماشین ها عدد نسبت دهیم که در هر لحظه ماشین های یک سمت در خانه های یک رنگ و ماشین های سمت دیگر در رنگ دیگر باشند. □

۱۱ مرتضی ۲ بسته‌ی پنج کیلویی، ۲ بسته‌ی چهار کیلویی و ۲ بسته‌ی سه کیلویی دارد (بسته‌ها متمایزند). او هم‌چنین سه کیسه‌ی یکسان دارد که گنجایش هر کدام ۱۰ کیلوگرم است. مرتضی به چند طریق می‌تواند بسته‌هایش را در این کیسه‌ها قرار دهد و به خانه ببرد؟

۱) ۶ ۲) ۲۱ ۳) ۴۸ ۴) ۳۲ ۵) ۱۵

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

حالت‌بندی می‌کنیم:

- اگر دو بسته‌ی ۵-کیلویی در یک کیسه قرار گیرند، یا در هر کیسه‌ی دیگر ۲ بسته قرار می‌گیرد که ۳ حالت دارد و یا در یک کیسه یک بسته‌ی ۴-کیلویی و بسته‌های دیگر در کیسه‌ی دیگر قرار می‌گیرند که ۲ حالت دارد.
- اگر دو بسته‌ی ۵-کیلویی در کیسه‌های جدا قرار گیرند، یا در کیسه‌ی خالی دو بسته قرار گرفته و کنار هر یک از ۵-کیلویی‌ها یک بسته‌ی دیگر می‌آید که $۲ \times \binom{۴}{۲}$ حالت دارد و یا در کیسه‌ی خالی دو بسته‌ی ۳-کیلویی و یک ۴-کیلویی می‌آید و بسته‌ی باقی‌مانده به کنار یکی از ۵-کیلویی‌ها می‌رود که $۲ \times ۲ = ۴$ حالت دارد.

پس در کل ۲۱ حالت داریم. □

۱۲ یک ماشین در اختیار داریم که هر رشته‌ی kتایی از صفر و یک مثل $x_۱, x_۲, ..., x_k$ را به یک رشته‌ی $(k-۱)$تایی به صورت $(x_۱ \oplus x_۲), (x_۲ \oplus x_۳), \ldots, (x_{k-۱} \oplus x_k)$ تبدیل می‌کند. (منظور از $x \oplus y$ عمل XOR دو عدد x و y است و مقدار آن تنها وقتی یک است که دقیقا یکی از دو عدد x و y یک باشد.) تعداد nهای از ۱ تا ۱۳۹۲ را بیابید که برای هر رشته nتایی دل‌خواه مثل $x_۱, x_۲, ..., x_n$ اگر این رشته را به ماشین بدهیم و خروجی را باز به ماشین بدهیم و این‌کار را آن قدر تکرار کنیم تا در نهایت یک عدد مثل t به دست آید، آن گاه داشته باشیم: $t = x_۱ \oplus x_۲ \oplus x_۳ \oplus \cdots \oplus x_n$.

۱) ۱۰ ۲) ۱۰۲۴ ۳) ۱۱ ۴) ۱ ۵) ۱۰۲۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

عدد n خاصیت فوق را دارد اگر و تنها اگر $n = ۲^k$. □

۱۳ در کلاسی ۲۰۰ دانش‌آموز وجود دارد. هر دانش‌آموز از این کلاس با دقیقا یکی دیگر از دانش‌آموزان کلاس دوست است. رابطه‌ی دوستی دوطرفه است، یعنی اگر فرد a دوست فرد b باشد، آنگاه فرد b نیز دوست فرد a است. معلم این کلاس برای آشنا شدن با دانش‌آموزان خود هر بار دو نفر از دانش‌آموزان را انتخاب می‌کند و از آن‌ها می‌پرسد که آیا با یکدیگر دوست هستند یا خیر. معلم کلاس با حداقل چند سوال می‌تواند رابطه‌های دوستی در کلاس را به طور کامل کشف کند؟

۱) ۱۰۰۰۰ ۲) ۹۹۰۰ ۳) ۴۹۵۰ ۴) ۱۹۹۰۰ ۵) ۵۰۵۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

اگر $۲n$ دانش‌آموز داشته باشیم (n زوج رابطه‌ی دوستی)، آن‌گاه جواب $n(n-۱)$ می‌شود. برای به دست آوردن رابطه‌ها بعد از این تعداد حرکت معلم باید با پرسیدن یک فرد با $۲n-۲$ دوست او را بیابد (یا یکی از آن $۲n-۲$ فرد دوست اوست یا فرد باقی‌مانده) و بقیه‌ی $n-۱$ جفت را بصورت بازگشتی بیابد. برای اثبات بهینگی هم فرض کنید جواب‌ها تا زمانی که ممکن است منفی باشد. آن گاه هرگاه معلم جواب را بیابد، به ازای هر دو جفت دوستی باید دو سوال پرسیده باشد وگرنه راه دیگری برای جفت کردن دانش آموزان وجود دارد از تعداد جفت ها در n تا و تعداد حالت های انتخاب ۲ تا از آن‌ها $n(n-۱)/۲$ است که با توجه به ضربدر نهایی حداقل $n(n-۱)$ پرسش لازم است. □

۱۴ یک جدول ۴×۴ داریم که ابتدا تمام خانه‌های آن سفید است. دو خانه را **مجاور** می‌گوییم، اگر در یک ضلع مشترک باشند. **قلمرو** هر خانه عبارت است از خود آن خانه و تمامی خانه‌های مجاورش. بنابراین قلمرو هر خانه شامل حداکثر ۵ خانه است. در هر مرحله می‌توان تعدادی از خانه‌های قلمرو یک خانه را انتخاب کرد و رنگ آن‌ها را تغییر داد (از سفید به سیاه و برعکس). در حداقل چند مرحله می‌توان تمام خانه‌های جدول را سیاه کرد؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

در هر مرحله می‌توان رنگ حداکثر ۵ خانه را تغییر داد. از آن‌جایی که رنگ ۱۶ خانه باید تغییر کند، دست کم به $\lceil \frac{16}{5} \rceil = 4$ مرحله نیاز است. شکل زیر نیز روشی با ۴ مرحله ارائه می‌دهد (در مرحله‌ی i خانه‌های با شماره‌ی i را تغییر رنگ می‌دهیم):

۴	۴	۴	۳
۲	۴	۳	۳
۲	۲	۱	۳
۲	۱	۱	۱

پس پاسخ برابر ۴ است. □

۱۵ سوال قبل را در نظر بگیرید، با این تفاوت که این بار در هر مرحله می‌توان یک خانه انتخاب کرد و رنگ دقیقا سه خانه از قلمرو آن را تغییر داد. در این صورت کم‌ترین تعداد مراحل لازم برای سیاه کردن تمام خانه‌های جدول چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

به مانند استدلال قسمت قبل دست کم $\lceil \frac{16}{3} \rceil = 6$ مرحله لازم است. در زیر نیز روشی با ۶ مرحله ارائه شده است (در مرحله‌ی i خانه‌های با شماره‌ی i را تغییر رنگ می‌دهیم):

۲	۱	۳	۵
۲	۱،۲،۳	۳	۵
۴	۱	۶	۵
۴	۴	۶	۶

پس پاسخ برابر ۶ است. □

۱۶ در بازی فوتژال اگر دو تیم به تساوی برسند، بازی به ضربات پنالتی کشیده می‌شود. هر تیم ۲ پنالتی می‌زند و تیمی که تعداد پنالتی بیش‌تری را گل کند، بازی را می‌برد. اگر در ضربات پنالتی نیز مساوی شدند، بازی به تک‌پنالتی کشیده می‌شود. یعنی هر تیم یک پنالتی می‌زند و اگر برنده مشخص شد که بازی تمام است و اگر نه دوباره تک‌پنالتی می‌زنند تا برنده مشخص شود. تیم‌های ایران و آرژانتین مسابقه‌ی فوتژال برگزار کرده‌اند و بازی به ضربات پنالتی کشیده شده است. اگر بدانیم هر پنالتی تیم ایران به احتمال $\frac{1}{2}$ و هر پنالتی تیم آرژانتین به احتمال $\frac{2}{3}$ گل می‌شود، به چه احتمالی تیم ایران برنده‌ی بازی خواهد بود؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{23}{135}$ ۳) $\frac{25}{81}$ ۴) $\frac{1}{5}$ ۵) $\frac{4}{9}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

قرار دهید $p = \frac{۱}{۳}, q = \frac{۲}{۳}$. ابتدا فرض کنید بازی به ضربات تک‌پنالتی کشیده شده است. در این صورت اگر احتمال برد ایران را x بگیریم، داریم:

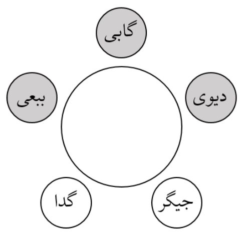
$$x = p(۱ - q) + \Big(pq + (۱ - p)(۱ - q)\Big)x$$

از رابطه‌ی بالا مقدار $x = \frac{۱}{۵}$ به دست می‌آید.
برای محاسبه‌ی جواب اصلی مسئله، می‌توانید تمام حالات را محاسبه کنید؛ اما می‌توان با کمی دقت دریافت که می‌توان فرض کرد تمام پنالتی‌ها را تیم آرژانتین می‌زند! به احتمال $\frac{۲}{۳}$ هر پنالتی برای آرژانتین و به احتمال $\frac{۱}{۳}$ برای ایران است. در واقع تا قبل از ضربات تک‌پنالتی می‌توان فرض کرد چهار پنالتی توسط آرژانتین زده می‌شود. به این ترتیب احتمال برد ایران برابر است با:

$$\binom{۴}{۳} \times (\frac{۱}{۳})^{۳} \times \frac{۲}{۳} + \binom{۴}{۴} \times (\frac{۱}{۳})^{۴} + \binom{۴}{۲} \times (\frac{۱}{۳})^{۲} \times (\frac{۲}{۳})^{۲} \times x = \frac{۲۳}{۱۳۵}$$

□

۱۷ ببعی و گابی و دیوی و جیگر و گدا به شکل مقابل دور یک میز نشسته‌اند. صندلی‌های خاکستری، صندلی‌های «ویژه» هستند. در ابتدا گدا یک ریال دارد و بقیه هیچ پولی ندارند. در هر مرحله آقای مجری یکی از دو کار زیر را انجام می‌دهد:



- هر کس را دو صندلی به سمت راست می‌برد. (توجه کنید که صندلی‌ها جابه‌جا نمی‌شوند و فقط خود افراد جابه‌جا می‌شوند.)
- به هر کس که روی یک صندلی ویژه نشسته است، یک ریال می‌دهد.

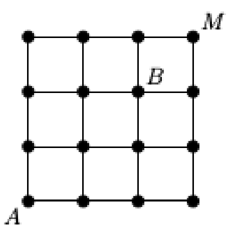
آقای مجری قصد دارد کاری کند که پول همه‌ی افراد برابر k ریال شود. به ازای چند مقدار $۲ \leqslant k \leqslant ۵$ آقای مجری می‌تواند با تعدادی گام به این هدف برسد؟

۱) ۲   ۲) ۰   ۳) ۱   ۴) ۴   ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

مجموع پول افراد در پیمانه‌ی ۳ ثابت می‌ماند. پس در انتها باید $۵k$ به صورت $۳a + ۱$ باشد که تنها به ازای k-هایی امکان‌پذیر است که باقی‌مانده‌ی ۲ در پیمانه‌ی ۳ دارند. پس در این سوال تنها به ازای $k = ۲, ۵$ امکان انجام کار وجود دارد.
به ازای $k = ۲, ۵$ نیز می‌توان به هدف رسید؛ برای مثال برای $k = ۲$ به ترتیب با انجام اعمال ۲، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۲، ۱، ۱، ۱، ۱، ۲ می‌توانیم به هدف‌مان برسیم.
□

۱۸ در شکل مقابل می‌خواهیم از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برویم، طوری که از نقطه‌ی M بگذریم. در هر مرحله می‌توان یک واحد در یکی از چهار جهت (چپ، راست، بالا و پایین) حرکت کرد. هم‌چنین از هر نقطه اجازه داریم حداکثر یک بار عبور کنیم. به چند طریق این کار ممکن است، طوری که دقیقا ۱۰ گام برداریم؟



۱) ۱۰   ۲) ۱۸   ۳) ۸   ۴) ۱۶   ۵) ۲۰

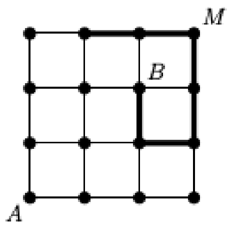
پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

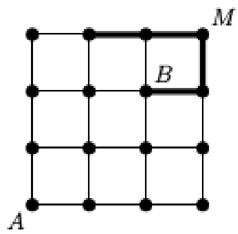
حرکت به دو قسمت تقسیم می‌شود:

- حرکت از A به M (بخش یکم حرکت)
- حرکت از M به B (بخش دوم حرکت)

تعداد حرکات هر یک از دو بخش باید زوج باشد، پس تنها دو حالت زیر را داریم:

- بخش یکم شامل ۸ حرکت و بخش دوم شامل ۲ حرکت باشد؛ در این صورت بخش دوم حرکت (با بررسی مسیر از انتها) ۲ حالت دارد. با مشخص شدن بخش دوم حرکت، دو گام آخر بخش یکم نیز به صورت یکتا مشخص می‌شود. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید ۴ گام آخر به شکل زیر سمت راست باشد. با حالت‌بندی نیز می‌توان دید ۶ گام ابتدای مسیر ۵ حالت دارد.
- بخش یکم شامل ۶ حرکت و بخش دوم شامل ۴ حرکت باشد؛ در این صورت بخش دوم حرکت (با بررسی مسیر از انتها) ۲ حالت دارد. با مشخص شدن بخش دوم حرکت، دو گام آخر بخش یکم نیز به صورت یکتا مشخص می‌شود. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید ۶ گام آخر به شکل زیر سمت چپ باشد. در این صورت ۴ گام ابتدای مسیر $\binom{۴}{۱}$ حالت دارد.





پس کل کار به $۱۸ = ۴ \times ۲ + ۵ \times ۲$ حالت قابل انجام است. □

۱۹ محیا در حال طراحی یک بازی است. این بازی شامل تعدادی کارت است که روی هر یک از آن‌ها سه عدد متمایز از مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۷ درج شده است. محیا می‌خواهد کارت‌ها را به نحوی بسازد که هر دو کارت متمایز دقیقا یک عدد مشترک داشته باشند. در این صورت، او حداکثر چند کارت متفاوت می‌تواند بسازد؟

۱) ۹ ۲) ۲ ۳) ۷ ۴) ۳ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

واضح است که هر عدد در حداکثر ۳ کارت قابل درج است، زیرا اگر عددی مانند x در چهار کارت درج شود، تمام هشت عدد دیگر در این چهار کارت باید متمایز باشند که به دلیل وجود تنها ۷ عدد متمایز امکان پذیر نیست. در نتیجه تعداد کل کارت‌های قابل ساخت حداکثر $۷ = \frac{۳\times۷}{۳}$ است. این ۷ کارت را می‌توان به شکل زیر ساخت:

$$(۱,۲,۳),(۱,۴,۵),(۱,۶,۷),(۲,۴,۶),(۲,۵,۷),(۳,۴,۷),(۳,۵,۶)$$

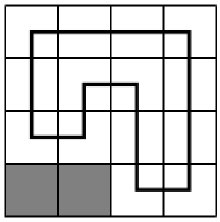
□

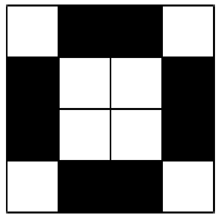
۲۰ یک جدول ۴×۴ را در نظر بگیرید. دو خانه از این جدول را مجاور گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. فرض کنید از یک خانه‌ی این جدول شروع کنیم و در هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور برویم، طوری که از هر خانه‌ی جدول دقیقا یک بار عبور کنیم و در انتها به خانه‌ی آغازین بازگردیم. به چنین حرکتی، **دور همیلتنی** می‌گوییم. به چند طریق می‌توان دو خانه از جدول را حذف کرد، طوری که خانه‌های باقی‌مانده‌ی جدول دور همیلتنی داشته باشند؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۲۰ ۵) ۳۲

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

خانه‌های سیاه شکل زیر سمت راست را در نظر بگیرید. اگر هر کدام از این خانه‌ها حذف شوند، خانه‌ی گوشه‌ی مجاور آن‌ها باید حذف شود؛ زیرا در غیر این صورت درجه‌ی خانه‌ی گوشه‌ی مجاور آن در گراف متناظر، کم‌تر از دو خواهد بود و نمی‌تواند در دور باشد. هم‌چنین اگر یکی از این خانه‌ها به همراه گوشه‌ی مجاور حذف شوند (به ۲×۴ حالت)، به شکل زیر دور همیلتنی خواهیم داشت:

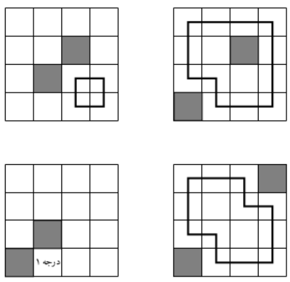




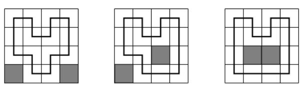
پس تنها بررسی حالاتی باقی می‌ماند که دو خانه‌ی حذف شده از گوشه‌ها یا خانه‌های وسط باشند. اگر دو خانه‌ی حذف شده یکی از حالات زیر باشند:

- در دو گوشه‌ی مقابل
- در یک گوشه و یک خانه‌ی وسط که به همراه آن گوشه روی یک قطر اصلی هستند
- در دو خانه‌ی وسط غیر مجاور

آن گاه یا رأس درجه‌ی ۱ وجود دارد، یا با کشیدن یال‌هایی از مسیر که به طور یکتا تعیین می‌شوند (برای مثال یال‌های رئوس با درجه‌ی دو)، مشاهده می‌شود که امکان وجود دور همیلتنی نیست.

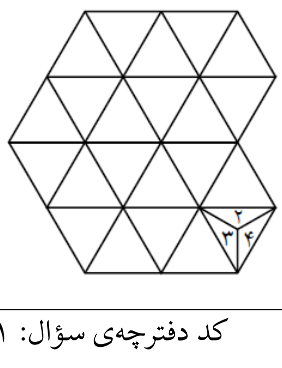


اگر دو خانه‌ی حذف‌شده در حالاتی جز حالات بالا باشند به شکل زیر دور همیلتنی وجود دارد:



تعداد حالات انتخاب دو خانه به شکل بالا (به ترتیب از راست به چپ) برابر ۴، ۸ و ۴ است. پس پاسخ نهایی برابر $۲۴ = ۴ + ۸ + ۴ + ۸$ است. □

۲۱ هرمی که اعداد ۱ تا ۴ روی وجوه آن نوشته شده است روی یک خانه از جدول مثلثی همانند شکل مقابل قرار گرفته است (روی وجه زیرین عدد ۱ نوشته شده است). این هرم در هر حرکت می‌تواند به یکی از خانه‌هایی که با خانه‌ی فعلی هرم ضلع مشترک دارد برود. حرکت هرم به این صورت است که یال روی ضلع مشترک از زمین بلند نمی‌شود و هرم حول این ضلع مشترک دوران می‌کند و در خانه‌ی جدید می‌نشیند (روی وجه دیگر مجاور آن یال). این هرم در هر خانه‌ای از جدول که قرار می‌گیرد شماره‌ی وجه زیرین خود را در آن حک می‌کند (برای مثال



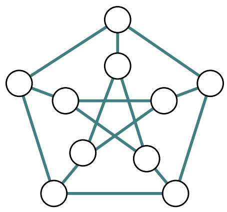
در خانه‌ی اول عدد ۱ حک می‌شود). می‌خواهیم این هرم را طوری روی جدول حرکت دهیم که در هر خانه‌ای دقیقا یک عدد حک شود. حداکثر مقدار مجموع اعداد حک‌شده چند می‌تواند باشد؟

۱) ۵۳   ۲) ۶۴   ۳) ۶۰   ۴) ۵۶   ۵) ۶۶

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

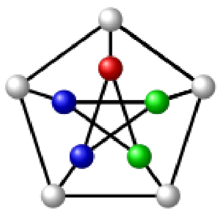
تنها به یک روش می‌توان اعداد را روی جدول حک کرد که آن هم الگوی منظم رنگ‌آمیزی شبکه‌ی مثلثی با چهار رنگ است. دو خانه جدول که برداشته شده‌اند، اعداد ۳ و ۴ را در خود جای می‌دادند، پس مجموع ۶۰ منهای ۷ یا همان ۵۳ است. □

۲۲ شکل مقابل از تعدادی دایره و میله در صفحه ساخته شده است. می‌خواهیم هر یک از دایره‌های این شکل را با یکی از سه رنگ قرمز، آبی و سبز رنگ کنیم، طوری که هر دو دایره‌ای که با میله به هم وصل هستند، ناهم‌رنگ باشند. به چند طریق این کار ممکن است؟ دو روش رنگ‌آمیزی را که با دوران شکل در صفحه به هم تبدیل می‌شوند، یکسان در نظر می‌گیریم.

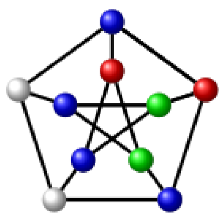


۱) ۱۲   ۲) ۲۴   ۳) ۶   ۴) ۶۰   ۵) ۱۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.



دور پنج‌تایی وسط را در نظر بگیرید. اگر از یکی از رنگ‌ها سه توپ در این دور داشته باشیم، طبق اصل لانه کبوتری دو تا از آن‌ها مجاور خواهند شد که امکان ندارد. پس تنها حالت برای دور پنج‌تایی وسط این است که از دو رنگ، هر کدام دو توپ و از رنگ دیگر یک توپ داشته باشیم. بدون از دست دادن کلیت مسئله (به ۳ حالت) فرض کنید از رنگ قرمز یک توپ در دور پنج‌تایی وسط داشته باشیم. یکی از توپ‌های این دور را به ۱ حالت قرمز کرده و شیء را طوری می‌چرخانیم که توپ قرمز بالا قرار بگیرد. چهار توپ دیگر این دور باید یک در میان با آبی و سبز رنگ شوند که ۲ حالت دارد. پس از رنگ کردن این دور، شیء به شکلی مانند شکل مقابل در می‌آید.



رنگ توپ بالایی ۲ حالت دارد. فرض کنید آبی باشد. در این صورت با حرکت در جهت ساعت‌گرد از این توپ، رنگ دو توپ بعدی به طور یکتا تعیین می‌شود و شیء به شکل مقابل در می‌آید. دو توپ باقی‌مانده تنها با توپ‌های آبی مجاور هستند. یکی این دو توپ باید قرمز و دیگری سبز باشد که ۲ حالت دارد.

پس کل کار به $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ = ۲۴$ حالت قابل انجام است. □

۲۳ یک ساعت دیجیتال داریم که زمان را به صورت یک عدد دودویی با طول ثابت ۱۱ بیت نمایش می‌دهد که ۵ بیت سمت چپ آن نشان‌دهنده‌ی ساعت (بین ۰ تا ۲۳) و ۶ بیت سمت راست آن نشان‌دهنده‌ی دقیقه (بین ۰ تا ۵۹) است. به طور مثال این ساعت دیجیتال ساعت ۱۰ و ۲۱ دقیقه را به شکل ۰۱۰۱۰۰۱۰۱۰۱ نمایش می‌دهد. در طول یک شبانه‌روز، چند بار عددی که این ساعت نشان می‌دهد، آینه‌ای می‌شود؟ به یک رشته آینه‌ای می‌گوییم اگر با وارون خود برابر باشد. به طور مثال رشته‌ی ۰۱۰۱۰ آینه‌ای است، ولی رشته‌ی ۱۰۰۱۱ آینه‌ای نیست.

۱) ۴۳   ۲) ۵۷   ۳) ۴۸   ۴) ۴۵   ۵) ۶۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

۵ بیت متناظر با ساعت ۲۴ حالت دارند، به ازای هر کدام از آن‌ها برای آینه‌ای شدن ۵ بیت سمت راست به صورت یکتا معلوم میشوند (وارون ۵ بیتِ سمت چپ)، بیتِ وسط هم ۲ حالت دارد، پس حد اکثر ۴۸ جواب ممکن برای مساله وجود دارد. حالت‌هایی که اشتباه شمرده ایم عبارتند از حالت‌هایی که ۶ بیت متناظر با دقیقه عددی بیش از ۵۹ را نشان دهند، یعنی ۶۰، ۶۱، ۶۲ و ۶۳ را ممکن است اضافه شمرده باشیم. برای چک کردن کافیست ۵ بیت سمت راست این اعداد را وارون کنیم و اگر عددِ به دست آمده از ۲۴ کمتر بود، این رشته را نباید جزو جواب حساب کنیم. با وارون کردن ۵ بیت راسته اعداد ذکر شده، به ترتیب اعداد ۷، ۲۳، ۱۵، ۳۱ به دست میایند، پس به ازای ساعت‌های ۷، ۲۳ و ۱۵ و قرار دادن ۶ بیت چپ برابر ۶۰، ۶۱ و ۶۲، یک رشته‌ی آینه‌ای ساختیم که هیچ‌وقت در ساعت نشان داده نمیشوند، پس جواب برابر $۴۵ = ۳ - ۴۸$ است. □

۲۴ یک جدول ۳×۳ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم چهار خانه‌ی $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $a_۴$ از خانه‌های این جدول را انتخاب کنیم، طوری که اگر از مرکز $a_۱$ به مرکز $a_۲$، سپس به مرکز $a_۳$ و در انتها به مرکز $a_۴$ برویم، مسیری که ایجاد می‌شود خودش را قطع نکند و همچنین مرکز هیچ سه‌تا از چهار خانه‌ی انتخاب‌شده هم‌خط نباشند. به چند طریق این کار ممکن است؟

۱) ۱۲۸۰ ۲) ۲۲۴۰ ۳) ۲۰۱۶ ۴) ۱۳۱۲ ۵) ۱۱۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

دو حالت داریم:

- مراکز چهار خانه‌ی مذکور یک چهارضلعی مقعر بسازند؛ انتخاب ۴ خانه به این شکل (بدون در نظر گرفتن ترتیب) $۴ + ۴$ حالت دارد (محاسبه‌ی آن بسیار ساده است؛ برای مثال حتما خانه‌ی وسط باید در این خانه‌ها باشد). هر ترتیبی که نیز برای این نقاط در مسیر در نظر بگیریم، یک مسیر مطلوب ساخته می‌شود. پس این حالت شامل $!۴ \times ۸$ مسیر مطلوب است.
- مراکز چهار خانه‌ی مذکور یک چهارضلعی محدب بسازند؛ انتخاب ۴ خانه به این شکل (بدون در نظر گرفتن ترتیب) $۷۰ = ۶ \times ۸ - ۸ - \binom{۹}{۴}$ حالت دارد. حال فرض کنید نقاط انتخاب کردیم. $a_۱$ به ۴ طریق می‌توان از این ۴ خانه انتخاب شود. $a_۲$ باید در چهارضلعی متناظر، مجاور آن باشد؛ پس ۲ حالت دارد و در ادامه $a_۳$ نیز دو حالت دارد. پس این حالت شامل $۱۱۲۰ = ۲ \times ۲ \times ۴ \times ۷۰$ مسیر مطلوب است.

پس پاسخ برابر ۱۳۱۲ است. □

بر روی صندلی‌های یک مترو افراد $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ در یک ردیف و $B_۱$، $B_۲$، $B_۳$ در ردیف مقابل نشسته‌اند. طبق عادت همیشگی، هر کس به دل‌خواه به یکی از افراد روبه‌روی خود زیرزیرکی نگاه می‌کند!

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۵ یک حالت را **پایدار** گوییم، اگر هیچ دو نفری نباشند که به یک‌دیگر نگاه کنند (چشم‌توچشم شوند!). چند حالت پایدار وجود دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۵۶ ۳) ۴۸ ۴) ۱۸ ۵) ۱۰۸

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

مجموعه‌ی افرادی که A_iها به آن‌ها نگاه می‌کنند را در نظر بگیرید. چند حالت داریم:

- اگر این مجموعه تک‌عضوی باشد (یعنی همه‌ی A_iها به یک نفر خاص نگاه کنند، آن نفر خاص به هیچ A_i نمی‌تواند نگاه کند. پس این حالت معتبر نیست.
- اگر این مجموعه دوعضوی باشد، دو نفر از A_iها به یک نفر خاص و دیگری به نفری دیگر نگاه می‌کند. این امر $۱۰۸ = ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۳$ حالت داردو
- اگر این مجموعه سه‌عضوی باشد، $۴۸ = ۲^۳ \times !۳$ حالت داریم.

پس پاسخ برابر ۱۵۶ است. □

۲۶ زوج مرتب (i, j) را **بی‌ربط** گوییم، اگر A_i و B_j هیچ‌کدام دیگری را نگاه نکنند. به ترتیب حداقل و حداکثر چند زوج بی‌ربط داریم؟

۱) ۰ و ۶ ۲) ۳ و ۳ ۳) ۳ و ۶ ۴) ۱ و ۳ ۵) ۰ و ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

یک A_i دل‌خواه را در نظر بگیرید که به B_j نگاه می‌کند. از دیگر افراد دسته‌ی B حداقل یک و حداکثر دو نفر به A_i نگاه نمی‌کنند. پس A_i در حداقل یک و حداکثر دو زوج بی‌ربط حضور دارد. پس حداقل ۳ و حداکثر ۶ زوج بی‌ربط داریم. از طرفی مثال برای ۳ و ۶ زوج بی‌ربط وجود دارد. برای مثال ۳ زوج بی‌ربط فرض کنید به ازای هر i، A_i, B_i به یک‌دیگر نگاه کنند. برای مثال ۶ زوج بی‌ربط فرض کنید هر A_i به B_i و هر B_i به $A_{i+۱}$ نگاه کند (و $B_۳$ به $A_۱$ نگاه کند). □

۲۷ می‌گوییم فرد X غیر مستقیم فرد Y را می‌بیند، اگر فردی مانند Z وجود داشته باشد که X، Z را نگاه کند و Z، Y را نگاه کند. حداکثر چند زوج (X, Y) داریم که X به طور غیرمستقیم Y را نگاه کند؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) ۸ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

هر فرد به طور غیر مستقیم حداکثر یک نفر را می‌بیند. پس پاسخ حداکثر برابر ۶ است. از طرفی اگر هر A_i به B_i و هر B_i به $A_{i+۱}$ نگاه کند (و $B_۳$ به $A_۱$ نگاه کند)، آن‌گاه مثال ۶ نیز ساخته می‌شود. □

دستگاه عددساز در ابتدا عدد x را که برابر با صفر است نمایش می‌دهد. این دستگاه از ما یک دنباله از اعداد ۰ و ۱ می‌گیرد و طی مراحل زیر عدد x را تغییر می‌دهد:

با شروع از اولین عدد، به ازای هر عدد در دنباله:

- اگر عدد برابر با ۰ بود، x را ۴ برابر می‌کنیم.
- اگر عدد برابر با ۱ بود، x را برابر با $x + ۳$ قرار می‌دهیم.

یک دنباله از ۰ و ۱ را «معتبر» می‌نامیم اگر در آن هیچ سه عدد متوالی برابر با ۱ نباشند.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۸ با استفاده از دستگاه عددساز و دنباله‌های معتبر به طول ۵ چند عدد مختلف می‌توان ساخت؟

۱) ۱۳ ۲) ۳۱ ۳) ۱۶ ۴) ۲۸ ۵) ۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

راه حل در سوال بعدی توضیح داده شده است. □

۲۹ با استفاده از دستگاه عددساز و دنباله‌های معتبر به طول ۱۰ چند عدد مختلف می‌توان ساخت؟

۱) ۵۰۴ ۲) ۱۷۸ ۳) ۹۲۷ ۴) ۲۷۴ ۵) ۲۸۸

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

نشان می‌دهیم اگر عدد حاصل از دو دنباله‌ی a و b با طول برابر یکسان باشد، $a = b$. آخرین ۰ دنباله را در نظر می‌گیریم. اگر بعد از آن ۱ ای نیامده باشد رقم آخر x در مبنای چهار برابر ۰ است. در غیر این صورت یا یکبار عدد ۱ بعد از آن آمده که در نتیجه رقم آخر x در مبنای چهار، ۳ است و یا دوبار عدد ۱ آمده که رقم آخر x در مبنای چهار برابر با ۲ است. در هر صورت آخرین رقم x هرچه باشد یک یا دو یا سه عضو انتهای دنباله‌ی سازنده‌ی آن یکتا تعیین می‌شود. با حذف این عناصر از انتهای a و b و محاسبه‌ی مقدار x قبل از آن‌ها دنباله‌ها کوچکتر می‌شوند و طبق فرض همچنان اعداد برابری تولید می‌کنند. با ادامه‌ی این روند پایان پذیر برابری $a = b$ ثابت می‌شود. پس مسئله به مسئله‌ی شمردن تعداد رشته‌های معتبر به طول n تبدیل می‌شود.
$F(n)$ را برابر با تعداد رشته‌های معتبر به طول n در نظر می‌گیریم. می‌توان نشان داد:

$$F(n) = F(n-۱) + F(n-۲) + F(n-۳)$$

$$F(۱) = ۲, F(۲) = ۴, F(۳) = ۷, F(۴) = ۱۳, F(۵) = ۲۴, ..., F(۱۰) = ۵۰۴$$ □

۳۰ فرض کنید بتوانیم دنباله‌های معتبر به هر طول دل‌خواهی را به دستگاه عددساز بدهیم. حداکثر چند عدد کوچک‌تر از ۲۰۴۸ می‌توانیم بسازیم؟

۱) ۲۴۳ ۲) ۲۰۴۷ ۳) ۸۱ ۴) ۲۴۹ ۵) ۲۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

با کنار گذاشتن حالت $x = ۰$، می‌توانیم از ۰ های اول دنباله صرف‌نظر کنیم (چون x را تغییر نمی‌دهند). پس دنباله با ۱ شروع می‌شود و حداکثر چهار ۰ بعد از آن داریم. زیرا در غیر این صورت عدد x دست‌کم برابر با $۳۰۷۲ = ۴^۵ \times ۳$ می‌شود. با این حساب بیشترین عدد x با دنباله‌ی $[۱, ۱, ۰, ۱, ۱, ۰, ۱, ۱, ۰, ۱, ۱, ۰, ۱, ۱]$ تولید می‌شود که برابر با ۲۰۴۶ است. تعداد ۱ های موجود بعد از هر ۰ در دنباله می‌تواند عددی بین صفر تا دو باشد و دنباله با یک یا دو عدد ۱ آغاز خواهد شد. پس اگر iتا ۰ در دنباله داشته باشیم ۲×۳^i حالت مختلف خواهیم داشت.تعداد ۰ها در دنباله پنج حالت دارد ($۰ \leqslant i \leqslant ۴$) در نتیجه پاسخ سوال برابر است با:

$$۱ + \sum_{i=۰}^{۴} ۲ \times ۳^i = ۱ + ۲ \times (۳^۰ + ۳^۱ + ۳^۲ + ۳^۳ + ۳^۴) = ۲۴۳$$ □