- این پاسخ‌ها با تلاش طراحان سوال‌ها و همکاری اعضای کمیتهٔ ملی المپیاد کامپیوتر فراهم شده‌اند و دور از انتظار نیست که کمبودها و خطاهایی در آن وجود داشته باشد. هر گونه پیشنهاد اصلاح یا تکمیل این پاسخ‌ها را از طریق سامانهٔ اینترنتی http://www.inoi.ir به اطلاع کمیتهٔ ملی المپیاد کامپیوتر برسانید.

۱) گزینه‌ی «۲» درست است.

هر بار که نوید بازی را می‌برد یک W و هر بار او می‌بازد یک L و برای هر مساوی‌ها نیز یک D در ادامه حروف نوشته شده (با شروع از تخته سیاه خالی!) روی تخته می‌نویسیم. اکنون خواسته‌ی سوال تعداد رشته‌های به طول ۷ است که دارای ۳ حرف W، حداکثر ۲ حرف L و تعدادی حرف D باشند است. همچنین یکی از Wها باید در انتهای این رشته باشد؛ زیرا یک برد نوید دقیقاً باید در پایان دست هفتم اتفاق بیفتد که بازی همان‌جا دقیقاً تموم شود. پس می‌توان با در نظر گرفتن این قضیه، تنها تعداد رشته‌هایی به طول ۶ از سه حرف W و L و D را یافت که در آن حداکثر ۲ حرف L و دقیقاً ۲ حرف W داشته باشیم؛ سپس به انتهای تک تک این رشته‌ها یک W افزود تا یک جواب یکتای مسئله بشود!

برای محاسبه تعداد این رشته‌های ۶ حرفی می‌بینیم که این دقیقاً ۲ تا W موجود می‌توانند به $۱۵ = \frac{۶!}{۴! \times ۲!} = \binom{۶}{۲}$ حالت جایگاه خودشان در رشته ۶ حرفی را تثبیت کنند. سپس ۴ جایگاه باقی‌مانده می‌توانند به $۱۶ = ۲^۴$ روش حروف L و D بگیرند، منتهی حالتی که در آن همه L باشند (یک حالت) و یا دقیقاً سه تا L داشته باشیم (و یک D، دقیقاً ۴ حالت) غیرمجاز است. پس از آن ۱۶ روش، این ۵ حالت غیرمجاز را اگر حذف کنیم تعداد راه‌های مجاز برای پر کردن این ۴ خانه باقی‌مانده برابر ۱۱ می‌شود. در انتها، طبق اصل ضرب جواب نهایی برابر با $۱۶۵ = ۱۱ \times ۱۵$ است.

۲) گزینه‌ی «۵» درست است.

عمل «جابجایی x» را انتقال عدد x و کلیه اعداد هم‌ستونش که بالای آن هستند به ستون دیگر تعریف می‌کنیم. برای نمونه در صورت سؤال عمل «جابجایی ۲» به‌عنوان مثال ذکر شده است.

اگر اعمال «جابجایی ۱»، «جابجایی ۵»، «جابجایی ۵»، «جابجایی ۴»، «جابجایی ۶»، «جابجایی ۳» و در نهایت «جابجایی ۷» را انجام بدیم، خواهیم دید که در پایان این عمل، اعداد به نحو خواسته شده در ستون دوم مرتب می‌شوند.

برای اثبات اینکه در کمتر از ۶ مرحله این مرتب‌سازی امکان‌پذیر نیست کافی است در نظر داشته باشیم که هر دو عدد متوالی که ترتیب آن‌ها درست نیست نیازمند یک جابه‌جایی مجزّا از وسطشان می‌باشند. تعداد این زوج‌ها در این مسأله ۵ می‌باشد. هم‌چنین یک جابه‌جایی برای بردن ۷ به بالای یک ستون نیاز است. پس حداقل ۶ حرکت لازم است و با ۶ حرکت نیز یک روش حل ارائه کرده‌ایم.

۳) گزینه‌ی «۱» درست است.

می‌توان نشان داد شرط لازم و کافی برای اینکه یک دنباله موفّق باشد این است که بین هر دو عدد ۱− متوالی آن حداقل دو عدد ۱ آمده باشد. (چرا؟) پس در این دنباله حداکثر ۳ عدد ۱− وجود دارد. اکنون روی تعداد اعداد ۱− در دنباله حالت‌بندی می‌کنیم.

اگر دقیقاً ۳ عدد ۱− وجود داشته باشد حتماً باید دو عنصر انتهایی و همچنین عنصر میانی رشته برابر با ۱− و سایر عناصر برابر با ۱ باشد. پس در اینجا یک حالت داریم.

اگر دو عدد ۱− وجود داشته باشد، ۱− سمت چپ می‌تواند عنصر اول، دوم، سوم یا چهارم (از سمت چپ) باشد که به ترتیب ۴، ۳، ۲ و ۱ انتخاب برای دومین ۱− باقی می‌گذارد. پس در اینجا ۱۰ حالت خواهیم داشت.

اگر یک عدد ۱− وجود داشته باشد، این ۱− در هر یک از هفت جایگاه می‌تواند قرار بگیرد.
نهایتاً اگر هیچ ۱− ای نداشته باشیم نیز یک حالت (تمام ۱) داریم.
حاصل جمع تمامی این حالت‌های حالت‌بندی شده برابر با $۱۹ = ۱ + ۷ + ۱۰ + ۱$ حالت است.

۴) گزینه‌ی «۵» درست است.

مجید باید در هر یک از ۵ سطر اوّل (بالایی) انتخاب کند که از کدام خانه‌ی آن سطر به سمت پایین می‌رود و پس از آن دقیقاً یک مسیر یکتا خواهد داشت! (چرا؟)

انتخاب خانه‌ی «پایین رونده» برای هر کدام از این ۵ سطر ۶ حالت پیش روی مجید قرار می‌دهد. پس جواب برابر است با $۷۷۷۶ = ۶^۵$.

۵) گزینه‌ی «۲» درست است.

اعداد را بر اساس باقیمانده‌شان در تقسیم بر ۳ به سه گروه تقسیم می‌کنیم. هیچ دو عددی که باقیمانده هر دویشان بر ۳ برابر ۱ باشد نمی‌توانند کنار هم در یک کامیون بیایند. (چرا؟) پس حداقل ۵ کامیون لازم است تا این اعداد، یعنی ۱ و ۴ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ هر کدام شان در یک کامیون حمل شوند.

همین قضیه در مورد اعضای گروه دوم (یعنی ۲ و ۵ و ۸ و ۱۱) نیز صادق است. آن‌ها را نیز در کامیون‌های جدا قرار می‌دهیم. در مورد اعضای گروه سوم (باقی‌مانده صفر) هم محدودیتی نداریم. پس یک روش با ۵ کامیون می‌تواند قرار دادن اعداد $\langle ۳k, ۳k + ۱, ۳k + ۲\rangle$ (در صورت وجود این اعداد در بازه‌ی اعداد داده شده) در کامیون k برای $۰ \le k \le ۴$ باشد.

۶) گزینه‌ی «۱» درست است.

در مرحله اول عملیات گفته شده را روی اعداد $(۱, ۳۱)$ و $(۲, ۳۰)$ و ... انجام می‌دهیم. بعد از این حرکت، نیمی از اعداد از بین می‌روند و اعداد زوج باقی می‌مانند. مجدداً همین کار را انجام می‌دهیم تا اعداد به شکل $۴k$ باقی بمانند. به همین ترتیب اعمال را انجام می‌دهیم تا به عدد ۱۶ برسیم. عدد ۱۶ و عدد ۳۲ که در ابتدا کنار گذاشته شده بود هم با ۲ حرکت به عدد ۰ تبدیل می‌شوند.

۷) گزینه‌ی «۱ و ۳» درست است.

صورت سوال به همین شکل کامل است و اگر به تعاریف دقیق منطق ریاضی هم رجوع کنیم مشکلی در سوال دیده نمی‌شود و تنها یک گزینه درست خواهد بود که «حداکثر ۳ گزاره‌ی صحیح» است.

تعاریف منطق مورد استفاده در این سوال چندان دور از ذهن نبوده و حتی اگر دانش‌آموزی با آنها به صورت دقیق برخورد نکرده باشد در درک آنها با مشکلی روبرو نمی‌شود. تعریف تناقض از جمله‌ی این موارد است.

صورت سوال در دو عبارت کج‌تابی دارد: یکی «گزاره» که با دقت به تعریف دقیق آن جواب درست سوال ۳ خواهد بود و دیگری «... با هم درست باشند؟» که از آن می‌تواند تلقی شود کنار گذاشتن یک گزاره و در نظر گرفتن مستقل دیگر گزاره‌ها نیز مجاز است.

با این که برداشت دوم باز هم با توجه به معنای دقیق «گزاره» جواب ۳ را نتیجه می‌دهد، اما چون هدف، سنجش میزان دقت داوطلبان به تفاوت میان «گزاره» و «جمله» نیست، جواب ۴ نیز مورد قبول قرار می‌گیرد.
در نهایت باید گفت این سوال توانایی تحلیل درخت حالت یک مساله‌ی پیچیده را مورد سنجش قرار می‌دهد.

۸) گزینه‌ی «۲» درست است.

برای یافتن یک ایده مناسب سعی می‌کنیم مسئله را از مقدارهای کم به زیاد حل کنیم. برای یک تکه الوار به‌طول یک (برای سادگی آن را «الوار یک» می‌نامیم) هیچ مرحله‌ای لازم نیست! برای الوار دو، به هر تعدادی هم که

باشند، یک برش کافی ست. برای الوار سه ما به دو برش احتیاج داریم، اول آن را به الوار یک و الوار دو تقسیم کنیم؛ بعد الوار دو را ببریم. برای الوار ۴ هم، مشابه سه به دو برش احتیاج داریم؛ یکی تقسیم بر دو الوار دو، یکی هم برش های الوارهای دو.

اکنون کمترین طول الواری که با سه برش می‌توان آن را به الوارهای یک تبدیل کرد چند است؟ الوار هشت! کافی‌ست آن را به دو الوار ۴ تبدیل کنیم. دیدیم هم که الوار ۴ هم با دو برش حل می‌شود، پس الوار هشت با سه برش کلاً تقسیم می‌شود. (چرا الوارهای بزرگتر از هشت با سه برش کامل تقسیم نمی‌شوند؟)

با همین رویه می‌بینیم توان‌های دو بهترین الوارها هستند. در واقع یک الگوریتم این است که طول الوار اولیه را به مبنای دو برده و آن را به صورت جمع توان‌های ۲ی یکتا بنویسیم؛ سپس با بریدن این توان‌های دو از الوار اولیه، عملاً تنها تعدادی الوار توان دو برای ما بماند. سپس از بزرگترین توان دو شروع به نصف کردن می‌کنیم. برای مثال می‌توان ۱۰۰ را به صورت ۴+۳۲+۶۴ نوشت. کافی‌ست ابتدا ۶۴ را با یک برش از آن جدا کنیم تا به دو قسمت ۶۴ و ۳۶ تقسیم بشود. در برش بعدی ۳۶ را به دو قسمت ۳۲ و ۴ تقسیم می‌کنیم. اکنون از این‌جا به بعد کافی‌است تنها ۶۴ را حل کنیم (در ۶ مرحله). پس این جواب با ۸ مرحله به‌دست می‌آید.

در واقع طبق این الگوریتم اگر طول الوار اولیه ما L باشد و نمایش مبنای دوی آن به‌صورت B باشد که B دقیقاً n بیت ۱ داشته و طول B نیز برابر k بیت باشد، می‌توان در $(k-1)+(n-1)$ برش آن را به الوارهای یک تقسیم کرد.

چرا این الگوریتم بهینه است و کمترین تعداد برش را به ما نشان می‌دهد؟ کافی‌ست توجه کنید که اگر عدد L که نمایش مبنای دوی آن B (با طول k بیت که n تا از این بیت ها یک هستند) را با یک برش به دو الوار X و Y تقسیم کنیم، اولاً حاصل‌جمع تعداد بیت‌های یک X و تعداد بیت‌های یک Y کمتر از n نمی‌شود، ثانیاً طول مبنای دوی یکی از این دو عدد حداقل $k-1$ است. (ادامه اثبات بر عهده خواننده)

۹) گزینه‌ی «۲» درست است.

ابتدا ثابت می‌کنیم نمی‌توان ۱۲ خانه‌ی مهره‌دار ساخت.

با انجام عملیات روی یک خانه حداکثر ۲ خانه‌ی جدید به خانه‌های مهره‌دار اضافه می‌شود. پس حداقل ۶ بار جابه‌جایی نیاز است تا ۱۲ خانه دارای مهره شوند. از سوی دیگر این کار نیازمند سوزاندن ۶ مهره می‌باشد که در نتیجه‌ی آن ۱۰ مهره باقی می‌ماند که کمتر از ۱۲ است. پس به تناقض می‌رسیم و امکان ندارد بیش از ۶ بار جابجایی انجام شود.

جواب ۱۱ را هم به‌راحتی می‌توان به چندین روش مختلف ساخت. یک روش آن انجام عمل روی خانه‌های اول و دوم و سوم از سمت چپ در سطر بالا و سپس خانه‌های دوم و سوم از ستون سوم با نسبت مناسب مهره ها هست به طوری که در پایان این ۵ بار عملیات، در هر کدام از خانه‌هایی که شانس دارا بودن مهره را دارند، دقیقاً یک مهره باقی مانده باشد.

۱۰) گزینه‌ی «۵» درست است.

می‌بینیم که در شکل نهایی تمامی اعداد فرد یک رقمی در سطر و اعداد زوج (به انضمام عدد یک در مرکز) در ستون هستند.

از سوی دیگر، هر عدد زوجی که در سطر شکل باشد و یا هر عدد فردی که در ستون باشد برای رسیدن به مقصد نهایی خودش، حتماً باید یک بار به وسط شکل بیاید و سپس به محل نهایی‌اش برود. با این وصف کافی است حالتی را در نظر بگیریم که در آن ۱ در وسط بود و تمامی اعداد زوج در سطر و تمامی اعداد فرد در ستون باشند.

در این حالت به ازای هر یک از اعداد ۲ تا ۹، الزاماً باید حداقل یک بار هر کدام این اعداد به مرکز بیایند. (چرا؟) پس تا این‌جای کار ۸ حرکت انجام داده‌ایم. پس از این ۸ حرکت نیز، می‌دانیم عدد مرکزی ۱ نیست.

پس یک حرکت نیز برای آوردن ۱ به مرکز لازم است. پس برای این مرتب سازی حداقل ۹ حرکت نیاز است و با ۹ حرکت هر ترکیبی را می‌توان درست کرد؛ کافی است اعدادی که در سطر یا ستون مناسب خودشان نیست را یکی یکی (با تناوب سطر و ستون در صورت نیاز) به مرکز بیاوریم.

۱۱) گزینه‌ی «۱» درست است.

کافیست روی تعداد پیتزای مخصوص حالت‌گیری کنیم و تعداد پیتزای پپرونی را در هر حالت بدست بیاوریم.

اگر این خانواده ۵ پیتزای مخصوص و ۳ پیتزای پپرونی بخرند، ۷۴۰۰۰ تومان خرج می‌کنند و ۴ تا از بچه‌ها با ۶ تکه پیتزای پپرونی سیر می‌شوند و بقیه پیتزای مخصوص می‌خورند.

به این نکته توجه شود که برای دسته‌ی اول استفاده از پیتزای مخصوص به‌صرفه و برای دسته آخر پپرونی به‌صرفه است و برای دسته وسط فرقی نمی‌کند.

۱۲) گزینه‌ی «۵» درست است.

با نگاه به خطوط ۳ و ۵ می‌توان دریافت که این برنامه بر روی نمایش مبنای دو (باینری) اعداد a و b کار می‌کند. بدنه‌ی اصلی این برنامه حلقه‌ی شامل خطوط ۳ تا ۷ است. در این حلقه مقادیر a و b تنها در خط ۵ تغییر می‌کند و متغیر i که در خط ۴ هر بار یک واحد افزایش می‌یابد شمارنده‌ی حلقه است. در واقع می‌توان دید که در زمان i امین اجرای این حلقه مقادیر a و b باقی‌مانده‌ی تقسیم مقادیر اولیه این دو عدد بر ۲^i یا به عبارتی انتقال یافته‌ی نمایش باینری این اعداد به‌اندازه‌ی i واحد به سمت راست هستند.

از سوی دیگر، تعداد شکلات‌های دریافتی در خروجی برنامه تنها به مقدار s وابسته است و این مقدار تنها در خط ۳ تغییر می‌کند. با کمی دقت می‌توان دریافت که این متغیر تنها در زمان‌هایی افزایش می‌یابد که بیت سمت راست (باقی‌مانده بر ۲) در اعداد a و b با هم متفاوت باشد و این مقدار افزایش نیز برابر با شماره حلقه است. به‌عبارت ساده‌تر، مقدار s در پایان برنامه برابر با حاصل‌جمع شماره بیت‌هایی است که a و b در آن بیت‌ها با هم متفاوتند. برای مثال اگر $a = ۱۳ = (۱۱۰۱)_۲$ و $b = ۳۰ = (۱۱۱۱۰)_۲$ باشد، می‌بینیم که این دو عدد در بیت‌های اول و دوم و پنجم (از سمت راست) با هم متفاوتند، پس مقدار s در پایان برنامه به‌ازای ورودی‌های ۱۳ و ۳۰ برابر با ۸ خواهد بود.

اکنون به حل مسئله می‌پردازیم. تنها حالات ممکن برای این‌که در پایان برنامه مقدار متغیر s برابر با ۳ باشد، یکی از دو حالت زیر است:

(آ) تنها در یک مرحله، ۳ واحد به s اضافه شده باشد.

در این صورت اعداد ورودی تنها در بیت سوم با هم اختلاف دارند. برای حداکثر شدن حاصل ضرب دو عدد ورودی، بقیه بیت‌ها باید برابر ۱ باشند و در این حالت بیشترین حاصل ضرب مربوط به اعداد ۳۱ و ۲۷ (با نمایش‌های $(۱۱۱۱۱)_۲$ و $(۱۱۰۱۱)_۲$) است.

(ب) در دو مرحله، اعداد ۱ و ۲ به s اضافه شده‌اند.

در این صورت، اعداد ورودی دقیقاً فقط در بیت‌های اول و دوم با هم اختلاف دارند. بر حسب آن‌که دو بیت آخر که در دو عدد ورودی متفاوتند به‌صورت ۱۱ و ۰۰ یا به‌صورت ۱۰ و ۰۱ باشند، بیشترین حاصل ضرب متعقل به زوج اعداد (۳۱ و ۲۸) یا (۳۰ و ۲۹) است.

با مقایسه حاصل‌ضرب ۳ زوج اعداد یافته‌شده در بالا، خواهیم دید که بیشترین خروجی ممکن برابر با ۲۹*۳۰ = ۸۷۰ است.

۱۳) گزینه‌ی «۵» درست است.

یک راه این است که فقط از سؤال نوع اول استفاده کنیم. در این صورت در بدترین حالت ممکن‌ست مجبور به پرداخت ۱۰ انار بشویم!

در غیر این‌صورت حداقل یک بار از سؤال نوع دوم استفاده می‌کنیم. این سؤال می‌تواند به راحتی بازه‌ی گزینه‌های ممکن برای جواب را نصف کند (در صورتی که بازه متوالی باشد، مثل شروع کار که بازه از صفر تا ۹ شامل هر دو این اعداد، است). پس بهتر است حتماً اولین سؤال ما نوع دوم باشد که بازه را از ۱۰ گزینه به ۵ گزینه تقلیل بدهد. (چرا؟)

اکنون با یک بازه ۵ گزینه‌ای طرفیم که بدون لطمه به فرض مسئله، آن را صفر تا ۴ (شامل هر دوی این اعداد) تصور می کنیم. حال اگر بخواهیم یک بار دیگر سؤال نوع دوم بپرسیم در واقع بر حسب بلی یا خیر بودن جواب با دو حالت ۲ گزینه ای و ۳ گزینه ای مواجه می شویم. و در بدترین حالت ممکن است با این سؤال و با پرداخت ۳ سیب، تنها دو گزینه را حذف کنیم!

پس بهترین حالت این است که از اینجا به بعد تنها به سؤالات نوع اول اکتفا کنیم. و در بهترین حالت با ۳ سیب در ابتدا و بعد ۵ بار تک سیب در ادامه، یعنی جمعاً ۸ سیب، حتماً به جواب می‌رسیم.

۱۴) گزینه‌ی «۵» درست است.

روی تأسیس یا عدم تأسیس خانه روی دو رأسی که درجه ۳ دارند (مشترک بین دو شش ضلعی) که آن‌ها را رأس‌های طلایی می‌نامیم حالت‌گیری می‌کنیم. واضح است که هر دوی این رأس‌ها هم‌زمان نمی‌توانند خانه داشته باشند. در حالتی‌که هیچ یک از این رأس‌ها انتخاب نشود، با حذف آن دو، به دو مسیر مجزای ۴ رأسی می‌رسیم. از آن‌جا که هر مسیر ۴ رأسی را می‌توان به سه روش مورد خانه‌سازی بیشینه (خواست مسئله) قرار داد، پس در این حالت به ۹ روش می توان خانه‌ها را ساخت. اما نکته قابل تأمل آن‌جاست که هر کدام از رأس طلایی باید حداقل یکی از همسایه‌های غیرطلایی‌اش الزاماً انتخاب شود. در غیراین‌صورت شرط «ثانیاً» در صورت مسئله روی آن رأس طلایی نقض می‌شود. با کمی دقت می‌توان دریافت که از ۹ حالت شمارده شده، دقیقاً ۲ حالت مشمول این حالت می‌شوند که می‌بایست از حالت‌های انتخاب‌شده کسر شوند. و در نتیجه در این حالت در مجموع ۷ حالت مجاز داریم.

در حالت دیگر اگر یکی از زأس‌های طلایی انتخاب شوند، با حذف آن رأس و رئوس مجاورش کلّ گراف به دو مسیر ۳ رأسی تبدیل می‌شود که هر مسیر دو حالت برای خانه‌سازی بیشینه دارد (یا دو رأس انتهایی، یا رأس وسطی). پس در این حالت برای هر رأس میانی که انتخاب شود ۴ حالت و در مجموع ۸ حالت داریم.

با این وصف، جواب نهایی برابر ۱۵ روش خواهد بود.

۱۵) گزینه‌ی «۴» درست است.

اعداد مورد نظر را به دسته‌های ۴تایی متوالی تقسیم می‌کنیم. باقیمانده‌ی حاصل‌ضرب اعداد داخل هر دسته بر ۵ برابر است با:

$$\prod_{i=۵x+۱}^{۵x+۴} i \equiv (۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴) \equiv ۲۴ \equiv ۴ \equiv -۱ \pmod{۵}$$

از طرف دیگر تعداد دسته‌های اعداد برابر است با:

$$\frac{۱۰^{۵} - ۱۰^{۴}}{۵} = ۱۸۰۰۰$$

پس باقی‌مانده‌ی حاصل‌ضرب خواسته شده بر ۵ معادل $(-۱)^{۱۸۰۰۰} \equiv ۱ \pmod{۵}$ خواهد بود.

۱۶) گزینه‌ی «۱» درست است.

در ابتدا برای هر قاب مشخص می‌کنیم که حداکثر چند قاب به‌صورت تو در تو می‌تواند درون آن قرار بگیرد. واضح‌ست که هیچ قابی نمی‌تواند درون قاب‌های ۵ و ۶ و ۷ قرار بگیرد. قاب‌های ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ می‌توانند یکی از قاب‌های قبلی را در خود جای بدهند و در نتیجه حداکثر یک قاب درونشان می‌تواند قرار بگیرد. قاب ۱۵ می‌تواند قاب ۱۱ را (که خود می‌تواند قاب ۵ یا ۶ یا ۷ را در بر بگیرد) در خود جای دهد؛ پس قاب ۱۵ می‌تواند حداکثر دو قاب درونش داشته باشد. قاب ۱۸ نیز به طور مشابه می‌تواند قاب ۱۳ یا ۱۲ (که خود می‌توانند شامل قاب ۵ یا ۶ یا ۷ شوند) را داشته باشد که حداکثر قاب‌های درونش دو عدد می‌شود. قاب ۲۱ (با در برگرفتن ۱۵) و قاب ۲۲ یا ۲۳ (با در برگرفتن ۱۸) می‌توانند سه قاب داخل خودشان جای بدهد و جمعاً ۴ قاب ممکن را بسازند. به همین نحو برای قاب‌های ۲۵ و ۲۹ می‌توان به ترتیب ۵ و ۶ قاب تو در تو داشت.

اکنون مسئله را با رویکرد مشابه برای مساحت فضای خالی پیگیری می‌کنیم. می‌دانیم اگر به‌عنوان مثال حضور قاب ۱۱ در ترکیب ۴ قاب نهایی اجباری باشد، آنگاه بهتر آن است که حتماً یکی از قاب‌های قابل قرارگیری درون آن، یعنی ۵ یا ۶ یا ۷ نیز انتخاب شوند (چرا؟) و همچنین قاب ۷ از قاب‌های ۵ و ۶ برای این منظور بهتر است، چرا که از ۴۹ سانتی‌متر مربع داخل قاب ۱۱ ، فضای بیشتری را اشغال می‌کند. هم‌چنین اگه قرار باشد قاب ۱۱ در قاب دیگری (مثلاً قاب ۱۸) قرار بگیرد، می‌توان مسئله درونی قاب ۱۱ را به‌صورت مستقل بررسی کرد.

با این رویه، اکنون برای هر قاب بیشترین تعداد قاب‌های قابل قرارگیری درونش (مشابه پاراگراف اول) و کم‌ترین مساحت خالی باقی‌مانده درون آن را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین قاب محاسبه می‌کنیم.

- قاب ۵ فضای خالی برابر با ۱ سانتی‌متر مربع خواهد داشت و با احتساب خودش ۱ قاب را در بر می گیرد. برای قاب‌های ۶ و ۷ نیز فضای خالی بهینه به‌ترتیب ۴ و ۹ سانتی‌متر مربع خواهد بود.
- قاب‌های ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ بهتر است قاب ۷ را (که درونش ۹ واحد فضای خالی دارد) در خود جای دهند؛ پس بهترین حالت برای هر یک از این‌ها تشکیل ۲ قاب تو در تو (با احتساب خودشان) و به ترتیب ۹ و ۹+۱۵=۲۴ و ۹+۳۲=۴۱ واحد است. یعنی مثلاً قاب ۱۳ می‌تواند جمعاً دو قاب داشته باشد و ۴۱ سانتی‌متر مربع فضای خالی کمترین فضای خالی باقی‌مانده برایش در آن حالت است.
- قاب ۱۵ تنها قاب ۱۱ را می‌تواند در بر بگیرد که در این حالت ۳ قاب تو در تو با ۹ واحد فضای خالی خواهند داشت.

  قاب ۱۸ می‌تواند هر یک از قاب‌های ۱۳ یا ۱۲ یا ۱۱ را در بر بگیرد که به ترتیب ۴۱+۲۷=۶۸ و ۲۴+۵۲=۷۶ و ۹+۷۵=۸۴ سانتی‌متر مربع فضای خالی ایجاد می‌کند. پس بهترین گزینه برای قاب ۱۸ ، در بر گرفتن مستقیم قاب ۱۳ و ایجاد ۶۸ سانتی‌متر فضای خالی است.
- قاب ۲۱ می‌تواند قاب ۱۵ را در بر بگیرد که در این حالت ۴ قاب تو در تو با ۶۴+۹=۷۳ واحد فضای خالی دارد. (یک جواب کاندید)
- قاب ۲۲ می‌تواند قاب ۱۸ را در بر بگیرد که دقیقاً در آن فیت می‌شود و همان ۶۸ واحد فضای خالی را در حالت «۲۳، ۱۸، ۱۳، ۷» خواهند داشت.
- قاب ۲۳ نیز می‌تواند قاب ۱۸ را در بر بگیرد که فضای خالی بین همین دو قاب قطعاً بیش از صفر واحد فضای خالی بین ۲۲ و ۱۸ است! پس این گزینه مطلوب نیست.
- برای سایر قاب‌های بزرگتر نیز، جواب بهتری از ۶۸ واحد پیدا نمی‌شود.

۱۷) گزینه‌ی «۱» درست است.

روی طول دنباله حالت گیری می کنیم.

اعداد ۷ و ۱۱ اول هستند، پس نمی‌توانند استفاده شوند. در صورت استفاده از عدد ۹ نیز، هیچ عدد دیگری نمی‌تواند قبل یا بعد از آن در میانه‌ی دنباله بیاید چرا که ۹ تنها مضرب ۳ از کاندیداهای ممکن است. پس تنها یک حالت ⟨۶, ۹, ۱۲⟩ را داریم.

اعداد ۸ و ۱۰ زوج می‌باشند و هر گونه دنباله‌ی زوج چون همه‌ی اعداد آن بر ۲ بخش‌پذیر است، معتبر است. پس بر حسب وجود یا عدم وجود هر کدام این دو، ما جمعاً می‌توانیم ۴ حالت داشته باشیم. دقت کنید که چون صحبت از دنباله آمده است، در حالتی که هر دوی ۸ و ۱۰ بخواهند ظاهر شوند، ترتیب آن دو می تواند صعودی یا نزولی باشد! ولی در بقیه‌ی حالات دقبقا یک حالت داریم. پس در این قسمت ما به طور دقیق ۵ حالت می‌توانیم داشته باشیم.

نهایتاً جواب نهایی برابر با ۶ دنباله به‌صورت زیر است:

$$\langle ۶,۹,۱۲\rangle, \langle ۶,۱۲\rangle, \langle ۶,۸,۱۲\rangle, \langle ۶,۱۰,۱۲\rangle, \langle ۶,۸,۱۰,۱۲\rangle, \langle ۶,۱۰,۸,۱۲\rangle$$

۱۸) گزینه‌ی «۴» درست است.

بر حسب فاصله‌ی اولین و آخرین مهره‌ی انتخاب شده حالت‌گیری می‌کنیم.

اگر این مهره‌ها همگی در کنار هم باشند (فاصله $k-۱$) در آن‌صورت کافی‌ست تنها مکان اولین مهره را تعیین کنیم که در نتیجه $n-k+۱$ حالت داریم.

در صورتی که فاصله این مهره‌ها k باشد (یک خانه خالی میان رشته مهره‌های انتخاب شده وجود داشته باشد)، برای مکان اولین مهره $n-k$ حالت و برای انتخاب مکان خانه خالی هم $k-۱$ حالت داریم. پس جواب این حالت برابر با $(n-k)\times(k-۱)$ حالت می‌شود. دقت کنید که خانه‌ی خالی نمی‌توان بعد از آخرین مهره قرار بگیرد، چرا که این حالت را در قسمت قبل شمارده‌ایم.

آخرین وضعیت، در مواقعی است که فاصله اولین و آخرین مهره برابر با $k+۱$ باشد. در این حالت دو خانه‌ی خالی در رشته داریم که جواب به‌صورت $(n-k-۱)\times\binom{k}{۲}$ می‌شود.

با ساده‌سازی ریاضی و فاکتور گرفتن از $(n-k)$ می‌توان دید که جمع این سه حالت می‌شود:

$$(n-k+۱)+(n-k)\times(k-۱)+(n-k-۱)\times\binom{k}{۲}$$

۱۹) گزینه‌ی «۲» درست است.

این الگوریتم دارای دو حلقه مجزا در خطوط ۲ تا ۳ و سپس در خطوط ۴ تا ۷ است. در حلقه اول، از مقدار اولیه x، یک مقدار y به دست می‌آید. در حلقه دوم نیز از مقدار y، مقدار جدید z ساخته می‌شود. اکنون این دو حلقه مجزا را از انتها به ابتدا بررسی می‌کنیم.

ابتدا می‌خواهیم ببینیم برای چه yهایی در اولین ورود به خط چهارم (خروجی حلقه اول) در پایان کار z صفر خواهد شد. برای صفر ماندن z می‌بایست در خط ۵ همواره باقی‌مانده تقسیم y بر دو یا در واقع سمت راست‌ترین بیت y صفر باشد. در خط ۶ نیز می‌بینیم که در واقع معادل باینری عدد y، دو واحد به سمت راست شیفت می یابد (دو بیت سمت راستش حذف شده و بقیه بیت‌ها ارزش‌شان دو مرتبه کمتر می‌شود). از این رو، شرط لازم و کافی برای صفر بودن z در پایان کار این است که نمایش مبنای دوی y باید حتماً به‌صورت $a۰b۰c۰d۰e۰$ باشد که a تا e می‌توانند صفر یا یک باشند.

اکنون حلقه اول را تحلیل می‌کنیم. با کمی تحلیل می‌توان دید که y در واقع XOR خود x و یک واحد شیفت یافته به راست x (همان $\lfloor\frac{x}{۲}\rfloor$) و دو واحد شیفت یافته به راست x و ... است. یعنی در واقع بیت i اُم y (از سمت چپ) برابر با XOR تمامی i بیت پرارزش x است. برای مثال اگر $x=۱۳=(۱۱۰۱)_۲$ باشد، بیت اول y برابر با ۱، بیت دوم y برابر با XOR دو بیت سمت چپ x یعنی ۱ و ۱ است. بیت سوم y برابر با XOR

سه بیت سمت چپ (ابتدا دو تاشان با هم، بعد حاصل با بیت سوم XOR شود) یعنی $۱ \oplus ۱ \oplus ۰ = ۰$ است.
پس در نهایت $y = (۱۰۰۱)_۲ = ۹$ می‌شود.

با کمی دقت می‌توان دریافت که y در واقع تابعی یک به یک و پوشا است. یعنی به ازای هر x دقیقاً یک y ساخته می‌شود و هر y نیز دقیقاً از یک x به‌دست می‌آید.

با این وصف تنها کافی‌است تعداد اعدادی که به صورت هستند را به‌عنوان y های مطلوب بشماریم. چرا که طبق گفته‌های بالا، هر کدام از این yها الزاماً حاصل انجام عملیات خطوط ۲ تا ۳ روی دقیقاً یک x هستند. از آن‌جا که برای هر کدام از بیت‌های a تا e نیز می‌توان دو حالت صفر یا یک تصور کرد، پس در مجموع $۲^۵ = ۳۲$ عدد x وجود دارد که خروجی $z = ۰$ را بر می‌گردانند.

۲۰) گزینه‌ی «۱» درست است.

از آن‌جا که ۵ ستون داریم و در هر ستون باید حداقل ۱ ستاره قرار بگیرد، حداقل ۵ ستاره مورد نیاز است. از آن‌جا هم که ۳ سطر داریم و در هر سطر حداکثر ۲ ستاره می‌تواند واقع شود، حداکثر ۶ ستاره می‌توانیم داشته باشیم. پس دقیقاً یا ۵ و یا ۶ ستاره داریم.

در حالتی که ۵ ستاره داشته باشیم، ستاره‌ها از نظر ستونی باید متمایز باشند و در سطرها هم می‌بایست الزاماً ۲ و ۲ و ۱ ستاره قرار بگیرد. برای دقیق‌تر کردن شمارش می‌توان گفت که بالای هر ستون، اندیس سطری که ستاره‌ی آن ستون در آن واقع است را می نویسیم. پس هر حالت به‌صورت یکتا متناظر خواهد بود با یک رشته به طول ۵ از اعداد ۱ و ۲ و ۳ که در آن هر عدد دقیقاً یک بار ظاهر شده است. برای شمارش تعداد این رشته‌ها، ابتدا کافی است عددی که تنها یک بار ظاهر می‌شود را ابتدا انتخاب کرده (۳ حالت) و جایش را در رشته ۵ حرفی مشخص کنیم (۵ حالت)، سپس ۴ جای باقی‌مانده در رشته را به $\binom{۴}{۲} = ۶$ حالت با دو تا از هر کدام از دو عدد دیگر پر کنیم. پس تعداد جواب‌های این حالت برابر با $۳ \times ۵ \times ۶ = ۹۰$ می‌شود.

در حالتی که ۶ ستاره داشته باشیم، در هر سطر می‌بایست الزاماً دو ستاره قرار بگیرد و یکی از ستون‌ها هم دو ستاره داشته باشد. ابتدا ستونی که دو ستاره دارد را مشخص می‌کنیم (۵ حالت) و تنها خانه‌ی این ستون که ستاره ندارد را مشخص می‌کنیم (۳ حالت). فرض می‌کنیم در این ستون خانه‌های سطر a و b (که $۱ \le a < b \le ۳$) ستاره دارند. اکنون ستاره‌ی دوم سطر a را مشخص می‌کنیم (۴ حالت) و سپس ستاره‌ی دوم سطر b (سه حالت)، برای سطر مشخص نشده نیز دقیقاً دو ستون خالی وجود خواهند داشت. پس تعداد روش‌های این حالت برابر با $۳ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۱۸۰$ خواهد بود.

جواب نهایی نیز برابر با $۹۰ + ۱۸۰ = ۲۷۰$ می‌شود.

۲ حالت زیر دو جواب مسأله است، بقیه جواب‌ها جایگشتی از این حالت‌ها میباشند.

```
**...
..**.
....*
```

```
**...
..**.
...**
```

۲۱) گزینه‌ی «۳» درست است.

برای سادگی تشریح، نمره‌ی هر دانش‌آموز را همیشه ضرب در ۴ و سپس به اضافه‌ی ۳۵ می‌کنیم. یعنی اگر نمره ابتدایی n باشد، ما نمره‌ی $۴ \times n + ۳۵$ را در نظر می‌گیریم. چون این عملیات روی تمامی نمرات تأثیر

همگون می‌گذارد (تابع یک به یک است)، عملاً تعداد حالت‌های مختلف تغییر نمی‌کند. با این کار در واقع انگار هر پاسخ درست ۵ نمره و هر پاسخ نزده ۱ نمره و هر پاسخ غلط صفر نمره دارد.

به نظر می‌رسد با این کار می‌توان تمام اعداد بین صفر تا ۱۷۵ یعنی ۱۷۶ حالت مختلف را تولید کرد. حال آن‌که امکان تولید ۱۷۴ و ۱۷۳ و ۱۷۲ و همچنین ۱۶۹ و ۱۶۸ و نیز ۱۶۴ وجود ندارد. چرا که نمی‌توان x و y ای (به مثابه تعداد پاسخ‌های درست و تعداد پاسخ‌های نزده) یافت که اولاً $x + y \leq ۳۵$ و ثانیاً $۵ \times x + y$ برابربا یکی از این ۶ عدد بالا بشود. (اعداد بالا از کجا آمده اند؟)

پس جواب برابر با ۱۷۶ منهای ۶ یا در واقع ۱۷۰ می‌شود.

۲۲) گزینه‌ی «۳» درست است.

با کمی دقت می‌توان دریافت که متغیر B در هر مرحله یک رقم سمت راست x را جدا می‌کند و آن را به سمت چپ y می‌چسباند. این‌کار تا پایان یافتن ارقام x و صفر شدن آن ادامه دارد. پس y در واقع عدد ساخته شده از برعکس کردن ارقام x است.

می‌دانیم عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد. از آن‌جا که ارقام ناصفر x و y با هم برابرند پس باقی‌مانده این دو عدد بر ۳ برابر می‌باشد. و برای بخش پذیر بودن $x + y$ می‌بایست خود x بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

پس کافی است تعداد مضارب ۳ در بازه‌ی $[۱, ۱۰۰۰۰]$ را بشماریم که به‌وضوح یک سوم این اعداد یعنی $\lfloor \frac{۱۰۰۰۰}{۳} \rfloor = ۳۳۳۳$ می‌شود.

۲۳) گزینه‌ی «۴» درست است.

برای اعداد ۱ تا ۹ همه اعداد تولید شده بر ۲ بخش‌پذیر هستند چرا که $x + y = ۲x$ است. از ۱۰ به بعد به ازای هر ۱۰ عدد متوالی دقیقاً ۵ تا به ۲ بخش‌پذیر می‌باشند و ۵ تا به ۲ بخش‌پذیر نمی‌باشند. نهایتاً خود عدد ۱۰۰۰۰ هم وقتی با معکوس خود جمع می‌گردد عددی فرد می‌شود.

پس جواب برابر است با:

$$(۹۹۹۹ - ۹)/۲ + ۹ = ۴۹۹۵ + ۹ = ۵۰۰۴$$

۲۴) گزینه‌ی «۴» درست است.

می‌دانیم عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که اگر ابتدا ارقام آن عدد را یکی در میان به دو دسته تقسیم کنیم و مجموع ارقام هر دسته را به‌دست آوریم و سپس دو عدد به‌دست آمده را از هم کم کنیم، عدد حاصل بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

از طرفی در این سؤال ما با یک سری عدد چهار رقمی سروکار داریم. و چون عدد را با معکوسش جمع می‌کنیم مجموع رقم اول و سوم برابر با مجموع رقم دوم و چهارم می‌شود که تفاضل این‌دو صفر می‌شود که این یعنی عدد بر ۱۱ بخش‌پذیر است. (در نظر داشته باشید که ممکن است جمع دو عدد در یک رقم بیشتر از ۱۰ شود و در عدد نهایی تغییر ایجاد شود اما همچنان عدد بر ۱۱ بخش‌پذیر است چون متناظر آن در جایی دیگر نیز جمع بیشتر از ۱۰ می‌شود). در واقع اگر عدد ما به‌صورت $\underline{abcd}$ باشد، خواهیم داشت $x+y = ۱۰۰۱(a+b)+۱۱۰(b+c)$ که همواره مضربی از ۱۱ است.

پش تمام اعداد بر ۱۱ بخش‌پذیر هستند و هیچ عدد اولی تولید نمی‌شود.

۲۵) گزینه‌ی «۴» درست است.

با کمی دقت می توان دریافت که شکل اصلی را می‌توان به دو بخش مجزا تقسیم کرد. یک بخش خارجی شامل کلیه مثلث‌هایی که یک ضلع یا رأس مشترک با حاشیه شکل اصلی دارند (۱۸ مثلث) و بخش دیگر داخلی شامل ۶ مثلث میانی که تشکیل یک شش ضلعی منتظم می‌دهند.

می‌دانیم مثلث میانی بالاترین سطر شکل باید به‌صورت افقی و در کنار مثلث‌های هم‌سطرش پوشیده بشود. (چرا؟) از این رو این مثلث سه حالت برای پوشیده شدن خواهد داشت. با تعیین وضعیت پوشیده شدن این مثلث، تمامی مثلث‌های بخش خارجی به صورت یک‌تا پوشیده شدنشان تعیین می‌شود.

برای پوشانیدن بخش داخلی نیز کافی است یکی از سه قطر اصلی شش ضلعی منتظم داخلی را در نظر بگیریم. این قطر دقیقاً بخش داخلی را به دو عدد کاشی تقسیم می‌کند. پس برای بخش داخلی نیز ۳ حالت داریم.

از حال ضرب این دو بخش مستقل، به $۹ = ۳ \times ۳$ روش کاشی‌کاری می‌رسیم.

۲۶) گزینه‌ی «۳» درست است.

مثلث‌های شکل یا یک گوشه تیز رو به بالا دارند یا یک گوشه تیز رو به پایین. بر حسب این گوشه آن‌ها را نوع الف یا ب می‌نامیم.

کاشی‌های داده شده همواره یا دو مثلث نوع الف را می‌پوشانند یا دو مثلث نوع ب. از سوی دیگر اگر اتاق را به دو بخش شامل فقط مثلث‌های نوع الف و فقط مثلث‌های نوع ب تقسیم کنیم می‌بینیم که این دو بخش کاملاً شبیه هم و متقارن هستند. پس کافی است جواب را برای یکی از این بخش‌ها (مثلاً فقط مثلث‌های نوع الف) به‌دست بیاوریم و حاصل را به‌توان دو برسانیم. (چرا؟)

با حالت گیری می‌توان دید که این زیرمسئله به ۲۸ حالت قابل حل است. پس جواب برای کل شکل برابر است با: $۲۸^۲ = ۷۸۴$

۲۷) گزینه‌ی «۱» درست است.

کافیست خانه‌های سطر اول پر شوند. خانه‌های سطر دوم یکتا تعیین می‌گردد.

هر نفر می‌تواند به ۴ نفر دیگر نگاه کند و تعداد نفرات ۵ است پس جواب برابر است با: $۲^{۱۰} = ۴^۵$

به‌عبارت دقیق‌تر تعداد حالات برابر است با تعداد گراف‌های جهت‌دار ۵ رأسی و ۵ یالی که هر رأس دقیقاً یک یال خروجی به رأسی غیر از خودش دارد. تعداد این گراف‌ها نیز برابر با همان ۱۰۲۴ حالت است.

۲۸) گزینه‌ی «۳» درست است.

فرض کنید جواب الف امین برابر x باشد. از آن‌جا که کسی به خودش نگاه نمی‌کند، x چهار حالت دارد. اکنون جواب الف x را y می‌نامیم. از آن‌جا که تمامی جدول باید با دو اسم پر بشود، پس جواب الف y نیز می‌بایست x باشد. در نتیجه کل سیستم به این شکل خواهد بود که x و y به هم نگاه می‌کنند و سه نفر دیگر الزاماً به یکی از این دو می‌نگرند.

پس تعداد حالت‌های مسئله برابر خواهد بود با $۱۰ = \binom{۵}{۲}$ برای انتخاب این دو نفر ضرب‌در $۸ = ۲^۳$ حالت برای دو گزینه نگاه هر کدام از سه نفر دیگر؛ که حاصل نهایی $۸۰ = ۸ \times ۱۰$ خواهد بود.

۲۹) گزینه‌ی «۵» درست است.

برای این‌که بتوان پاسخ‌های مهدی را به‌صورت یکتا تعیین کرد باید از جواب‌های دیگران پاسخ سؤال الف مهدی را یافت که به فرض شخص w است. پاسخ سؤال ب مهدی نیز برابر با پاسخ سؤال الف شخص w خواهد بود.

برای تعیین کردن w باید حتماً یک نفر مهدی را ببیند که بتوانیم جواب ب‌ی آن شخص، w مورد نظر ما باشد. یعنی در واقع در گراف ساخته شده، باید حداقل یک یال ورودی به رأس مهدی وجود داشته باشد.

برای شمارش این گراف‌های مطلوب، کافی‌است گراف‌های نامطلوب (که کسی به رأس مهدی یال ندارد) را از کل گراف‌ها کم کنیم. تعداد این گراف‌های نامطلوب برابر خواهد بود با ۴ حالت برای انتخاب رأسی که مهدی به آن یال دارد ضرب‌در ۳ گزینه برای هر کدام از ۴ رأس دیگر یعنی $۴ \times ۳^۴ = ۳۲۴$.

اکنون اگر این تعداد را از کل گراف‌ها (که $۱۰۲۴ = ۴^۵$ تا هستند) کم کنیم، جواب برابر با $۱۰۲۴ - ۳۲۴ = ۷۰۰$ می‌شود.

۳۰) گزینه‌ی «۳» درست است.

طبق استدلال سؤال قبلی، برای برقرار بودن این شرط، هرنفر توسط حداقل یک نفر دیده شود. در حالت گرافی این شرط به معنی این است که گراف باید به چند دور تقسیم شود.

برای این منظور دو حالت وجود دارد: یک دور ۵ رأسی که تعداد حالات برابر است با $۲۴ = ۴!$؛ یا یک دور ۳ رأسی و یک دور ۲ رأسی که تعداد حالات برابر است با $۲۰ = ۲ \times \binom{۵}{۳}$ (۳ رأس دور ۳ رأسی را انتخاب می‌کنیم و جهت چرخش یال‌های این مثلث هم دو حالت دارد).

جواب مسأله مجموع جواب‌های این ۲ حالت یعنی $۴۴ = ۲۴ + ۲۰$ است.

۳۱) گزینه‌ی «۴» درست است.

مرتضی هیچ‌گاه نمی‌تواند بفهمد که فرد دیده شده دروغ می‌گوید یا فرد بیننده. (اگر دروغگو کمی ماهر باشد!) در واقع از آن‌جا که پاسخ الف علی و پاسخ ب‌ی امین باید عملاً به یک شخص اشاره کنند، اگر این دو پاسخ با هم متفاوت باشند مرتضی می‌تواند بفهمد یکی‌شان دارد دروغ می‌گوید، اما نمی‌تواند بفهمند کدام‌شان راست و کدام‌شان دروغ می‌گوید.

از سوی دیگر، اگر شخصی توسط هیچ شخص دیگری دیده نشود، ممکن نیست بفهمیم راست می‌گوید یا دروغ، چون پاسخ الف‌ش در پاسخ ب‌ی هیچ کس دیگری یافت نمی‌شود و شخص آزاد است هر کسی را می‌خواهد دروغ بگوید و مرتضی هم نفهمد!

پس می‌توان دید که هرگز مرتضی نمی‌تواند در این سیستم دروغگو را بیابد و جواب درست «هیچ گزاره‌ای درست نیست» می‌باشد.

۳۲) گزینه‌ی «۱» درست است.

طول گام‌های کامبیز توان‌های ۲ هست و این توان‌ها در تقسیم بر عدد ۳، باقی‌مانده‌ی ۱ یا ۲ دارند. با کمی دقت می‌توان دید که باقیمانده‌ی تقسیم بر ۳ ی گام‌های متوالی کامبیز دقیقاً به صورت ۱ و بعد ۲ و بعد ۱ و بعد ۲ و ... است! (چرا؟)

در واقع کامبیز بعد از برداشتن اولین گام و حضور در خانه‌ی ۱، به صورت دقیقاً یکی در میان در خانه‌های $۳k$ و $۳k + ۱$ خواهد بود و هرگز امکان ورود به خانه‌های $۳k + ۲$ (خانه‌هایی که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده ۲ دارند) را ندارد.

از طرف دیگر با برداشتن گام‌هایی به طول ۱ و بعد ۲ و بعد ۱ و بعد ۲ و ... کامبیز می‌تواند به تمام خانه‌های به‌صورت به‌صورت $۳k$ و $۳k + ۱$ برسد.

پس در صورتی که در تقسیم شماره‌ی یک خانه بر عدد ۳ باقی‌مانده برابر ۲ بشود آن خانه «بد» و در غیر این‌صورت «خوب» است. این گزاره تنها در مورد گزینهٔ «۱۳۹۰ یک خانه‌ی خوب و ۲۰۱۲ یک خانه‌ی بد است.» صادق است.

۳۳) گزینه‌ی «۳» درست است.

اعداد دنباله به صورت زیر می‌باشند: $(۳ \times ۱ - ۲, ۳ \times ۱), (۳ \times ۲ - ۲, ۳ \times ۲), (۳ \times ۳ - ۲, ۳ \times ۳), \cdots$
پس کافیست ۲۰۱۲ را تقسیم بر ۲ کنیم و ببینیم ۲۰۱۲ امین عدد به‌عنوان عضو دوم ۱۰۰۶ امین زوج دوتایی ظاهر می‌شود. این عدد هم برابر است با: $۳ \times ۱۰۰۶ = ۳۰۱۸$

۳۴) گزینه‌ی «۲» درست است.

اگر L_i را برابر طول رشته S_i، N_i را برابر تعداد حروف بزرگ در S_i و n_i را برابر تعداد حروف کوچک در S_i تعریف کنیم، روابط زیر برقرار هستند.

$$\begin{aligned} L_i &= n_i + N_i \\ N_i &= ۲ \times N_{i-۱} \\ n_i &= n_{i-۱} + N_{i-۱} \end{aligned}$$

با صریح‌سازی این فرمول‌ها به ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} N_i &= ۲^i \times N_۰ = ۳ \times ۲^i \\ n_i &= ۱ + ۳ \times ۲^i \\ L_i &= ۱ + ۶ \times ۲^i \end{aligned}$$

از این رو، طول رشته هفتم برابر با $L_۷ = ۱ + ۶ \times ۲^۷ = ۷۶۹$ می‌باشد که از ۷۷۷ کمتر بوده و گزینه آخر درست است.

۳۵) گزینه‌ی «۵» درست است.

اگر تمامی حروفی که از اولین A (دومین حرف از سمت چپ) در $S_۰$ ساخته می‌شوند را قرمز کنیم (هم حروف ساخته‌شده به صورت مستقیم در $S_۱$ و هم در ادامه حروفی که از این حروف قرمز ساخته می‌شوند)، خواهیم دید که در $S_۹$ ابتدا یک a مشکی داریم که از ابتدا دست نخورده مانده است، سپس ۱۰۲۳ حرف قرمز بزرگ یا کوچک داریم (چرا؟)، پس از آن یک b مشکی (دست نخورده از ابتدا) و پس از آن حروفی می‌آیند که از B موجود در $S_۰$ ساخته شده‌اند.

با این وصف مسئله تبدیل می‌شود به اینکه ۱۰۲۷-۱-۱۰۲۳-۱=۲ اُمین حرف از سمت چپ رشته‌ای که از B پس از ۹ مرحله ساخته می‌شود را بیابیم. در روشی مشابه، این‌بار حروفی که از این B ی موجود در $S_۰$ به‌صورت مستقیم یا غیرمستقیم ساخته می‌شوند را آبی می‌کنیم. اکنون کافی‌ست دومین حرف آبی در $S_۹$ را بیابیم.

اگر دقت کنیم در اولین مرحله اجرای قاعده، رشته آبی با $Ab...$ شروع می‌شود (در $S_۱$)؛ همین قسمت در $S_۲$ رشته‌ای به صورت $Ba...$ را می‌سازد. با همین رویه می‌توانیم ببینیم رشته‌ی آبی در $S_۹$ با $Ab...$ شروع می‌شود و در نتیجه دومین حرف آبی و ۱۰۲۷ اُمین حرف کل رشته‌ی $S_۹$ برابر با b است.