مسئله‌ی ۱: لیوان‌بازی .... ۲۰ امتیاز

یک میز چرخان مربع شکل را در نظر بگیرید که در هر یک از چهار گوشه‌ی آن یک عدد لیوان قرار دارد. هر لیوان یا رو به بالا ($\cup$) است یا رو به پایین ($\cap$). «محمد» که چشمانش بسته است، می‌خواهد با توجه به قواعد زیر با حداقل تعداد «حرکت» همه‌ی لیوان‌ها را یا رو به بالا کند و یا همه را رو به پایین. این کار زیر نظر یک داور انجام می‌شود. هر حرکت شامل همه‌ی مراحل زیر است که به‌ترتیب اجرا می‌شوند:

۱) داور میز را به دل‌خواه می‌چرخاند تا هر لیوانی که بخواهد در گوشه‌ی مورد نظرش قرار گیرد.

۲) محمد دو گوشه‌ی میز را انتخاب می‌کند. اگر این دو گوشه دو سر یک ضلع مربع باشند آن‌ها را گوشه‌های مجاور و اگر دو سر یک قطر باشند آن‌ها را گوشه‌های روبه‌رو می‌گوییم.

۳) محمد دو لیوان در گوشه‌های انتخابی را لمس می‌کند و می‌فهمد که هریک رو به بالاست یا رو به پایین.

۴) محمد با برعکس کردن تعدادی (شاید هیچ‌کدام) از این دو لیوان آن دو را به‌هر صورتی که لازم ببیند در می‌آورد.

۵) داور به محمد می‌گوید که آیا همه‌ی لیوان‌ها هم‌جهت هستند یا خیر. اگر هم‌جهت باشند که محمد موفق شده است و کار تمام است، وگرنه باید حرکت بعدی را انجام دهد.

آیا محمد می‌تواند با تعداد محدودی حرکت این کار را انجام دهد؟ در صورتی که جواب شما منفی است آن‌را اثبات کنید. برای جواب مثبت، حداقل تعداد حرکت‌ها را به‌دست آورید و نشان دهید که آن تعداد حرکت کمینه است.

نکته‌ی مهم: برای بیان استدلال یا الگوریتم خود حتماً از نمادهای $\cap$، $\cup$ و یا $?$ استفاده کنید و وضعیت لیوان‌ها را به‌صورت دنباله‌ی چهارتایی از این نمادها نشان دهید. مثلاً در ابتدا وضعیت $????$ است، یعنی محمد نمی‌داند که لیوان‌ها در چه وضعی قرار دارند. اگر او در اولین حرکت دو لیوان مجاور را رو به پایین کند، وضعیت به صورت $??\cap\cap$، $?\cap\cap?$، $\cap\cap??$ یا $\cap??\cap$ در می‌آید و اگر وضعیت مثلاً $?\cap\cup?$ باشد و او دو لیوان روبه‌رو را به سمت بالا در آورد وضعیت به‌صورت $\cup\cap\cup?$ یا $?\cup\cup\cup$ درمی‌آید.

مسئله‌ی ۲: مهره‌ها .... ۲۵ امتیاز

تعدادی مهره داریم که روی هرکدام یک عدد طبیعی نوشته شده است. هربار می‌توانیم یک مهره به شماره‌ی n را برداریم و به‌جای آن دو مهره‌ی جدید، یکی به شماره‌ی $n+۱$ و یکی به شماره‌ی $۲n$ قرار دهیم. آیا همیشه، به ازای هر تعداد مهره‌ی اولیه (که ممکن است بعضی از آن‌ها شماره‌ی یکسان داشته باشند)، می‌توان با در پیش گرفتن روش مناسب به جایی رسید که هیچ دو مهره‌ای شماره‌ی برابر نداشته باشند؟

مسئله‌ی ۳: سیاره‌ی آلفا .... ۳۰ امتیاز

در سیاره‌ی آلفا که اخیراً کشف شده، $m \times n$ کشور وجود دارد. اطلاعات زیر درباره‌ی این کشورها کشف شده است:

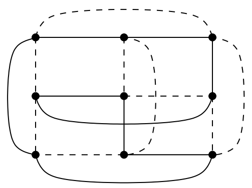
- $n \geq ۳$ و $m \geq ۳$.
- هر کشور با یک زوجِ مرتب از اعداد طبیعی به صورت (i, j) که $۱ \leq j \leq n$ و $۱ \leq i \leq m$ نام‌گذاری شده است.
- دو کشور $(i_۱, j_۱)$ و $(i_۲, j_۲)$ به هم جاده دارند، اگر و تنها اگر:
  - $i_۱ = i_۲$ و $|j_۱ - j_۲| = ۱$.
  - و یا اینکه $i_۱ = i_۲$ و $|j_۱ - j_۲| = n - ۱$.
  - و یا اینکه $j_۱ = j_۲$ و $|i_۱ - i_۲| = ۱$.
  - و یا اینکه $j_۱ = j_۲$ و $|i_۱ - i_۲| = m - ۱$.

  (در واقع هر کشوری به چهار کشورِ دیگر جاده دارد.)

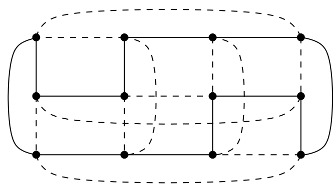
دو جهانگرد قصد دارند با شروع از یک کشورِ دلخواه، هر کدام سفری را به تمامِ کشورها انجام دهند و از هر کشوری در طول سفر دقیقاً یک بار عبور کنند و سرانجام به کشور شروعِ سفر بازگردند. امّا آن دو به دلایلی مایل نیستند از هیچ جاده‌ای که قبلا جهانگردِ دیگر از آن عبور کرده و یا درحال عبور است، عبور کنند.

ثابت کنید این دو نفر همواره می‌توانند سفرهای خود را با موفقیت برنامه‌ریزی کنند و به انجام برسانند.

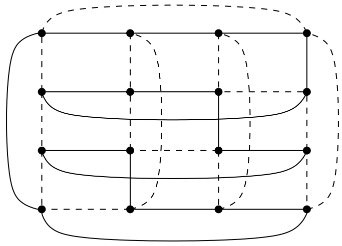
در شکل زیر، ۳ مثال برای حالت های $m = ۳, n = ۳$ و $m = ۳, n = ۴$ و $m = ۴, n = ۴$ کشیده شده است. خطوطِ نقطه چین مسیرِ سفرِ یکی و خطوطِ پررنگ مسیرِ سفرِ جهانگردِ دیگر است. در هر شکل، شهر (i, j) در سطر i و ستون j قرار دارد.



$m = ۳, n = ۳$



$m = ۳, n = ۴$



$m = ۴, n = ۴$

مسئله‌ی ۴: خاطره‌نویسی بارون .... ۲۵ امتیاز

پس از این‌که «ویولانته دو ریوالنده» (Violante de Rivalonde) برای همیشه از نزد «بارون کوزیمو لاورس دو روندو» (Baron Cosimo Laverse du Rondo) رفت، بارون از فرط ناراحتی خاطره‌نویسی‌های روزانه خود را متوقف کرد. اما پس از مدتی تصمیم گرفت دوباره آن را آغاز کند. اما این بار می‌خواست طوری بنویسد که تنها خودش بفهمد. بنابراین یک زبان رمز ابداع کرد که فقط از دو علامت X و O تشکیل شده بود و از این علائم برای نشان دادن حروف، فواصل خالی و نشانه‌های سجاوندی زبان مادری خود (که از این به بعد به آن‌ها هم حروف می‌گوییم) استفاده می‌کرد. به این ترتیب که برای هر کدام از این حروف، رمزی از علائم X و O تعیین کرد؛ مثلاً برای حرف d از رمز OX، برای s از رمز OOX، برای n از OXO، برای l از XO، برای a از XX، برای p از OO و برای e از X استفاده کرد. او برای نشان دادن یک کلمه، رمزهای تک‌تک حروف آن کلمه را به‌ترتیب پشت‌سرهم می‌نوشت.

یک روز که بارون یادداشت‌هایش را مرور می‌کرد به کلمه‌ی OOXXXOXOOX برخورد و نفهمید که این کلمه در اصل sand بوده یا pales. (شما هم امتحان کنید)

پس تصمیم گرفت رمزهای حروف را طوری تغییر دهد که هیچ دو ترتیب متفاوت از حروف (با معنی یا بی معنی) پس از رمز شدن به رشته‌ی یکسانی از علائم تبدیل نشود و در این کار موفق شد.

اگر در زبان مادری بارون k حرف وجود داشته باشد، و طول رمزهای جدید مربوط به این حروف برابر ℓ_1، ℓ_2، ... ℓ_k شده باشند، نشان دهید:

$$\frac{1}{2^{\ell_1}} + \frac{1}{2^{\ell_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{\ell_k}} \leq 1$$

مسئله‌ی ۵: تحّول و تطّور .... ۲۵ امتیاز

به دنباله‌ای متناهی از حروف a و b که پشت سرهم قرار گرفته باشند یک کلمه می‌گوییم. مثلاً bbab یا aaaaa هر کدام یک کلمه هستند. قاعده‌ای به نام «قاعده‌ی تحول» وجود دارد که طبق آن با داشتن کلمه‌ای مثل W، اگر جایی در W، ab مشاهده کردیم می‌توانیم آن را به bba تبدیل کنیم و به این ترتیب کلمه‌ی جدیدی مثل W' به وجود بیاوریم. مثلاً کلمه‌ی aabab را می‌توان با قاعده‌ی تحول به هر یک از کلمات abbaab یا aabbba تبدیل کرد (بر حسب این‌که قاعده را روی اولین یا دومین ab اجرا کنیم).

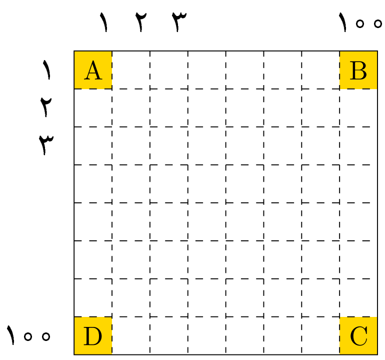
یک متخصص دستورزبان ادعا کرده‌است که «قاعده‌ی تحول توقف پذیر است.» یعنی اگر با هر کلمه‌ی دل‌خواه مثل W_1 شروع کنیم، با قاعده‌ی تحول آن را به کلمه‌ای مثل W_2 تبدیل کنیم، سپس مجدداً با قاعده‌ی تحول W_2 را به کلمه‌ای مثل W_3 تبدیل کنیم، و همین‌طور ادامه دهیم، به جایی می‌رسیم که دیگر روی کلمه‌ی به‌دست آمده نمی‌توان قاعده‌ی تحول را اجرا کرد.

الف) (۱۵ نمره) درستی یا نادرستی این ادعا را اثبات کنید.

ب) (۱۰ نمره) قانون دیگری به نام «قانون تطوّر» وجود دارد که شبیه به قاعده‌ی تحول است با این تفاوت که اگر در کلمه‌ی W، رشته‌ی ab را مشاهده کردیم، می‌توانیم آن را به bbaa تبدیل کنیم. آیا قانون تطوّر توقف‌پذیر است؟

مسئله‌ی ۶: حلزونِ آزمایشگاهی .... ۲۵ امتیاز

محققی بر روی رفتار نوعی حلزون تحقیق می‌کند. او دستگاهی شامل یک جدول ۱۰۰ × ۱۰۰ ساخته است و حلزون را روی آن قرار داده است. حلزون هر روز صبح شروع به حرکت می‌کند و هنگام شب به یکی از خانه‌های مجاور آن می‌رسد (اگر دو خانه ضلع مشترک داشته باشند می‌گوییم مجاورند) و شب را در آن‌جا استراحت می‌کند. فردا صبح دوباره حرکت را شروع می‌کند. در ضمن حلزون نمی‌تواند از جدول خارج شود. جدول در شکل زیر نشان داده شده است. نام چهار گوشه‌ی جدول را مطابق شکل خانه‌های A، B، C و D می‌گذاریم.



در هر یک از خانه‌های B، C و D یک دستگاه پرتاب کننده قرار دارد. این ۳ دستگاه هر شب فعال شده و در صورتی که حلزون در یکی از آن خانه‌ها باشد، آنرا به خانه‌ی A پرتاب می‌کند. در نتیجه در نیمه‌ی شب حلزون در خانه‌ی A قرار می‌گیرد و هنگام صبح حرکت را از آن‌جا ادامه می‌دهد.

محقق ما می‌خواهد بداند که حلزون چند بار و هر بار از چه خانه‌ای پرتاب شده است. بدین منظور بعضی روزها، هنگامی که حلزون می‌خواهد شروع به حرکت کند سر دستگاه می‌آید و یادداشت می‌کند که حلزون در کدام خانه قرار دارد.

فرض کنید که محقق صبحِ روز اول، صبح روز $k+1$ام، صبح روز $2k+1$ام، ...(یعنی هر k روز یک بار، از روز اول) به سراغ دستگاه می‌آید و هر بار، پس از دادن غذا به او، مکان حلزون را یادداشت می‌کند.

هدف محقق این است که تنها از اطلاعات یادداشت شده‌ی خود جواب سؤال را پیدا کند. یعنی همه‌ی دفعاتی که حلزون پرتاب شده و این‌که هربار از کدام خانه پرتاب شده را محاسبه کند. از طرف دیگر چون محقق سرش شلوغ است، می‌خواهد خیلی کم به حلزون سر بزند، یا به عبارت دیگر می‌خواهد مقدار k را بیشینه کند.

k را طوری محاسبه کنید که محقق بتواند به هدف خود برسد و نیز ثابت کنید جواب شما بزرگترین kی ممکن است.

در ابتدای جواب خود در برگه، مقداری را که برای k به دست آورده‌اید بنویسید.

مسئله‌ی ۷: اعداد نحس .... ۲۵ امتیاز

منظور از یک رشته عددیِ «از راست نامتناهی» دنباله‌ای بی‌پایان از رقم‌هاست که از سمت راست پشت سر هم قرار گرفته باشند. اگر دنباله‌ی رقم‌ها نه فقط از سمت راست، بلکه از سمت چپ نیز بدون توقف ادامه داشته باشد، آن رشته‌ی عددی را «از دو طرف نامتناهی» می‌گوییم.

می‌گوییم عدد N در یک رشته‌ی عددی وجود دارد، اگر در قسمتی از آن رشته عیناً ظاهر شده باشد. مثلاً عدد ۱۳۸۳ در رشته‌ی از راست نامتناهیِ زیر

۱۰۰۹۹۷۱۳۸۳۳۰۵......

و عدد ۲۰۰۴ در رشته‌ی از دوطرف نامتناهیِ زیر

......۹۳۲۲۰۰۲۰۰۴۰۱۵......

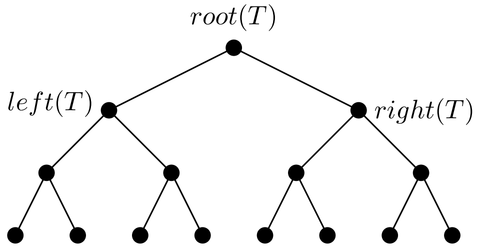
وجود دارد.

در یک تحقیق، تمام اعدادی را به‌دست آورده‌اند که از نظر ساکنین قبایل استوایی «نحس» شمرده می‌شوند. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ این اعداد باشند. نشان دهید اگر یک رشته‌ی عددیِ از راست نامتناهی موجود باشد که هیچ کدام از اعداد نحسِ فوق در آن وجود نداشته باشند، آن‌گاه یک رشته‌ی عددیِ از دو طرف نامتناهی با این خاصیت هم وجود دارد.

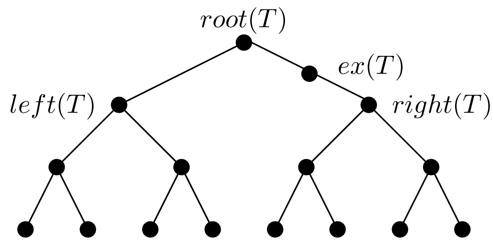
مسئله‌ی ۸: نشاندن درخت پُرگل .... ۲۵ امتیاز

در این مسئله نیاز به موجودی به‌نام «گراف» داریم؛ ولی فقط به شکل آن نه به مفاهیم نظریه‌ی گراف. گراف شکلی است شامل تعدادی «رأس» که با علامت • نشان داده می‌شوند و تعدادی یال بین برخی از رأس‌ها که با خطوط بین آن یال‌ها نشان داده می‌شوند. هر یال دقیقاً دو رأس را به‌هم وصل می‌کند که به آن رأس‌ها رئوس مجاور می‌گوییم.

درخت پُرِ T گرافی است با $2^n - 1$ رأس که یک رأس آن ریشه است که $root(T)$ خوانده می‌شود. $root(T)$ دو رأس مجاور دارد به نام‌های $left(T)$ و $right(T)$ که هر کدام ریشه‌ی درخت پُری با $2^{n-1} - 1$ رأس هستند. اگر یک رأس بین ریشه و یکی از دو فرزند درخت پُرِ T اضافه کنیم، درختی با 2^n رأس به‌دست می‌آید که آن‌را «پُرگل» و رأس اضافه را $ex(T)$ می‌نامیم. شکل زیر یک درخت پر با ۱۵ رأس و یک درخت پرگل با ۱۶ رأس را نشان می‌دهد.

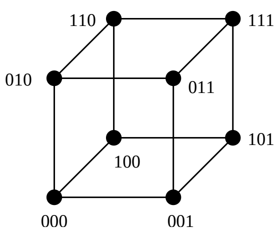


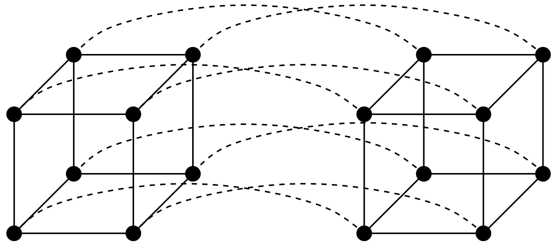
درخت پُر T

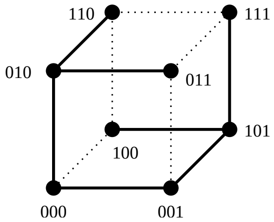


درخت پُرگل T

فوق مکعب از درجه‌ی n هم گرافی است با 2^n رأس، که اگر هر رأس آن را با یک عدد n رقمی متمایز در مبنای ۲ نشان دهیم، هر رأس $a_1a_2\ldots a_n$ (که a_i یا صفر است و یا ۱) به n رأس دیگر وصل است. دو رأس به هم متصل‌اند اگر نمایش دودویی آن‌دو دقیقاً در یک رقم اختلاف داشته باشد. می‌توان دید که اگر دو فوق مکعب از درجه‌ی n را بگیریم و بین هر دو رأس از هر دو فوق مکعب با نمایش بیتی یکسان یک یال اضافه کنیم، یک فوق مکعب از درجه‌ی $n+1$ به‌دست می‌آید. شکل زیر یک فوق مکعب از درجه‌ی ۳ و فوق مکعب درجه‌ی ۴ را نشان می‌دهد.







نشان دهید که می‌توان یک درخت پرگل T با 2^n رأس را در یک فوق مکعب 2^n رأسی Q نشاند. یعنی می‌توان هر رأس T را در یک رأس Q قرار داد به‌طوری که دو رأس مجاور در T در Q نیز مجاور هم باشند. به شکل مقابل برای $n = 3$ دقت کنید. روشن است که مسئله جواب‌های مختلف دارد و یکی کافی است.

الف) (۱۰ نمره) فقط با رسم شکل نشان دهید که چه‌گونه درخت پرگل ۱۶ رأسی را می‌توان در فوق مکعبی با ۱۶ رأس نشاند.

ب) (۱۵ نمره، ولی مشکل!) این مسئله را برای حالت کلی حل کنید.