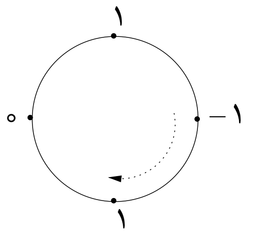
مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

مسئله‌ی ۱: دایره‌ی اعداد .... ۱۵ امتیاز

n عدد حقیقی ($n \geq ۱$) روی یک دایره نوشته شده‌اند. مجموع این اعداد ۱ است. از یک عدد دل‌خواه روی دایره شروع می‌کنیم و به‌ترتیب ساعت‌گرد، اعداد را می‌خوانیم. n عدد خوانده شده را به‌ترتیب در $۱^۳$، $۲^۳$، ... و $n^۳$ ضرب می‌کنیم. این n عدد را با هم جمع می‌کنیم. مثلاً در شکل زیر $n = ۴$ است.



اگر از عدد ۱− کار را آغاز کنیم، مجموع برابر

$$(-۱) \times ۱^۳ + ۱ \times ۲^۳ + ۰ \times ۳^۳ + ۱ \times ۴^۳ = ۷۱$$

می‌شود.

نشان دهید می‌توان از عددی بر روی دایره این کار را شروع کرد که نتیجه به‌دست آمده بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{n^۳}{۴}$ باشد.

مسئله‌ی ۲: نقشه‌ی قابل ساخت .... ۲۵ امتیاز

در کشور عجایب تعدادی شهر، که یکی از آن‌ها پایتخت است، و تعدادی جاده وجود دارد که هر جاده دو شهر را به هم وصل می‌کند. می‌دانیم از هر شهر به پایتخت مسیری (شامل چند جاده و شهر میانی) وجود دارد. به زیرمجموعه‌ای از جاده‌ها یک «نقشه» می‌گوییم اگر دو شرط زیر را داشته باشد:

الف) با این مجموعه از جاده‌ها از هر شهری مسیری به پایتخت موجود باشد.

ب) با حذف هر یک از این جاده‌ها شرط «الف» دیگر برقرار نباشد.

در یک نقشه یک شهر غیر پایتخت را «تنها» می‌گوییم اگر با استفاده از جاده‌های این نقشه فقط به یکی از شهرهای دیگر جاده‌ی مستقیم داشته باشد. در یک نقشه فاصله‌ی هر شهر تا پایتخت برابر است با تعداد جاده‌های آن نقشه که باید طی کرد تا از آن شهر به پایتخت رسید. هزینه‌ی یک نقشه برابر مجموع فواصل شهرهای تنها تا پایتخت است.

یک نقشه «قابل ساخت» است اگر در بین همه‌ی نقشه‌ها کم‌ترین هزینه را داشته باشد. (ممکن است بیش از یک نقشه‌ی قابل ساخت داشته باشیم.)

ثابت کنید نقشه‌ی قابل ساختی وجود دارد که بین هیچ‌کدام از شهرهای تنهای آن جاده‌ای (از بین جاده‌های نقشه یا سایر جاده‌ها) وجود ندارد.

مسئله‌ی ۳: دوربین‌های عکاسی .... ۳۰ امتیاز

شرکتی دوربین‌های عکاسی تولید می‌کند. هر مدلِ دوربینِ این شرکت با مجموعه‌ی قابلیت‌هایی که دارد شناخته می‌شود (یعنی دو دوربین با یک مجموعه‌ی قابلیت، از یک مدل محسوب خواهند شد و برعکس). مجموعه‌ی کل قابلیت‌هایی که یک دوربین می‌تواند داشته باشد برابر با مجموعه‌ی $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ است.

در سال اولِ تأسیس، این شرکت دوربین‌های مدلِ $X_۱, X_۲, \ldots, X_m$ را به بازار ارائه داد که به ترتیب دارای مجموعه‌ی قابلیت‌های $A_۱, A_۲, \ldots, A_m$ بودند. برای این‌که تمام مدل ها دارای جذابیت مخصوص به‌خود باشند، هیچ کدام از این مدل‌ها تمام قابلیت های یک مدل دیگر را دارا نبود (یعنی اگر $A_i \subset A_j$ آن‌گاه $i = j$).

در سال دوم این شرکت تصمیم گرفت مجموعه‌ای از مدل‌ها را از روی مدل‌های ارائه شده در سال اول طراحی کند و به بازار ارائه کند. روش به این گونه بود که هر مدلی مثل Y با مجموعه‌ی قابلیت های B که دارای دو شرط زیر بود به بازار ارائه شد.

۱) به‌ازای هر مدل سال قبل مثل X_i، باید Y حداقل یکی از قابلیت‌های X_i را دارا باشد. (یعنی $B \cap A_i \neq \emptyset$).

۲) به‌ازای هر زیرمجموعه از B مثل B' که $B \neq B'$، مدلی که با قابلیت‌های B' تعیین می‌شود دارای شرط اول نباشد.

این شرکت همان طور که مجموعه‌ی مدل‌های سال دوم را از روی مدل‌های سال اول طراحی کرد، دقیقاً با همین روش مجموعه‌ی مدل‌های سال سوم را از روی مجموعه‌ی مدل‌های سال دوم طراحی کرد. ثابت کنید که مجموعه‌ی مدل‌های سال اول و سوم عیناً مانند هم است.

مسئله‌ی ۴: جای‌گشت‌ها .... ۳۰ امتیاز

تعریف: یک جای‌گشت از اعداد ۱ تا n ترتیبی از اعداد ۱ تا n است که هر کدام از این اعداد دقیقاً یک‌بار در این ترتیب ظاهر شده است. (مثلاً $\langle ۴, ۳, ۱, ۲ \rangle$ یک جای‌گشت از اعداد ۱ تا ۴ است).

بر روی جای‌گشتِ $P = \langle p_۱, p_۲, \ldots, p_{۲k}, p_{۲k+۱} \rangle$ از اعداد ۱ تا $۲k + ۱$ تنها دو عمل زیر را می‌توانیم انجام دهیم:

چرخش سر: با حرف s نمایش داده می‌شود که جای‌گشتِ P را به جای‌گشتِ $\langle p_{۲k}, p_۱, p_۲, \ldots, p_{۲k-۱}, p_{۲k+۱} \rangle$ تبدیل می‌کند.

چرخش دُم: با حرف d نمایش داده می‌شود که جای‌گشتِ P را به جای‌گشتِ $\langle p_۱, p_{۲k+۱}, p_۲, p_۳, \ldots, p_{۲k} \rangle$ تبدیل می‌کند.

می‌خواهیم بدانیم با دو عمل بالا، چند تا از جای‌گشت‌های اعداد ۱ تا $۲k+۱$ را می‌توان مرتب کرد. برای مثال جای‌گشت $\langle ۴, ۲, ۱, ۳, ۵ \rangle$ (در این حالت $k = ۲$ است) به‌صورت زیر مرتب می‌شود:

$$\langle ۴, ۲, ۱, ۳, ۵ \rangle \xrightarrow{d} \langle ۴, ۵, ۲, ۱, ۳ \rangle \xrightarrow{s} \langle ۱, ۴, ۵, ۲, ۳ \rangle \xrightarrow{d} \langle ۱, ۳, ۴, ۵, ۲ \rangle \xrightarrow{d} \langle ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ \rangle$$

تعداد جای‌گشت‌های قابل مرتب شدن را به‌صورت یک فرمول برحسب k به‌دست آورید. این فرمول را در بالای برگه‌ی جواب به صورت واضح بنویسید و سپس گفته‌ی خود را اثبات کنید.

مسئله‌ی ۵: صفر پاک‌کن .... ۲۰ امتیاز

اعداد ۱ تا ۱۰۰,۰۰۰ را پشت سر هم و با یک فاصله‌ی خالی بین هر دو عدد بر روی کاغذ می‌نویسیم. سپس رقم‌های صفر آن‌ها را پاک می‌کنیم (یعنی آن‌ها را با فاصله‌ی خالی جای‌گزین می‌کنیم.) توجه کنید که ممکن است با این کار از یک عدد تعدادی عدد دیگر تولید شوند: مثلاً از ۷۰۰۹۰ دو عدد ۷ و ۹ تولید می‌شوند. جمع اعداد حاصل چند است؟

نحوه‌ی محاسبه‌ی خود را به دقت و طی مراحل مشخص نشان دهید.

مسئله‌ی ۶: مجموعه‌ها .... ۲۵ امتیاز

فرض کنید که مجموعه‌های r عضوی $A_1, A_2, \ldots, A_n$ و $B_1, B_2, \ldots, B_n$ به‌گونه‌ای هستند که: $A_i \cap B_j = \emptyset$ اگر و تنها اگر $i = j$.

فرض کنید که مجموعه‌ی X از اجتماع تمام این مجموعه‌ها تشکیل شده باشد (یعنی $X = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cup B_i)$). هر جای‌گشتی از اعضای X را به‌صورت $\langle x_1, \cdots, x_m\rangle$ نشان می‌دهیم (یک جای‌گشت از یک مجموعه یک ترتیب از اعضای آن است که هر عضوی از مجموعه دقیقاً یک بار در آن ظاهر شده است.)

اگر A و B هر دو زیرمجموعه‌ی X و مجزا از یکدیگر باشند (یعنی $A \cap B = \emptyset$)، تعریف می‌کنیم که جای‌گشتِ $P = \langle x_1, \ldots, x_m\rangle$ از X، زوج مرتبِ (A, B) را تقسیم می‌کند، اگر و تنها اگر به‌ازای هر $a \in A$ و هر $b \in B$، جایی که a در P ظاهر شده است قبل از جایی باشد که b ظاهر شده است (یعنی اگر $x_i = a$ و $x_j = b$ در آن صورت $i < j$).

الف) (۱۰ نمره) ثابت کنید امکان ندارد i و j وجود داشته باشند که $i \neq j$ باشد و جای‌گشتِ P از اعضای X یافت شود به‌طوری‌که جای‌گشت P زوج مرتب‌های (A_i, B_i) و (A_j, B_j) را تقسیم کند.

ب) (۱۵ نمره) ثابت کنید $n \leq \binom{2r}{r}$.

مسئله‌ی ۷: مدار منطقی .... ۲۵ امتیاز

یک متغیر منطقی مانند a متغیری است که تنها مقادیر ۰ و ۱ را می‌پذیرد. دستگاهی داریم که $n+1$ متغیر منطقی x_i $(0 \leq i \leq n)$ و $n+1$ متغیر منطقی y_i $(0 \leq i \leq n)$ به آن وارد می‌شوند و یک متغیر منطقی r از آن خارج می‌شود. به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $y_i = 1 - x_i$. در ضمن همیشه $x_0 = 0$ و $y_0 = 1$ است. اگر دست‌کم دو تا از متغیرهای x_i مقدار ۱ داشته باشند، $r = 1$ و در غیر این صورت $r = 0$ خواهد بود.

دو نوع قطعه‌ی منطقی داریم که در ساخت این دستگاه از آن استفاده شده است. هر کدام از این قطعات دو ورودی و یک خروجی دارند. خروجی قطعه‌ی از نوع A تنها وقتی ۱ است که هر دو ورودی ۱ باشد. حال آن‌که خروجی قطعه‌ی از نوع B تنها وقتی ۰ است که هر دو ورودی ۰ باشد.

در ساخت این دستگاه از K قطعه استفاده کرده‌ایم که با شماره‌های ۱ تا K نشان داده می‌شوند. هر یک از ورودی‌های یک قطعه می‌تواند از ورودی‌های دستگاه (یعنی x_iها و y_iها) یا خروجی قطعات قبلی (با شماره کوچک‌تر) باشد. در ضمن خروجی دستگاه (همان r) خروجی آخرین قطعه است.

به‌عنوان مثال، ورودی‌های قطعه شماره ۱ ممکن است $x_۱$ و $y_۲$ باشند. قطعه‌ی شماره ۲ ممکن است ورودی‌هایش $x_۱$ و خروجی قطعه‌ی شماره ۱ باشند. قطعه‌ی شماره ۳ نیز ممکن است ورودی‌هایش را از خروجی قطعات ۱ و ۲ بگیرد.

الف) (۱۵ نمره) ثابت کنید که عدد $۱ \leq i \leq n$ و دو قطعه‌ی P و Q وجود دارند به‌طوری‌که هر یک از دو قطعه‌ی P و Q حداقل یکی از ورودی‌هایشان را از مجموعه‌ی $\{x_i, y_i\}$ می‌گیرند.

ب) (۱۰ نمره) نشان دهید که $K \geq ۲n - ۴$.

مسئله‌ی ۸: جدول‌های ستون‌متعادل .... ۳۰ امتیاز

یک جدول $n \times m$ (دارای n سطر و m ستون) از اعداد صفر و یک «ستون‌متعادل» است، اگر هر دو ستون مجزا از آن را که کنار هم قرار دهیم، تعداد زوج‌های ۰۰، ۰۱، ۱۰ و ۱۱ که در سطرهای مختلف از این دو ستون قرار دارند برابر باشند. مثلاً جدول زیر ستون‌متعادل است زیرا اگر ستون ۱ و ۲ یا ۲ و ۳ و یا ۱ و ۳ از آن را در کنار هم قرار دهیم، از هر زوج ۰۰، ۰۱، ۱۰ و ۱۱ یکی تولید می‌شود.

۰	۰	۰
۱	۰	۱
۱	۱	۰
۰	۱	۱

الف) (۱۵ نمره) به ازای هر k ($k \geq ۳$) یک جدول ستون‌متعادل $۲^k \times (۲^k - ۱)$ بسازید. (دارای ۲^k سطر و $۲^k - ۱$ ستون)

ب) (۱۵ نمره) می‌دانیم هیچ جدول ستون‌متعادلِ $۲^k \times (۲^k + ۱)$ وجود ندارد. حال ثابت کنید هیچ جدول ستون‌متعادل $۲^k \times ۲^k$ نیز نمی‌توان ساخت.

موفق باشید!