مسأله‌ی اول: جدولِ پُر یک .... ۱۰ امتیاز

در هر خانه از یک جدول، که 2^k سطر و n ستون دارد، یکی از اعداد صفر یا ۱ نوشته شده است به‌طوری‌که تعداد ۱ های هر سطر بیش‌تر یا مساوی تعداد صفرهای آن است. ثابت کنید که می‌توان k (یا کم‌تر از k) ستون از n ستون جدول را انتخاب کرد و خانه‌های آن ستون‌ها را رنگ نمود، به گونه‌ای که حداقل یکی از ۱ های هر سطر در خانه‌های رنگ شده باشد.

مسأله‌ی دوم: دوایر مسلط .... ۱۵ امتیاز

n نقطه در صفحه داده شده است. می‌خواهیم به‌ازای k ی داده‌شده، k دایره با شعاع مساوی را طوری در صفحه رسم‌کنیم که تمام n نقطه را در برگیرند (یعنی هر نقطه داخل یا روی محیط لااقل یک دایره بیافتد) و شعاع دایره‌ها در حد امکان کوچک باشد.

برای این کار ابتدا مجموعه‌ی تهی S را در نظر می‌گیریم. سپس یکی از نقاط را به دل‌خواه انتخاب می‌کنیم و در مجموعه‌ی S قرار می‌دهیم. در مرحله‌ی اول نقطه‌ای را به مجموعه‌ی S اضافه می‌کنیم که بیش‌ترین فاصله را با نقطه‌ی درون S دارد؛ این فاصله را a_1 می‌نامیم. به همین ترتیب در مرحله‌ی i ام نقطه‌ای را به مجموعه‌ی S اضافه می‌کنیم که بیش‌ترین فاصله را از مجموعه‌ی S دارد (فاصله‌ی یک نقطه‌ی دل‌خواهِ A از مجموعه نقاط S را فاصله‌ی A تا نزدیک‌ترین نقطه‌ی S به A تعریف می‌کنیم). این بیش‌ترین فاصله را a_i می‌نامیم. بعد از انجام $k-1$ مرحله، حال مجموعه‌ی S شامل k نقطه است و فاصله‌های a_1، a_2، ...، و a_{k-1} تعیین شده‌اند. فرض کنید مرحله‌ی k ام را نیز انجام دهیم ولی با این تفاوت که در این مرحله نقطه‌ی به دست آمده را به S اضافه نمی‌کنیم، و فقط فاصله‌ی a_k را یادداشت می‌کنیم.

الف) ثابت کنید اگر k دایره به مراکز نقاط درون S و به شعاع a_k در صفحه رسم کنیم، این دایره‌ها تمام n نقطه را در برمی‌گیرند. (۵ نمره)

ب) ثابت کنید به ازای هر عدد r، اگر k دایره‌ی دل‌خواه به شعاع r وجود داشته باشند که تمام n نقطه را در برگیرند، آن‌گاه خواهیم داشت: $a_k \leq 2r$. (۱۰ نمره)

مسأله‌ی سوم: مستطیل‌های سیاه .... ۱۵ امتیاز

خانه‌های یک جدول $m \times n$ را با دو رنگ سفید و سیاه به طور دل‌خواه رنگ کرده‌ایم. یک زیر مجموعه‌ی مستطیل شکل به ابعاد a و b ($1 \leq a \leq m$ و نیز $1 \leq b \leq n$) از خانه‌های جدول را یک زیر مستطیل سیاه می‌نامیم اگر تمامی $a \times b$ خانه‌ی داخل آن، سیاه باشند. یک زیرمستطیل سیاه را «غیر قابل گسترش» می‌نامیم، هرگاه هیچ زیرمستطیل سیاه دیگری شامل تمامی خانه‌های آن نباشد. ثابت کنید تعداد زیرمستطیل‌های سیاهِ غیر قابل گسترش بیش‌تر از mn نیست.

مسأله‌ی چهارم: ماشینِ کوانتومیِ هاتی .... ۲۰ امتیاز

ماشین محاسباتی «هاتی» دارای n خانه‌ی حافظه‌ی $M_۱$، $M_۲$، ...، و M_n است. هر یک از این خانه‌های حافظه می‌توانند یکی از مقادیر ۰ یا ۱ را در خود ذخیره کنند. برای راحتی کار اعداد ذخیره شده در خانه‌های حافظه را با یک رشته به طول n از ۰ و ۱ نمایش می‌دهیم که در آن $M_۱$ عنصر سمت چپ است: $(M_۱, M_۲, \ldots, M_n)$.
هاتی می‌تواند دو نوع دستورالعمل ساده را اجرا کند:

- دستورِ `C i`. در این دستور `i` یک عدد صحیح بین ۱ تا n است. با اجرای این دستور، عدد ذخیره‌شده در خانه‌ی حافظه‌ی M_i عوض می‌شود (از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰ تغییر می‌کند).
- دستورِ `D i`. در این‌جا نیز `i` یک عدد صحیح بین ۱ تا n است. هاتی برای اجرای این دستور عدد ذخیره‌شده در تمامی خانه‌های حافظه به‌جز M_i را بررسی می‌کند: در صورتی که تمامی این مقادیر ۱ بودند، فقط عدد ذخیره‌شده در M_i را عوض می‌کند، و در غیر این صورت (اگر حداقل یکی از آن‌ها صفر بود) تغییری در مقادیر خانه‌ها ایجاد نمی‌کند.

مثلا فرض کنید هاتی ۳ خانه‌ی حافظه دارد که مقادیر (۱, ۰, ۰) در آن ذخیره شده‌اند. حال اگر دستور `C 2` را به ماشین بدهیم، این مقادیر تبدیل به (۱, ۱, ۰) خواهند شد. در ادامه اگر دستور `D 1` را وارد کنیم، حاصل برابر (۱, ۱, ۱) می‌شود. اما اگر دستور `D 1` را قبل از دادن دستور `C 2` به ماشین می‌دادیم، حاصل همان (۱, ۰, ۰) باقی می‌ماند.
یک «جدول صورت مسأله»، جدولی شامل ۲^n سطر و ۲ ستون است که در هر ستون آن تمامی رشته‌های به طول n از ۰ و ۱، هر رشته دقیقاً یک بار، آمده است. به رشته‌های ستون اول «رشته‌های ورودی» و به رشته‌های ستون دوم «رشته‌های خروجی» می‌گوییم. ما باید برای هاتی یک «برنامه» بنویسیم به نحوی که اگر هر یک از رشته‌های ورودی در خانه‌های حافظه‌ی هاتی باشد، پس از اجرای این برنامه، رشته‌ی خروجی هم‌سطر با آن رشته‌ی ورودی در حافظه‌ی هاتی قرار گرفته باشد.
یک برنامه شامل چند دستورالعمل است که پشت سرهم نوشته شده‌اند. هنگامی که یک برنامه را به هاتی بدهیم، دستورالعمل‌های این برنامه به ترتیب اجرا می‌شوند. مثلاً فرض کنید هاتی ۲ خانه‌ی حافظه دارد ($n = ۲$) و جدول صورت مسأله‌ی زیر داده شده است:

رشته‌ی ورودی	رشته‌ی خروجی
(۰, ۰)	(۱, ۰)
(۱, ۰)	(۰, ۱)
(۰, ۱)	(۱, ۱)
(۱, ۱)	(۰, ۰)

یک برنامه‌ی نمونه که این کار را انجام می‌دهد به‌صورت زیر است:

```
D 1
C 2
```

الف) یک جدول صورت مسأله را «ساده» می‌نامیم اگر در آن هر رشته‌ی ورودی مساوی رشته‌ی خروجیِ هم‌سطرش باشد، به جز دو رشته‌ی A و B که این دو رشته فقط در یکی از n عنصر خود با هم تفاوت داشته باشند. توجه کنید که در این جدول، A رشته‌ی خروجی هم سطر با رشته‌ی ورودی B و هم‌چنین B، رشته‌ی خروجی هم سطر با رشته‌ی ورودی A است. ثابت کنید که می‌توان برای هر جدول صورت مسأله‌ی ساده، یک برنامه نوشت. (۵ نمره)

ب) ثابت کنید که می‌توان برای هر جدول صورت مسأله، یک برنامه نوشت. (۱۰ نمره)

«موفق باشید»