مسئله‌ی اول: تقسیم پول .... ۱۰ امتیاز

مقداری پول را بین n نفر تقسیم کرده‌ایم. عدد طبیعی k را در نظر بگیرید؛ می‌خواهیم کاری کنیم که اختلاف مقدار پولی که این افراد دارند از k تومان بیشتر نباشد. برای این کار عمل زیر را انجام می‌دهیم:

- دو نفر مانند a و b پیدا می‌کنیم که a حداقل $k + ۱$ تومان بیشتر از b پول داشته باشد. سپس a را مجبور می‌کنیم که k تومان به b بدهد.

این کار را تا وقتی که چنین دو نفری وجود داشته باشند، تکرار می‌کنیم. ثابت کنید به هر ترتیبی که این کار را انجام دهیم، بالاخره به حالتی خواهیم رسید که هیچ دو نفری وجود نداشته باشند که اختلاف مقدار پول‌شان از k تومان بیشتر باشد.

مسئله‌ی دوم: بازی .... ۱۰ امتیاز

دو نفر این بازی را با تعدادی سنگ‌ریزه انجام می‌دهند: در ابتدا، n سنگ‌ریزه موجود است ($n > ۱$). با توجه به قاعده‌ی زیر، دو نفر به ترتیب، یک در میان، از این سنگ‌ریزه‌ها برمی‌دارند. قاعده‌ی بازی به این صورت است که در اولین حرکت، بازی‌کن می‌تواند به هر تعدادی که بخواهد از این سنگ‌ریزه‌ها بردارد؛ ولی باید حداقل یک، و حداکثر $n - ۱$ سنگ‌ریزه بردارد. پس از آن هر بازی‌کن در نوبت خودش، می‌تواند حداقل یک، و حداکثر به اندازه‌ی تعدادی که بازی‌کن دیگر در حرکت قبل برداشته، سنگ‌ریزه بردارد. برای مثال، اگر بازی‌کن اول، در اولین حرکت‌اش ۲ سنگ‌ریزه بردارد، در حرکت بعد، بازی‌کن دوم می‌تواند ۱ یا ۲ سنگ‌ریزه بردارد.

برنده‌ی بازی کسی خواهد بود که آخرین سنگ‌ریزه را بردارد.

الف) ثابت کنید اگر $n = ۶$ باشد، نفر اول (کسی که بازی را شروع کرده است) می‌تواند طوری بازی کند که همواره برنده شود؛ یعنی نفر اول می‌تواند به‌گونه‌ای بازی کند که اگر نفر دوم در هر مرحله بهترین حرکتی که می‌تواند را انجام دهد، نفر اول برنده شود.

ب) ثابت کنید که در حالت کلی اگر n توانی از دو باشد، نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که همواره برنده شود، و در غیر این صورت نفر اول می‌تواند برنده شود.

مسئله‌ی سوم: مسیر فراگیر .... ۱۵ امتیاز

یک شبکه‌ی $m \times n$ شامل mn نقطه است که مطابق شکل زیر در m ردیف و n ستون قرار گرفته‌اند.

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}$$

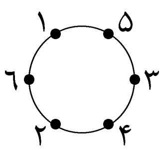
یک مسیر فراگیر در این شبکه، مسیری است که از نقطه‌ی گوشه‌ی بالا و سمت چپ آغاز شده، از هر نقطه‌ی شبکه دقیقاً یک بار عبور کند، و به نقطه‌ی گوشه‌ی پایین و سمت راست شبکه برسد. در طی این مسیر تنها مجازیم که از هر نقطه به یکی از نقاط سمت راست، چپ، بالا، یا پایین آن (در صورت وجود) برویم.

ثابت کنید که مسیر فراگیر تنها در صورتی وجود دارد که دست‌کم یکی از m و n فرد باشد.

مسئله‌ی چهارم: اعداد روی دایره .... ۱۵ امتیاز

۲n نقطه محیط یک دایره را به ۲n قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. A' را نقطه‌ی مقابل نقطه‌ی A می‌نامیم، اگر AA' یک قطر دایره باشد. می‌خواهیم هر یک از عددهای ۱ تا ۲n را روی یکی از این نقاط بنویسیم (هر نقطه یک عدد) به طوری که برای هر دو نقطه‌ی متوالی روی دایره مانند A و B، اگر نقطه‌های مقابل این دو نقطه به ترتیب A' و B' باشد، مجموع عددهای نوشته‌شده روی A و B، با مجموع عددهای نوشته شده روی A' و B' برابر باشد.

برای مثال شکل زیر یک جواب مسئله برای حالت $n =$ ۳ است.



الف) ثابت کنید که اگر n یک عدد فرد باشد، این کار همواره ممکن است.

ب) ثابت کنید که اگر n یک عدد زوج باشد، این کار ممکن نیست.