بازی رنگی

الف) پس از رنگ‌آمیزی دایره‌ی شماره ۱ توسط ببعی، طبق اصل لانه کبوتری رنگی وجود دارد که دست کم n قطاع، به آن رنگ در آمده باشد. اگر این رنگ، نارنجی، زرد یا بنفش باشد، به ترتیب کافی است گاوی تمام قطاع‌های دایره‌ی شماره ۲ را به رنگ نارنجی، بنفش یا زرد در بیاورد. با این کار در دایره‌ی شماره ۳ دست کم n قطاع نارنجی تولید خواهد شد.

ب) در ابتدا ببعی برای هر رنگ، n قطاع از دایره‌ی شماره ۱ انتخاب می‌کند و آن‌ها را به آن رنگ در می‌آورد. فرض کنید گاوی در رنگ‌آمیزی خود، x قطاع به رنگ زرد، y قطاع به رنگ بنفش و $n-x-y$ قطاع را به رنگ نارنجی در آورده باشد. $۳n$ انتخاب ممکن برای چرخش دایره‌ی شماره ۲ برای ببعی وجود دارد. تعداد قطاع‌های نارنجی‌ای که در مجموع این $۳n$ حالت در دایره‌ی شماره ۳ پدید خواهند آمد برابر است با:

$$(x \times n) + (y \times n) + ((n-x-y) \times n) = ۳ \times n^{۲}$$

پس طبق اصل لانه‌ی کبوتری، انتخابی برای ببعی وجود دارد که در آن حالت دست کم

$$\lceil \frac{۳n^{۲}}{۳n} \rceil = n$$

قطاع از دایره‌ی شماره ۳ به رنگ نارنجی در بیاید.

وزنه‌ها و ماشین جادویی

به وضوح هنگام استفاده از ماشین اگر مجموع وزن دو سکه طبیعی بود، یعنی دو سکه هم‌نوع هستند و در غیر این صورت یعنی هم‌نوع نیستند. پس می‌توان عمل استفاده از ماشین را یک عمل مقایسه نامید که در پایان آن می‌توان فهمید دو سکه‌ی گذاشته شده، هم‌نوع هستند یا خیر.

الف) با استقرا روی n ثابت می‌کنیم گاوی با حداکثر $۲n - ۱$ بار استفاده از ماشین جادویی می‌تواند یک سکه‌ی نیم-گرمی از بین $۳n$ سکه، پیدا کند.
برای پایه، $n = ۳$ را در نظر می‌گیریم. با کمی حالت‌بندی می‌توان نشان داد با حداکثر ۵ حرکت می‌توان سکه‌ای نیم-گرمی را مشخص کرد.
حال فرض می‌کنیم حکم برای $n = k$ برقرار باشد؛ ثابت می‌کنیم حکم برای $n = k + ۱$ نیز برقرار است. برای اثبات حکم، $۳k + ۳$ سکه را در نظر می‌گیریم. ۲ سکه را با هم مقایسه می‌کنیم. دو حالت می‌توان متصور بود:

- اگر متفاوت بودند، کافی است یکی از آن‌ها (x) را برداشته و با ۳ سکه‌ی دیگر مقایسه کنیم. اگر در این ۳ مقایسه، دست کم ۲ تا از آن‌ها به تساوی کشید، یعنی x سکه‌ای ۱-گرمی است

و سکه‌ی مقابل آن در مقایسه‌ی نخست، نیم-گرمی است؛ در غیر این صورت x سکه‌ای نیم-گرمی است.

- اگر برابر بودند، یکی از آن‌ها را برداشته و با سکه‌ای دیگر مقایسه می‌کنیم. اگر باز هم برابر بودند، یعنی این ۳ سکه، ۱-گرمی هستند و برای بقیه‌ی سکه‌ها، طبق فرض استقرا می‌توان کار را انجام داد؛ اما اگر این ۲ برابر نبودند، کافی است باز هم ۳ سکه‌ی دل‌خواه دیگر انتخاب کنیم و مانند حالت قبل، کار را انجام دهیم.

ب) ابتدا ثابت می‌کنیم هر گراف ساده‌ی n رأسی با k مولفه، دست کم $n-k$ یال دارد. ابتدا یال‌ها را در نظر نمی‌گیریم و یکی پس از دیگری، یال‌ها را می‌گذاریم. هر یالی که می‌گذاریم، حداکثر یکی از تعداد مولفه‌ها کم می‌کند. پس گراف n رأسی با k مولفه، دست کم $n-k$ یال دارد.
فرض کنید گاوی با تعدادی مقایسه، سکه‌ای نیم-گرمی را پیدا کرده باشد. گرافی ساده با $3n$ رأس می‌سازیم که هر رأس آن یک سکه باشد و بین دو رأس، یال می‌کشیم اگر و تنها اگر گاوی بین سکه‌های متناظر آن‌ها، مقایسه انجام داده باشد.
ابتدا ثابت می‌کنیم این گراف حداکثر ۲ مولفه‌ی ۱ رأسی دارد. فرض کنیم دست کم ۳ مولفه‌ی ۱ رأسی داشته باشد. در این صورت اگر سکه‌های نیم-گرمی در بین این ۳ رأس باشند، نمی‌توان با اطمینان یک سکه‌ی نیم-گرمی را تشخیص داد.
حال ثابت می‌کنیم این گراف حداکثر ۱ مولفه‌ی ۲ رأسی دارد. مانند قسمت قبل فرض کنید دست کم ۲ مولفه‌ی ۲ رأسی داشته باشیم. اگر سکه‌های نیم-گرمی در بین این ۴ رأس باشند، نمی‌توان با اطمینان یک سکه‌ی نیم-گرمی را تشخیص داد.
حال ثابت می‌کنیم امکان ندارد هم مولفه‌ی ۲ رأسی داشته باشیم و هم ۲ مولفه‌ی تک رأسی وجود داشته باشد. فرض کنید هم مولفه‌ی ۲ رأسی داشته باشیم و هم ۲ مولفه‌ی تک رأسی وجود داشته باشد. در این صورت اگر سکه‌های نیم-گرمی در بین این ۴ سکه باشند، باز هم با اطمینان نمی‌توان سکه‌ای نیم-گرمی را پیدا کرد.
حال اگر در گراف مورد نظر، ۲ مولفه‌ی تک رأسی داشته باشیم، گراف ما حداکثر

$$\lfloor\frac{3n-2}{3}\rfloor + 2 = n + 1$$

مولفه دارد؛ در غیر این صورت نیز گراف ما حداکثر

$$\lfloor\frac{3n-3}{3}\rfloor + 1 + 1 = n + 1$$

مولفه خواهد داشت. پس گراف ما دست کم $3n - (n+1) = 2n - 1$ یال لازم دارد که حکم مسئله را ثابت می‌کند.

گاوی خسیس

کشور مورد نظر را به گراف مدل کنید. به جای هر شهر یک راس و به جای هر جاده یک یال در نظر بگیرید. ارزش یک شهر برابر با درجه راس متناظر آن است. هزینه یک مسیر نیز برابر است با مجموع درجات راس های داخل مسیر.

الف) یک گراف کامل را در نظر بگیرید. یال بین دو راس a و b را از این گراف جدا کنید. حال ببعی را در راس a و گاوی را در راس b قرار دهید. اکنون هزینه سفر برابر است با:

$$n - ۲ + n - ۲ + n - ۱ = ۳n - ۵$$

.

ب) فرض کنید ببعی در راس a و گاوی در راس b است. کوتاه‌ترین مسیر را از a به b در نظر بگیرید.به جز یال‌های خود مسیر بین هیچ دو راسی داخل مسیر یال نخواهیم داشت چون اگر یال باشد مسیر کوتاه تر می‌شود. هر راس خارج از مسیر نیز حداکثر سه یال به راس های داخل مسیر دارد، چون در غیر این صورت دوباره مسیر کوتاه‌تری می‌توانستیم پیدا کنیم. حال مجموع درجات راس‌های داخل مسیر را می‌شماریم. به ازای هر یال داخل مسیر به مجموع درجات دو واحد اضافه می‌شود. به ازای هر یال از یک راس خارج از مسیر به یک راس داخل مسیر هم یک واحد به مجموع درجات اضافه می‌شود. اگر تعداد راس‌های درون مسیر k باشد، هزینه کل ما حداکثر برابر با:

$$۲ * (k - ۱) + ۳ * (n - k) = ۳n - k - ۲$$

اگر $k > ۲$ باشد که سوال حل است. در غیر این صورت, مسیر ما فقط متشکل از دو راس بوده است که هر کدام حداکثر می‌توانستند درجه‌ای حداکثر برابر با $n - ۱$ داشته باشند. پس در آن صورت هزینه کل ما برابر با $۲n - ۲$ می‌شد که با توجه به اینکه $n > ۲$ است، $۳n - ۵ \geq ۲n - ۲$ است.

انتقال مهره‌های گاوی

جواب ماشین گاوی را در نظر بگیرید. چون در ماشین او در یک لحظه می‌تواند در یک خانه بیش از یک مهره باشد، پس می‌توان فرض کرد که اگر مهره‌ای با مختصات $(x_۱, y_۱)$ را بخواهیم به نقطه ای با مختصات $(x_۲, y_۲)$ انتقال دهیم، می‌توانیم ابتدا این مهره را به نقطه‌ی $(x_۱, y_۲)$ برده و سپس آن را به خانه‌ی $(x_۲, y_۲)$ ببریم. به حرکات موجود در انتقال اول، حرکت عمودی و به حرکات موجود در انتقال دوم حرکت افقی می‌گوییم. به عبارتی ابتدا مهره را با تعدادی حرکت عمودی به سطر مورد نظر انتقال می‌دهیم و سپس با تعدادی حرکت افقی به ستون مورد نظر می‌بریم. همچنین به هر مهره زوج مرتب (c, d) را نسبت دهید که در آن c به معنای تعداد حرکت‌های عمودی لازم برای این نقطه و d برابر با تعداد حرکت های افقی لازم به ازای این نقطه است.

لم ۱

به ازای یک بعد سوال درست است. فرض کنید دو مهره در مسیر حرکت خود با هم برخورد داشته باشند

(مثلا مهره‌های a و b که a می‌خواهد به خانه‌ی A برود و b به خانه‌ی B). مقصد این دو مهره را با هم عوض کنید (a به B برود و b به A برود). با این کار حداقل یک واحد از تعداد برخوردها کاسته می‌شود. در ضمن می‌دانیم با این کار جواب ما از حالت قبلی‌اش بیش‌تر نمی‌شود. این کار را آن‌قدر تکرار کنید که دیگر برخوردی نداشته باشیم. پس جواب ماشین ببعی و گاوی به ازای یک بعد برابر است.

حل نصف نمره

به ازای مهره iام ($۱ \le i \le n$) e_i را برابر $\max(c_i, d_i)$ تعریف کنید. حال فرض کنید $F = \max_{i=۱}^{n}(e_i)$. واضح است که $t_۱ \ge F$ است. حال جواب ماشین گاوی را در نظر بگیرید. طبق لم ۱، ماشین گاوی می‌تواند به ما جوابی بدهد که هیچ برخوردی بین دو مهره که در حال انجام حرکات عمودی خود هستند رخ ندهد. حال هر مهره‌ای، حرکت عمودی خود را انجام دهد و صبر کند تا تمامی مهره‌ها حرکت‌های عمودی خود را انجام دهند. سپس هر مهره‌ای حرکت افقی خود را انجام دهد. اکنون هرکس به خانه‌ی مورد نظر خود رسیده است. حال خواهیم داشت

$$t_۲ \le max(c_i) + max(d_i) \le F + F \le ۲t_۱$$

حل کامل

از بین جواب‌های موجود برای ماشین گاوی جوابی را در نظر بگیرید که $\sum_{i=۱}^{n} c_i^۲$ در آن کمینه شود. می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر همچین جوابی را در نظر بگیریم، در هیچ لحظه‌ای دو مهره در یک خانه نخواهند بود. فرض کنید دو مهره در یک ستون باشند و هنگامی که حرکت عمودی انجام می‌دهند به یک نقطه برسند. فرض کنید مهره‌ی a بخواهد به نقطه‌ی A انتقال یابد و مهره‌ی b نیز به خانه‌ی B انتقال یابد. حال مهره‌ی a را به نقطه‌ی B انتقال دهید و مهره‌ی b را به خانه‌ی A. c_a و c_b هر دو کم‌تر شده است چون هیچ دو نقطه‌ی آبی‌ای در یک سطر نیستند. پس مجموع مورد نظر ما کم‌تر شده است. حال فرض کنید دو مهره از دو ستون مختلف به هم برخورد کنند. در این صورت یکی از آن‌ها در حال انجام حرکت عمودی خود بوده است و دیگری در حال انجام حرکت افقی خود، زیرا اولا هیچ دو نقطه آبی‌ای در سطر یکسانی نیستند، ثانیا این دو مهره در یک ستون نبودند و قرار بود هر مهره‌ای که می‌خواهد به مقصد خود برود، اول حرکات عمودی‌اش را انجام دهد، سپس حرکات افقی‌اش را. اکنون مقصد این دو مهره را با هم عوض کنید. از آن جایی که این دو مهره در یک زمان در یک نقطه بوده‌اند و همچنین یکی از آن‌ها در حال حرکت افقی بوده و دیگری در حال حرکت عمودی، پس جواب ما بیشتر نشده است. همچنین اثبات می‌کنیم که مجموع مورد نظر ما کمتر شده است. اگر جهت حرکت‌های این دو مهره با هم متفاوت باشد که از c هر دوی آن‌ها کاسته شده است پس مجموع نیز کم‌تر شده است (دقت کنید نقطه‌های نهایی در یک سطر نیستند). حال اگر جهت حرکت این دو مهره یکسان باشد، بدون این که از کلیت سوال کاسته شود فرض کنید که جهت حرکت هر دوی آن‌ها به بالا بوده باشد. حال این مهره‌ها را با ۱ و ۲ نشان دهید. همچنین فرض کنید:

$$c_۱ < c_۲ \Rightarrow y_۱ > y_۲$$

$$p = c_۲ + y_۲ - (c_۱ + y_۱)$$

حال قرار است مهره ۱، $c_۱ + p$ حرکت عمودی انجام دهد و مهره ۲، $c_۲ - p$ حرکت عمودی انجام دهد. مجموع ما به اندازه‌ی $۲p(c_۱ + p - c_۲)$ اضافه می‌شود. داریم:

$$۲p > ۰$$
$$c_۱ + p - c_۲ = y_۲ - y_۱ < ۰$$

پس $۰ > ۲p(c_۱ + p - c_۲)$ است و مجموع ما کمتر شده است. پس اگر مجموع ما کمینه شود، ماشین به ما جوابی را می‌دهد که در هیچ لحظه‌ای دو مهره در یک نقطه نباشند که این همان خواسته‌ی ماشین ببعی است.