- سؤال‌های **۱۲ تا ۲۵** در دسته‌های چندسؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ رستم ۱۳۹۴ سکه با شماره‌های ۱ تا ۱۳۹۴ بر روی میز قرار داده است. تعدادی از این سکه‌ها عادی (یک رو شیر و یک رو خط) و بقیه‌ی سکه‌ها هر دو رو شیر هستند (این تعداد می‌تواند صفر هم باشد). سهراب می‌خواهد تعداد سکه‌های هر دو رو شیر را پیدا کند ولی چشمانش بسته است. او تنها می‌تواند در هر حرکت تعدادی از سکه‌ها را انتخاب کرده و از رستم بخواهد آنها را پشت و رو کند. پس از آن رستم تعداد سکه‌های روی میز که به سمت شیر هستند را به سهراب می‌گوید.
سهراب می‌داند در ابتدای کار دقیقا ۱۰۰ سکه به سمت شیر هستند، حداقل چند حرکت لازم است تا سهراب تعداد سکه‌های دو رو شیر را بیابد؟

۱) ۱۳۹۳   ۲) ۱   ۳) ۱۳۹۴   ۴) ۱۱   ۵) ۱۰

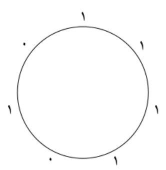
۲ می‌خواهیم در خانه‌های جدول زیر، اعداد ۱ تا ۹ را قرار دهیم، به صورتی که مجموع اعداد هر سطر، هر ستون و هر قطر، برابر باشد. جای دو تا از اعداد (۱ و ۵) نیز مشخص شده است.

	۵	۱

برای یک خط مانند L در صفحه، $f(L)$ برابر مجموع اعداد خانه‌هایی از جدول است که با آن خط، تقاطع دارند (یک خانه از جدول با خط L تقاطع دارد، اگر حداقل ۲ نقطه‌ی مشترک با آن خط داشته باشد). بیشینه‌ی ممکن $f(L)$، در میان تمام جدول‌ها و خط‌های ممکن چند است؟ (هر خانه از جدول یک مربع به طول واحد است)

۱) ۲۵   ۲) ۳۲   ۳) ۳۱   ۴) ۲۷   ۵) ۳۰

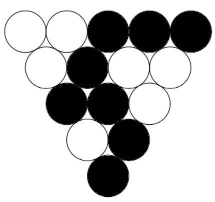
۳ می‌خواهیم ۷ رقم ۰ و ۱ را دور دایره بچینیم. می‌گوییم رشته‌ی S در این چینش آمده است، اگر چند رقم متوالی در دایره وجود داشته باشند که با کنار هم قرار دادن‌شان به ترتیب ساعت‌گرد، رشته‌ی S تشکیل شود. تعداد دفعات وجود S در چینش را $f(S)$ می‌نامیم. برای مثال، در چینش روبرو، $f(۱۱۰) = ۱$ ، $f(۱۱) = ۳$ و $f(۰۱۱۱۰) = ۰$ است.



یک چینش اعداد دور دایره را در نظر بگیرید. به ازای هر رشته‌ی دودویی S که حداکثر ۳ رقم دارد، ۲$^{f(S)}$ را محاسبه می‌کنیم و این مقادیر را با هم جمع می‌کنیم (به عنوان مثال در شکل مقابل این عدد برابر ۷۰ می‌شود). عدد نهایی حداقل چند است؟ (برای رشته‌هایی که در چینش وجود ندارند $f(S) = ۰$ است.)

۱) ۵۵   ۲) ۵۱   ۳) ۵۶   ۴) ۶۳   ۵) ۵۳

۴ ۱۵ دایره همانند شکل روبرو داریم. هر دایره می‌تواند سفید یا سیاه باشد. رنگ دایره‌ها به صورت زیر مشخص می‌گردد:



- دایره‌های سطر بالا به صورت مستقل می‌توانند سفید یا سیاه باشند.
- بقیه‌ی دایره‌ها (همه به جز سطر بالا) به رنگ سیاه هستند، اگر و تنها اگر دو دایره‌ی مجاور سطر بالای آن ناهمرنگ باشند.

در بین تمامی حالات ممکن، حداکثر چند دایره‌ی سیاه می‌توانیم داشته باشیم؟

۱) ۱۰   ۲) ۱۱   ۳) ۹   ۴) ۱۲   ۵) ۱۳

۵ در مسئله‌ی قبل، فرض کنید تمامی حالات ممکن را روی تخته کشیده‌ایم. در مجموع چند دایره‌ی سیاه خواهیم داشت؟

۱) ۲۴۰   ۲) ۲۱۶   ۳) ۲۵۶   ۴) ۲۰۸   ۵) ۲۲۴

۶ یک جایگشت

$$\pi = \langle \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_9 \rangle$$

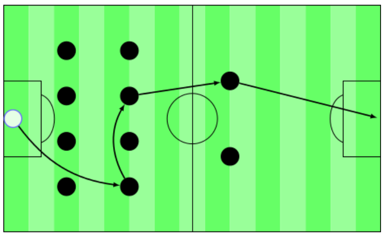
از اعداد $1, 2, \ldots, 9$ را در نظر بگیرید. عدد جایگشت π برابر تعداد اعضایی از جایگشت مانند π_i است که زوجیت i و π_i برابر باشد. برای مثال عدد جایگشت $\langle 5, 6, 3, 4, 2, 1, 7, 9, 8 \rangle$ برابر ۵ است. با در نظر گرفتن تمام جایگشت‌های ممکن، به طور میانگین عدد یک جایگشت چند است؟

۱) $\frac{81}{19}$ ۲) $\frac{13}{3}$ ۳) $\frac{41}{9}$ ۴) ۵   ۵) $\frac{9}{2}$

۷ یک عدد را **وارونه** می‌گوییم، هر گاه به صورت $\frac{1}{n}$ باشد که n عددی طبیعی است. می‌خواهیم عدد ۱ را به صورت جمع k عدد وارونه‌ی متمایز بنویسیم. به ازای چند مقدار $2 \leqslant k \leqslant 6$ می‌توان این کار را انجام داد؟

۱) ۳   ۲) ۱   ۳) ۵   ۴) ۰   ۵) ۴

۸ تیم فوتبال سلطان، با سیستم ۴ − ۴ − ۲ بازی می‌کند؛ یعنی ۱ دروازه‌بان، ۴ مدافع و ۴ هافبک و ۲ مهاجم دارد. هر توپی که به یک بازیکن در این تیم می‌رسد، یا آن را با یک شوت، تبدیل به گل می‌کند یا پاس می‌دهد.



هیچ بازیکنی حق ندارد به بازیکنی پاس بدهد که قبلا توپ به او رسیده و یا در خطوط عقب‌تر بازی می‌کند؛ برای مثال یک هافبک نمی‌تواند به یک مدافع پاس بدهد، اما می‌تواند به یک هافبکی که توپ به آن نرسیده و یا یک مهاجم پاس بدهد.
فرض کنید توپ در ابتدا در اختیار دروازه‌بان است و تیم می‌خواهد یک گل بزنند (همانند شکل زیر). به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ (حتی دروازه‌بان هم می‌تواند با یک ضربه‌ی مستقیم گل بزنند.)

۱) ۲۳۰۴   ۲) ۱۱۵۲   ۳) ۵۰۴۳   ۴) ۲۸۶۲۵   ۵) ۲۱۱۲۵

۹ سه توپ سیاه و سه توپ سفید داریم که به شکل زیر، در هفت جعبه جای گرفته‌اند:

فاصله‌ی دو جعبه تعداد جعبه‌های بین آن دو است. برای مثال فاصله‌ی دو جعبه‌ی مجاور صفر است. در هر حرکت می‌توان یک توپ که فاصله‌ی جعبه‌اش با یک جعبه‌ی خالی، حداکثر یک است را به خانه‌ی خالی انتقال داد. می‌خواهیم به حالتی برسیم که سه توپ سفید در سه جعبه‌ی سمت چپ و سه توپ سیاه در سه جعبه‌ی سمت راست باشند. حداقل چند حرکت برای این کار لازم است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷ ۵) ۱۶

۱۰ جایگشت $a_۱, a_۲, \cdots, a_۶$ از اعداد ۱ تا ۶ را در نظر بگیرید. در ابتدا یک عدد را به دل‌خواه انتخاب می‌کنیم و سپس در هر مرحله اگر عدد a_i انتخاب شده بود در مرحله‌ی بعد به ازای $a_i \neq ۶$ عدد $a_{a_i+۱}$ و برای $a_i = ۶$ عدد $a_۱$ انتخاب می‌شود. به ازای چند جایگشت مختلف می‌توان عدد اول را به گونه‌ای انتخاب کرد که بعد از تعدادی مرحله، همه‌ی اعداد جایگشت حداقل یک‌بار انتخاب شده باشند؟

۱) ۳۴۵ ۲) ۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۷۲۰ ۵) ۱۲۰

۱۱ مجموعه‌ی $S = \{۱, ۲, ..., ۷\}$ داده شده است. دو تابع داریم:
$f(A)$ که مکمل زیرمجموعه‌ی A و $g(A, B)$ که اشتراک A و B را می‌دهد.
یک کیسه داریم که همه‌ی زیرمجموعه‌های S را درون آن ریخته‌ایم. می‌خواهیم تعدادی زیرمجموعه از کیسه بیرون آوریم تا با استفاده از آن‌ها و توابع بتوان تمام زیرمجموعه‌های S را تولید کرد (برای تولید زیرمجموعه‌ها می‌توان از هر زیرمجموعه به تعداد دل‌خواه استفاده کرد).
فرض کنید $\{۱, ۲, ۵, ۶\}$، $\{۲, ۵, ۳\}$ و $\{۵, ۶\}$ را از کیسه بیرون آورده‌ایم. حداقل چند زیرمجموعه‌ی دیگر از کیسه بیرون بکشیم تا مطمئن باشیم با آن‌ها می‌توان مسئله را حل کرد؟

۱) ۱ ۲) ۶۲ ۳) ۶۷ ۴) ۶۴ ۵) ۳

یک کلمه درون یک پرونده‌ی متنی داده شده است و می‌خواهیم با کم‌ترین تعداد اعمال کپی (Copy) و درج (Paste) تعداد مشخصی نسخه از آن ایجاد کنیم.
در هر مرحله می‌توانیم تعداد دل‌خواهی از کلمات نوشته‌شده درون پرونده را در حافظه کپی کنیم و یا کلمات درون حافظه را در پرونده درج کنیم. (مثل کپی و پیست در ویرایشگرها، می‌توان یک بار کپی کرد و سپس چند بار درج کرد.)
هر کپی ۱ واحد و هر درج نیز ۱ واحد هزینه دارد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۲ با حداقل چند واحد هزینه می‌توانیم دقیقا ۹۹ کلمه‌ی دیگر مشابه با کلمه‌ی اول ایجاد کنیم؟

۱) ۱۳ ۲) ۲۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۰ ۵) ۲۲

۱۳ با ۱۴ واحد هزینه حداکثر چند کلمه (با احتساب کلمه‌ی اولیه) می‌توان ایجاد کرد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۸ ۳) ۲۴۳ ۴) ۸۱ ۵) ۱۶۲

فرض کنید در یک کشور، اسکناس‌های $a_۱$ تومانی، $a_۲$ تومانی و ... داریم و بخواهیم مقدار n تومان را پرداخت کنیم (پرداخت یک‌طرفه است یعنی نمی‌توانیم مقداری را بپردازیم و بقیه‌ی پول را پس بگیریم). در صورتی که بتوان n تومان را پرداخت کرد، n را عددی **خوب** می‌گوییم. برای مثال اگر اسکناس‌های ۵۰, ۱۰۰, ۲۰۰, ۵۰۰ و ۱۰۰۰ تومانی داشته باشیم، ۲۹۰۰ عددی خوب است؛ اما ۲۹۵۳ عددی خوب نیست. هم‌چنین عددی مانند n را **عجیب** گوییم، اگر بتوان n تومان را پرداخت کرد؛ طوری که از هر نوع اسکناس حداکثر یک بار استفاده شود. در مثال قبل ۹۰۰ عجیب نیست.
اگر n یک عدد خوب باشد، کمینه‌ی تعداد اسکناس‌ها برای پرداختش را $f(n)$ می‌نامیم. فرض کنید یک نفر الگوریتم زیر را برای پرداخت انتخاب کند:

در هر مرحله بزرگ‌ترین اسکناسی که مقدار آن از n بیش‌تر نیست را انتخاب می‌کنیم. این مبلغ را پرداخت می‌کنیم و برای باقی پول همین روش را ادامه می‌دهیم تا پرداخت به طور کامل انجام شود.
عدد n را **زیبا** گوییم، اگر تعداد اسکناس‌هایی که با الگوریتم بالا پرداخت می‌کنیم، برابر $f(n)$ شود. به یک کشور، **افسانه‌ای** گوییم، اگر تمام اعداد طبیعی خوب، زیبا نیز باشند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۴ فرض کنید در یک کشور، اسکناس‌های $۱, ۳, ۳^۲, ۳^۳, \ldots$ تومانی داشته باشیم. می‌خواهیم یک نوع اسکناس از بین گزینه‌های زیر به اسکناس‌های‌مان اضافه کنیم. با اضافه کردن کدام گزینه تعداد اعداد عجیب n که $۱ \leqslant n \leqslant ۲۴۹$ بیش‌تر از بقیه گزینه‌ها است؟

۱) ۶   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۷   ۵) ۲

۱۵ فرض کنید گزینه‌های زیر اسکناس‌های ۵ کشور مختلف باشند. کدام گزینه مربوط به یک کشور افسانه‌ای نیست؟

۱) $۱, ۲, ۴, ۸, \ldots$
۲) $۱!, ۲!, ۳!, \ldots$
۳) $۱, ۲, ۳, ۵, ۹, \ldots$ (۱ و $(۲^n + ۱)$ها)
۴) $۱, ۴, ۹, ۱۶, \ldots$
۵) گزینه‌های ۳ و ۴

گراف ساده‌ی n رأسی G با رئوس $۱, ۲, \ldots, n$ را در نظر بگیرید. **ماتریس مسیریاب گراف**، یک ماتریس $n \times n$ است که درایه‌ی سطر iام و ستون jام آن، تعداد مسیرهای بین رأس i و رأس j است (مسیر دنباله‌ای از رئوس است که بین هر دو رأس متوالی یک یال وجود دارد و هر رأس حداکثر یک بار آمده است).
در صورتی که $i = j$ باشد، مقدار ۱ را در ماتریس قرار می‌دهیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ کدام یک از ماتریس‌های زیر، می‌تواند یک ماتریس مسیریاب باشد؟

ماتریس ۱:

۱	۱	۱	۲	۱
۱	۱	۱	۲	۱
۱	۱	۱	۱	۱
۲	۲	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱

ماتریس ۲:

۱	۳	۳	۳	۳
۳	۱	۳	۳	۳
۳	۳	۱	۳	۳
۳	۳	۳	۱	۳
۳	۳	۳	۳	۱

ماتریس ۳:

۱	۱	۲	۱
۱	۱	۲	۲
۲	۲	۱	۲
۱	۲	۲	۱

ماتریس ۴:

۱	۴	۳	۳
۴	۱	۳	۳
۳	۳	۱	۳
۳	۳	۳	۱

ماتریس ۵:

۱	۳	۳	۲
۳	۱	۲	۳
۳	۲	۱	۳
۲	۳	۳	۱

۱) ماتریس ۲   ۲) ماتریس ۳   ۳) ماتریس ۴   ۴) ماتریس ۱   ۵) ماتریس ۵

۱۷ می‌خواهیم با پرسیدن تعدادی از خانه‌های ماتریس مسیریاب یک گراف، تعداد مؤلفه‌های گراف را تشخیص دهیم. در هر گام می‌توان یکی از خانه‌های ماتریس را پرسید. در حداقل چند گام به طور تضمینی به هدف می‌رسیم؟

۱) n ۲) $n-۱$ ۳) $n-۲$ ۴) $\binom{n-۱}{۲}+۱$ ۵) $\binom{n}{۲}$

۱۸ با استفاده از ماتریس مسیریاب یک گراف، پاسخ چند تا از موارد زیر را همواره می‌توان فهمید؟ (رأس برشی، رأسی است که پس از حذف آن تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف افزایش یابد.)

- آیا گراف رأس برشی دارد؟
- آیا رأس v برشی است؟
- بین دو رأس v و u یال وجود دارد یا نه؟
- آیا گراف حداقل ۲ (نه لزوما مجزا) دور دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۰ ۴) ۲ ۵) ۴

روال جام حذفی بدین صورت است که ۲^n تیم در n مرحله با هم مسابقه می‌دهند به نحوی که در هر مرحله هر تیم با یک تیم دیگر مسابقه می‌دهد (مثلا در مرحله‌ی اول $۲^{n-۱}$ مسابقه انجام می‌شود) و تیم‌هایی که شکست بخورند حذف می‌شوند. تیم‌های پیروز شده (نیمه‌ی دیگر تیم‌ها) به مرحله‌ی بعد می‌روند و دوباره به همین ترتیب مسابقه می‌دهند تا جایی که فقط یک تیم باقی بماند که تیم قهرمان نامیده می‌شود.
هر تیم عددی بین ۰ تا $۲^n - ۱$ دارد که قدرت آن تیم را نیز نشان می‌دهد (قدرت هیچ دو تیمی با هم برابر نیست). در مسابقه‌ی بین دو تیم، تیمی پیروز خواهد شد که قدرت بیشتری داشته باشد مگر در شرایطی که هر سوال مشخص می‌کند.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۹ این مسابقات با شرکت ۶۴ تیم برگزار می‌شود ($n=۶$). در یک مسابقه اگر قدرت دو تیم را در مبنای دو بنویسیم و همه‌ی رقم‌های آنها به جز یکی برابر باشند هر دو تیم ممکن است پیروز شوند، در غیر این صورت تیم قوی‌تر پیروز می‌شود. برای مثال اگر ۲ و ۱۰ با هم مسابقه بدهند، هر دو تیم می‌توانند پیروز شوند. اما اگر ۱۶ و ۷ با هم مسابقه بدهند، حتما ۱۶ پیروز خواهد شد. ضعیف‌ترین تیمی که ممکن است قهرمان شود چه تیمی است؟

۱) ۳۱ ۲) ۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱ ۵) ۹

۲۰ در یک جام حذفی ۳۲ تیم حضور دارند ($n=۵$) و چهار تیم ۳۱، ۲۳، ۱۴ و ۵ آمادگی کافی ندارند و ممکن است در یک مسابقه به طور اتفاقی شکست بخورند. با این شرایط ضعیف‌ترین تیمی که ممکن است قهرمان شود چه تیمی است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱ ۴) ۴ ۵) ۰

۲۱ در یک جام حذفی ۱۶ تیم حضور دارند ($n=۴$) و هر تیم ممکن است به طور اتفاقی در یک مسابقه پیروز شود. ضعیف‌ترین تیمی که ممکن است قهرمان شود چه تیمی است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴ ۵) ۷

دنباله‌ای اکیدا صعودی مانند $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ از اعداد داریم. ما هیچ اطلاعاتی درباره‌ی اعداد نداریم و فقط می‌دانیم اکیدا صعودی هستند. عدد x در این دنباله موجود است اما نمی‌دانیم کجای دنباله است و می‌خواهیم مکان عدد

x در دنباله را بیابیم. در هر مرحله می‌توانیم یکی از a_iها را انتخاب کنیم؛ سپس به ما نتیجه‌ی مقایسه‌ی x با a_i گفته می‌شود؛ یعنی یکی از عبارات زیر گزارش داده می‌شود:

$$x < a_i, \quad x = a_i, \quad x > a_i$$

هزینه‌ی مقایسه‌ی عدد a_i با x، برابر w_i است. w_i داده شده است.
می‌خواهیم الگوریتمی ارائه دهیم که مکان عدد x در دنباله را بیابد. کمینه‌ی هزینه‌ای که بتوان به طور تضمینی این کار را انجام داد

$$f(w_۱, w_۲, ..., w_n)$$

می‌نامیم. برای مثال می‌توان نشان داد اگرتمام w_iها برابر ۱ باشند، این مقدار برابر $\lfloor \lg(n) \rfloor$ خواهد شد (منظور از $\lg(n)$، لگاریتم n در مبنای ۲ است).

با توجه به توضیحات بالا به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۲ مقدار

$$f(\underbrace{۲, ۳, ..., ۱۰, ۱, ۲, ۳, ..., ۱۰, ..., ۱, ۲, ۳, ..., ۱۰}_{\text{۳۱۹ عدد}})$$

چند است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۶ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹ ۵) ۱۶

۲۳ مقدار

$$f(\underbrace{۱, ۱, ..., ۱}_{\text{۵۱۱ عدد}}, \underbrace{۲, ۲, ..., ۲}_{\text{۵۱۱ عدد}})$$

چند است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۹ ۳) ۲۷ ۴) ۱۲ ۵) ۱۸

۲۴ فرض کنید $n \geqslant ۴$ باشد. مقدار

$$f(n, n^۲, n^۳, ..., n^n)$$

چند است؟

۱) $n^{n-۳} + n^{n-۱}$
۲) $\left\lfloor n^{\frac{n}{۲}} + n^{\frac{۳n}{۴}} + n^{\frac{۷n}{۸}} + ... \right\rfloor$
۳) $\sum_{۱ \leqslant ۲k+۱ \leqslant n} n^{۲k+۱}$
۴) $\lfloor \lg(۱ + n + n^۲ + ... + n^n) \rfloor$
۵) $n + n^۲ + ... + n^{n-۱}$

۲۵ فرض کنید $n \geqslant ۳$ و تمام w_iها متمایز هستند. چند تا از گزاره‌های زیر همواره درست هستند؟

- هیچ الگوریتم بهینه‌ای در مرحله‌ی اول w_i بیشینه را انتخاب نمی‌کند.

- الگوریتم بهینه‌ای وجود دارد که در مرحله‌ی اول، w_iای را انتخاب می‌کند که $|\sum_{j<i} w_j - \sum_{j>i} w_j|$ کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.
- جواب بهینه‌ای وجود دارد که در هیچ مرحله‌ای، $a_۱$ را انتخاب نکند.
- جواب بهینه‌ای وجود دارد که در مرحله‌ی اول، w_i کمینه را انتخاب کند.

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۰ ۵) ۳