

مرحله ی اول هفدهمین دوره ی المپیاد ریاضی ایران

۸ بهمن ماه ۱۳۷۷

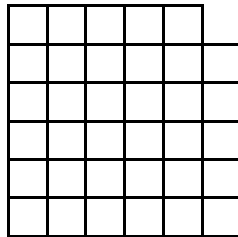
(۱) اگر $n \geq 2$ عددی طبیعی و $2^n + n^2$ عددی اول باشد، باقی مانده ی n بر ۶ کدام یک از عدد های زیر می تواند باشد؟

- الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) الف و ب ه) ب و ج

(۲) در مثلث ABC ارتفاع وارد بر ضلع BC آن را در D قطع می کند و ارتفاع وارد بر ضلع CA نیز AD را در H قطع می کند. اگر $AD=4$ ، $BD=3$ و $CD=2$ ، آن گاه طول HD برابر است با:

- الف) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ب) $\frac{3}{2}$ ج) $\sqrt{5}$ د) $\frac{5}{2}$ ه) $\frac{2\sqrt{5}}{2}$

(۳) در شکل زیر چند مربع وجود دارد؟



- الف) ۳۵ ب) ۷۵ ج) ۸۵ د) ۱۰۵ ه) ۲۰۵

(۴) ۵ میله ی آهنی به طول های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ داریم با این میله ها به چند صورت می توان یک مثلث درست کرد؟

- الف) ۳ ب) ۵ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

(۵) x و y دو عدد صحیح متوالی هستند. کدام یک از گزینه های زیر در مورد عبارت $x^2 + y^2 + (xy)^2$ درست است؟

الف) مجموعه ی رقم های یکان آن ها شامل مجموعه ی $\{0, 1, 3, 5, 6, 9\}$ است.

ب) همواره مربع کامل است.

ج) به ازای مقادیر x و y عددی اول است.

د) همواره عدد مرکب است.

ه) هیچ کدام

۶) دنباله a_n به صورت زیر تعریف شده است:

$$a_1 = 0$$

$$a_{n+1} = na_n + a_n + n$$

باقی مانده a_{101} بر 102 چند است؟

الف) صفر (ب) ۱ (ج) ۹۹ (د) ۱۰۰ (ه) ۱۰۱

۷) طول اقطار ذوزنقه ای ۱۳ و ۱۵ و ارتفاع آن برابر ۱۲ است. مساحت این ذوزنقه چقدر است؟

الف) ۵۶ (ب) ۷۲ (ج) ۸۴ (د) ۹۶ (ه) با این اطلاعات قابل محاسبه نیست.

۸) بزرگ ترین توانی از ۲ که عدد $N = 3^{512} - 1$ بر آن بخش پذیر باشد، کدام است؟

الف) 2^8 (ب) 2^9 (ج) 2^{10} (د) 2^{11} (ه) 2^{12}

۹) اعداد طبیعی را مطابق الگوی زیر در یک جدول قرار داده ایم. مثلاً ۱۴ در سطر دوم و ستون چهارم آمده است. مکان عدد ۱۳۷۷ کدام است؟

۱	۲	۶	۷	۱۵	
۳	۵	۸	۱۴		
۴	۹	۱۳			
۱۰	۱۲				
۱۱					

الف) سطر ۲ ستون ۵۲ (ب) سطر ۵۲ ستون ۲

ج) سطر ۲ ستون ۵۱ (د) سطر ۵۱ ستون ۲

ه) هیچ کدام

۱۰) چند عدد در مجموعه ی اعداد طبیعی $\{1999, \dots, 1377\}$ وجود دارد که برابر تفاضل دو مجذور کامل هستند؟

الف) ۳۱۱ (ب) ۳۱۲ (ج) ۴۶۶ (د) ۴۶۷ (ه) ۶۲۳

۱۱) عدد های ۱، ۲، ... و ۱۳۷۷ روی تخته سیاه نوشته شده اند. هر بار دو تا از اعداد روی تخته را به دل خواه پاک می کنیم و قدر مطلق تفاضلشان را روی تخته می نویسیم، تا زمانی که یک عدد روی تخته باقی بماند. کدام یک از گزینه های زیر در مورد عدد به دست آمده کامل تر است؟

الف) این عدد همواره مضربی از ۴ است.

ب) این عدد همواره فرد است.

ج) باقی مانده ی تقسیم این عدد بر ۴، مساوی یک است.

د) این عدد همواره زوج است.

ه) هیچ کدام

۱۲) در مثلث ABC یکی از میانه ها بر یکی از نیمساز های درونی عمود است. اگر اندازه ی اضلاع این مثلث سه عدد صحیح متوالی باشد، آن گاه اندازه ی محیط این مثلث برابر است با:

الف) ۶ (ب) ۹ (ج) ۱۵ (د) ۱۸ (ه) ۲۱

۱۳) اگر a, b, c, d, e یک ترتیب دلخواه از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، در این صورت حداکثر مقدار عبارت $S = ab + bc + cd + de + ea$ به ازای ترتیب های مختلف چقدر است؟

الف) ۴۲ (ب) ۴۳ (ج) ۴۵ (د) ۴۸ (ه) ۵۰

۱۴) فرض کنید A, B و C سه نقطه داخل یا روی اضلاع یک مربع به ضلع واحد باشند. اگر داشته باشیم $x = \min\{AB, AC, BC\}$ (که در آن، \min کوچکترین عضو یک مجموعه را نشان می دهد)، آن گاه حداکثر مقدار x ، وقتی که A, B و C داخل یا روی اضلاع مربع تغییر می کنند، چیست؟

الف) $\frac{6}{5}$ (ب) ۱ (ج) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ (د) $\sqrt{2}$ (ه) $\frac{4}{3}$

۱۵) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ تابعی است یک به یک و پوشا و به علاوه می دانیم که m بر n بخش پذیر است، اگر و فقط اگر $f(m)$ بر $f(n)$ بخش پذیر باشد. کدام گزینه در مورد هر تابع به این شکل درست است؟

الف) $f(n)$ بر n بخش پذیر است.

ب) اگر p عددی اول باشد، آن گاه $f(p)=p$

ج) برای هر a و b داریم: $f(ab)=f(a)f(b)$

د) $f(n) \leq n^2$

ه) $f(f(n))=n$

۱۶) اگر بین عدد های مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 53\}$ حداکثر چند عدد می توان انتخاب کرد که تفاضل هیچ دو تایی از آن ها برابر ۴ نباشد؟

الف) ۲۶ ب) ۲۷ ج) ۲۸ د) ۲۹ ه) ۳۰

۱۷) یک تکه مقوای مربع شکل را با قیچی به n تا مربع کوچک تر (نه لزوما مساوی) بریده ایم. n کدام یک از اعداد زیر می تواند باشد؟

الف) ۱۱ ب) ۱۷ ج) ۲۲ د) ۳۱ ه) همه ی مقادیر الف، ب، ج، و د

۱۸) از میان عدد های $1, 2, \dots, 20$ حداقل چند عدد را باید حذف کنیم به طوری که مجموع هیچ دو عدد باقی مانده، عددی اول نباشد.

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۱۱

۱۹) فرض کنید $A = \overbrace{99 \dots 99}^{A1}$. مجموع ارقام A^2 در پایه ی ۱۰ چند است؟

الف) ۶۹۳ ب) ۷۲۹ ج) ۷۹۰ د) ۸۳۷ ه) ۹۳۶

۲۰) C_1 و C_2 دو دایره به شعاع های ۳ و ۱ هستند که فاصله ی بین مرکز های آن ها برابر ۱۰ است. فرض کنید S مکان هندسی وسط پاره خز هایی باشد که یک سر آن روی محیط سر دیگر آن روی محیط C_2 است. مساحت S چقدر است؟

الف) ۰ ب) 3π ج) 4π د) 5π ه) 6π

(۲۱) $A \subseteq N$ را « خوب » می نامیم، هر گاه بتوان اعضای آن را به صورت دنباله ی a_1, a_2, a_3, \dots نوشت به طوری که هر دو جمله ی متوالی مثل a_i و a_{i+1} دارای مقسوم علیه مشترک بزرگ تر از ۱ باشند. کدام یک از مجموعه های زیر خوب نیستند؟

الف) اعداد طبیعی بزرگ تر از ۱

ب) اعداد فرد بزرگ تر از ۱

ج) اعداد طبیعی به صورت $3k+2$

د) اعداد مربع کامل بزرگ تر از ۱

ه) هر چهار مجموعه، خوب هستند.

(۲۲) در مثلث ABC ، D نقطه ی وسط AB ، و E نقطه ای روی BC است به طوری که $BE = 2EC$. فرض کنید $\angle ADC = \angle BAC$. زاویه ی $\angle BAE$ چقدر است؟

الف) ۴۵ درجه

ب) ۶۰ درجه

ج) ۷۵ درجه

د) این زاویه به طور یکتا مشخص می شود ولی هیچ کدام از جواب های بالا درست نیست.

ه) اطلاعات برای تعیین زاویه کافی نیست.

(۲۳) ABC یک مثلث است. D نقطه ای روی AB و E روی AC است. تقاطع BE و CD را P می نامیم. اگر مساحت مثلث های ADE ، BPD و CEP به ترتیب ۵، ۸ و ۳ باشد، مساحت مثلث ABC چقدر است؟

الف) ۲۵ ب) ۲۷ ج) ۳۰ د) ۳۲ ه) اطلاعات مسئله کافی نیست.

(۲۴) فرض کنید $a_n = n^2 - 5n^2 + 6n$ و $b_n = n^2 + 5$ و d_n برابر بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک a_n و b_n است. کدام گزینه درست است؟ (\max بزرگ ترین عضو یک مجموعه را نشان می دهد).

الف) d_n متناوب است.

ب) $\max\{d_n \mid n \in \mathbb{N}\} = +\infty$

ج) $\max\{d_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 620$

د) d_n از جایی به بعد ثابت است.

ه) الف و ج

(۲۵) چند عدد گویای t وجود دارد که $0 \leq t \leq 77$ و $3t^3 + 10t^2 - 3t$ عددی صحیح باشد؟

الف) ۷۸ ب) ۸۶ ج) ۱۰۰ د) ۱۰۴ ه) ۲۳۲

(۲۶) نقطه P روی نقاط صفحه xy با مختصات صحیح در حال حرکت است. به این صورت که اگر در نقطه (a, b) باشد با توجه به این که باقی مانده $a+b$ بر ۴، برابر ۰، ۱، ۲ یا ۳ است به ترتیب به راست، بالا، چپ، یا پایین می رود. فرض کنید P از P_0 شروع به حرکت کرده و پس از ۱۰۰ حرکت به نقطه $(0, 10)$ رسیده است. به ازای چه تعداد P چنین اتفاقی می افتد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

(۲۷) می خواهیم ۱۰ عدد سکه را طوری در یک ردیف قرار دهیم که هیچ دو سکه ی مجاوری به رو نباشد. به چند صورت این کار امکان پذیر است؟

الف) ۱۰۰ ب) ۱۲۱ ج) ۱۴۴ د) ۲۴۳ ه) ۲۵۶

(۲۸) چند دو تایی (x, y) از اعداد طبیعی در معادله $2x^2y^2 + y^2 = 26x^2 + 1201$ صدق می کند؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) این معادله جواب ندارد.

(۲۹) به ازای کدام دسته از مقادیر n ، تابع $f: \{1, \dots, 31\} \rightarrow \{1, \dots, 31\}$ وجود دارد که در هر دو شرط زیر صدق

می کند: $f^i = \overbrace{fofo \dots of}^{i \text{ مرتبه}}$

یک) برای هر $x \in \{1, \dots, 21\}$ داریم $f^n(x) = x$

دو) برای هر $0 < i < n$ داریم $f^i(x) = x \Leftrightarrow x = 1$

الف) مجموعه ی اعداد کم تر از ۳۱

ب) $\{2, 8, 16\}$

ج) $\{2, 3, 15\}$

د) $\{2k+1 \mid k=1, 2, \dots, 14\}$

ه) $\{3, 7, 13\}$

۳۰) بزرگ ترین m ای که دنباله ای مثل a_1, a_2, \dots, a_m با شرط زیر وجود دارد، چند است؟

$$a_i \in \{1, 2, 3, \dots, 10\} *$$

* اگر $a_i = a_j$ و $a_{i+1} = a_{j+1}$ آن گاه $i = j$.

۱۰۲ (ه)

۱۰۱ (د)

۱۰۰ (ج)

۹۹ (ب)

۹۸ (الف)