سوال 1:

خاصلی

پیزو الکتریک

تعریف مدول یانگ: اگر یک جسم به مساحت S و ضخامت d را تحت نیرویی قرار دهیم که ضخامت آن به اندازه x تغییر کند، مقدار این نیرو بنابر قانون هوک برابر خواهد بود با $F = -\gamma S\frac{x}{d}$ که به γ مدول یانگ می گوییم که فقط به جنس ماده (نه ابعاد آن) بستگی دارد.

ماده ای دی الکتریک داریم که دارای گذردهی ε است، و وقتی میدان الکتریکی صفر است، دارای یک چگالی دوقطبی ذاتی P_0 است. می توانید این چگالی دوقطبی را ناشی از n دوقطبی کوچک بر واحد حجم، با مقدار p بگیرید. ($P_0 = np$) اگر این ماده تحت فشار، فشرده شود، چون حجم آن کاهش می یابد، چگالی تعداد دوقطبی ها افزایش یافته، ولی می توانیم فرض کنیم اندازه این دوقطبی ها تغییر نمی کند، پس چگالی دوقطبی افزایش می یابد. به این ماده پیزوالکتریک می گویند.

ما خازنی از یک ماده پیزو الکتریک با چگالی جرمی ρ ، گذردهی ε ، چگالی دوقطبی ذاتی P_0 ، مدول یانگ γ، مساحت S و ضخامت d ایجاد کرده ایم. یک طرف این خازن ثابت شده است (طرف B) و طرف دیگر دارای (فلزی به) جرم m می باشد(طرف A). بطوریکه جهت بردار چگالی دوقطبی ذاتی به این سمت (طرف A) می باشد. (در تمام این سوال می توانید از شتاب جاذبه زمین صرف نظر کنید. همچنین می توانید، نسبت تغییر ضخامت به ضخامت را کوچک فرض کنید.)

الف) اگر در ابتدا دوطرف این خازن هم پتانسیل باشند، در حالت مدار باز، اختلاف پتانسیل دو طرف خازن را به صورت تابعی از نیروی اعمالی به این خازن به دست آورید.

ب) اگر این خازن را تحت پتانسیل $\Delta\varphi$ قرار دهیم، تغییر ضخامت خازن، x، را به صورت تابعی از پتانسیل اعمالی به دو سر خازن به دست آورید. ($\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B$) دقت کنید که مقدار مثبت تغییر ضخامت خازن، x، به معنای افزایش ضخامت خازن و مقدار منفی آن به معنای کاهش ضخامت خازن است.

ج) اگر در حالت مدار باز، (و حالت اختلاف پتانسیل صفر در حالت تعادل) خازن را تحت فشار قرار داده و سپس رها کنیم، دوره تناوب نوسانات کوچک آنرا بدست آورید.

ث) اگر دو سر این خازن پیزو را، به دو سر یک خازن عادی (خازنی که پیزوالکتریک نیست) با ظرفیت C_0 وصل کنیم، دوره تناوب نوسانات کوچک آنرا بدست آورید.

ث) اگر دو سر این خازن پیزو را، به دو سر یک سلف با مقدار L_0 وصل کنیم، دوره تناوب نوسانات کوچک آنرا بدست آورید.

ج) اگر دو سر این خازن پیزو را، به دو سر یک مدار RLC با مقاومت به مقدار R، سلف با مقدار L_0 و یک خازن عادی با ظرفیت C_0 وصل کنیم، (این المانها سری هستند.) دوره تناوب نوسانات کوچک آن، ω، و همچنین زمان واهلش آن، τ، را بدست آورید. ($x = x_0\cos(\omega t)e^{-\frac{t}{\tau}}$)

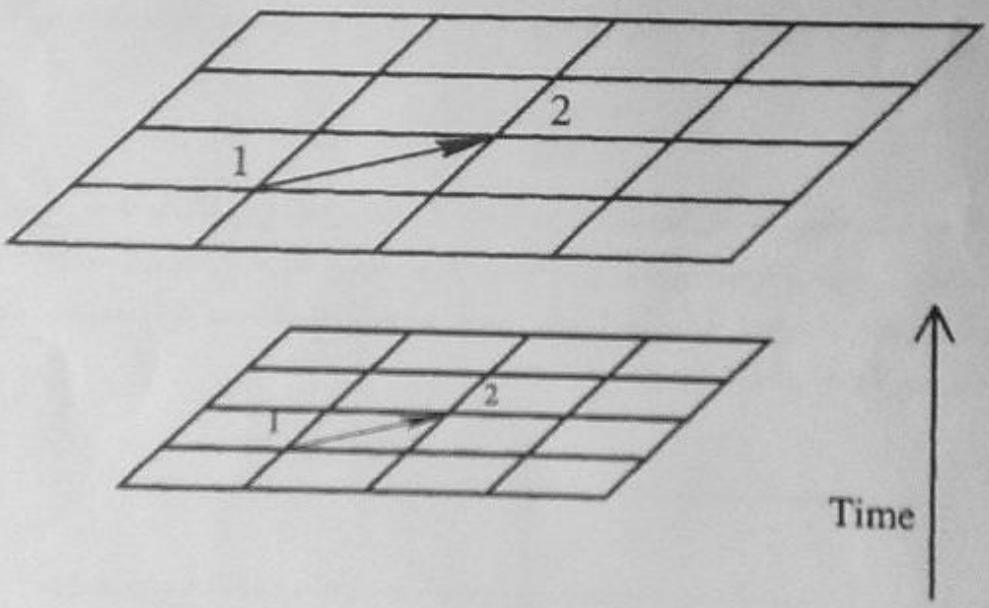
(در تمام این سوال مدار را، دارای جریان کند تغییر بگیرید و از تابش به علت جریان متناوب صرف نظر کنید.)

(یک مثال از خازن پیزو، قطعه ای به نام بیزر است که معمولا برای ایجاد بوق در کرونومتر و ... بکار می رود. همچنین اندازه گیری مکان در میکروسکوپهای نیروی اتمی (AFM) و میکروسکوپهای رویشی تونلی(STM) بر اساس استفاده از پیزوالکتریک است.)

۲) انبساط هابلی عالم:

این سوال جنبه آموزشی دارد، لطفاً مراحل سوال را به دقت دنبال کنید! امروزه می‌دانیم که جهان در مقیاس‌های بزرگ از مرتبه چند میلیارد سال نوری، همگن و همسانگرد است. از این رو، اگر به دینامیک کیهان در ابعاد بزرگ علاقه مند باشیم می‌توانیم جهان را پرشده از گازی به چگالی انرژی ثابت و نیز یک فشار ثابت در نظر بگیریم. همچنین جهان را یک سیستم بسته در نظر می‌گیریم که انتقال انرژی و حرارت با خارج از خود ندارد.

می‌توان نشان داد که فرض همگنی و همسانگردی دارای نتیجه زیر است: همانطور که دیده می‌شود با فرض همگنی و همسانگردی، اگر ذره آزمایشی را در هر نقطه دلخواه عالم قرار دهیم با فرض اینکه چگالی یکنواخت عالم را مختل نکند این ذره به دلیل تقارن در جای "مختصاتی" خود باقی می‌ماند. به این ذرات به اصطلاح ذره "همراه" گفته می‌شود و این به خاطر این است که این ذرات همراه نقاط مختصات باقی می‌مانند. اما به هر حال، جهان به طور کل هنوز دارای این درجه آزادی است که فواصل بین نقاط روی آن (مثل نقاط روی یک بادکنک) با یک ضریب وابسته به زمان همانند شکل زیر تغییر کند:



پس می‌توان فاصله بین دو نقطه همراه دلخواه را در زمان t بر حسب فاصله آن دو نقطه در زمان مرجع دلخواه t_0 از رابطه زیر به دست آورد:

$$X_{1,2}(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)} X_{1,2}(t_0)$$

که در آن $X_{1,2}(t)$ فاصله بین ذره همراه ۱ و ۲ در زمان t می‌باشد و $a(t)$ فاکتور مقیاس نامیده می‌شود که می‌تواند برحسب نوع ماده پرکننده عالم تابعیت زمانی‌های متفاوتی اختیار کند.

الف) سرعت دو نقطه همراه دلخواه را نسبت به یکدیگر (همراه با تعریف بالا، نه تعریف نسبیتی!) محاسبه کنید. رابطه خود را برحسب پارامتر هابل

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \qquad (۱)$$

به این رابطه قانون هابل می‌گویند.

ب) با استفاده از رابطه دوپلر نسبیتی می‌توان نسبت طول موج فوتون دریافتی از یک منبع در حال دورشدن با سرعت v را بر حسب طول موج فوتون ساطع شده از منبع به صورت زیر بدست آورد: (علی الاصول باید این را بلد باشید!)

$$\lambda_{obsv.} = \lambda_{emit.}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

که در آن $\lambda_{obsv.}$ طول موج دریافتی و $\lambda_{emit.}$ طول موج فوتون ساطع شده در دستگاه همراه منبع می‌باشد. این رابطه را تا مرتبه اول از v/c بسط دهید. معمولاً در اخترفیزیک از کمیت بی بعد انتقال به سرخ که به صورت زیر تعریف شده است، برای کمی کردن اثر دوپلر استفاده می‌کنند:

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_{obsv.}}{\lambda_{emit.}}$$

با استفاده از سرعت هابلی که در قسمت قبل محاسبه کردید. رابطه بین انتقال به سرخ نور ساطع شده از یک منبع بر حسب فاصله از ناظر را محاسبه کنید. اولین بار هابل در سال ۱۹۳۰ این اثر را برای کهکشان‌های با فواصل از مرتبه ۳ میلیون سال نوری از ما مشاهده کرد. نمودار مشاهداتی هابل در شکل زیر دیده می‌شود:

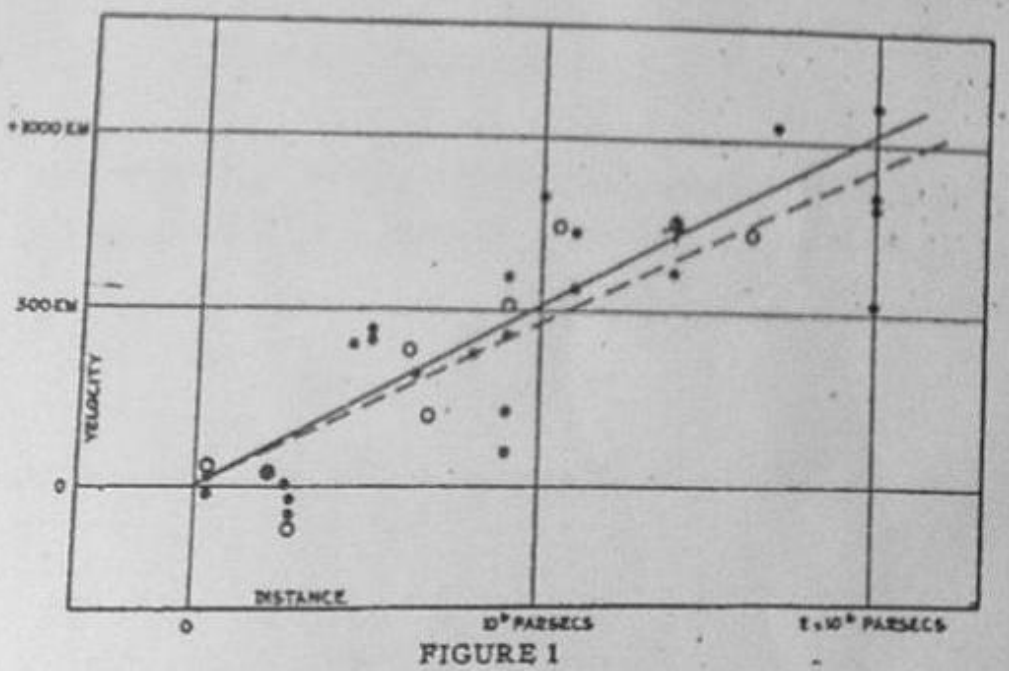


FIGURE 1

واحد محور افقی Mpc مگاپارسک می‌باشد که حدود ۳ میلیون سال نوری می‌باشد. و محور افقی Km/s است. بعد از امتحان به این فکر کنید که دلیل پراکندگی نقاط از روی خط مورد انتظار چیست.

پ) در این قسمت، اولین قدم برای محاسبه دینامیک عالم با توجه به محتوای ماده آن را برمی‌داریم. به طور استاندار، برای محاسبه تابعیت $a(t)$ باید به حل معادلات نسبیت عام اینشتین روی آوریم. اما خوشبختانه، یک روش کلاسیک مبتنی بر دینامیک و گرانش نیوتونی وجود دارد. فرض اساسی در این روش، پایسته بودن انرژی کل ذرات همراه از دید هر ناظر دلخواه است. فرض کنید که عالم از یک گاز همگن و همسانگرد با چگالی $\rho(t)$ پرشده است. یعنی همانطور که از فرض همگنی و همسانگردی انتظار داریم، چگالی انرژی عالم در همه مکان‌ها ثابت است و فقط می‌تواند تابعی از زمان باشد. انرژی کل یک ذره همراه فرضی را نسبت به یک مرجع دلخواه بدست آورید. با فرض پایستگی این انرژی معادله اول فریدمان را به صورت زیر بدست آورید

$$H^{۲}(t) + \frac{K}{a^{۲}(t)} = \frac{۸\pi G}{۳}\rho(t) \qquad (۲)$$

همچنین K را بر حسب انرژی ذره همراه مورد نظر E بدست آورید. خوب است بدانید که جواب $K > ۰$ معادل جهان بسته، $K < ۰$ معادل جهان باز و $K = ۰$ معادل جهان تخت می‌باشد. بعد از امتحان در مورد رابطه E و K فکر کنید.

ت) برای بدست آوردن $a(t)$ به یک معادله دیگر نیاز داریم. برای این مقصود می‌توان، قانون اول ترمودینامیک را برای شاره پرکننده کیهان بنویسیم. همانطور که گفته شد، تحول عالم را بی‌دررو در نظر بگیرد یعنی $dQ = ۰$. علاوه بر این، برای شاره کیهانی علاوه بر چگالی انرژی یکنواخت $\rho(t)$ فشار $p(t)$ در نظر بگیرید. به عنوان راهنمایی کره‌ای فرضی در عالم با شعاع دلخواه در نظر بگیرید. در اثر انبساط عالم این کره فرضی هم با تمام محتویات منبسط می‌شود. با استفاده از قانون اول ترمودینامیک، معادله دوم هابل را به صورت زیر بدست آورید:

$$\dot{\rho}(t) = -۳H(t)\left[\rho(t) + p(t)\right]. \qquad (۳)$$

ث) برای سادگی این دو معادله را برای مورد جهان تخت $K = ۰$ حل می‌کنیم. همانطور که واضح است برای حل این دو معادله به یک معادله اضافی که معادله حالت نامیده می‌شود، نیاز داریم. فرض بگیرید که فشار با چگالی انرژی رابطه ساده

$$p = w\rho, \qquad w > ۰,$$

را دارد. با حل این دو معادله فریدمان که در قسمت‌های قبل بدست آوردید و با استفاده از معادله حالت بالا نشان دهید

$$\frac{a(t)}{a(t_۰)} = \left(\frac{t}{t_۰}\right)^{\frac{۲}{۳(۱+w)}}.$$

ج) با جایگذاری ساده، $a(t)$ را برای جهان پراز ماده بی‌فشار $w = ۰$ و جهان پر از تابش الکترومغناطیسی با $w = \frac{۱}{۳}$ بدست‌آورید.

چ) این معادلات را برای ماده‌ای عجیب با معادله حالت $p = -\rho$ حل کنید و نشان دهید در این حالت داریم

$$\frac{a(t)}{a(t_۰)} = e^{H_\Lambda (t-t_۰)}$$

مقدار H_Λ را محاسبه کنید. به چگالی انرژی در این حالت ثابت کیهانشناسی هم گفته می‌شود. به این دینامیک عالم در این حالت "تورم کیهانی" می‌گویند. (البته توجه کنید که یک تورم اولیه در عالم وجود دارد و یک شبه تورم متاخر.)

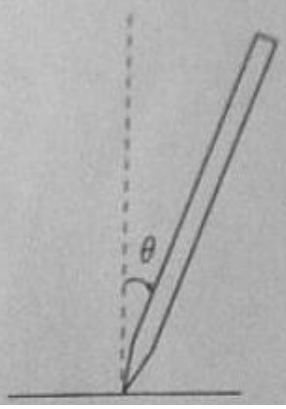
a) اتم هلیوم دو الکترون (که جرم و بار الکتریکی هر الکترون به ترتیب m و $-e$ است) دارد و هسته‌ی آن دارای دو پروتون است که مجموعاً بار مثبت آن $2e$ است. یک مدل کلاسیکی برای اتم هلیوم در نظر بگیرید که در آن دو الکترون در اثر جاذبه‌ی هسته و دافعه‌ی بین خودشان، روی مدار دایره‌ای شکلی حول هسته می‌چرخند.

آ) انرژی کل (مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل) الکترون‌ها حول هسته را بر حسب شعاع دایره‌ی مسیر و تکانه‌ی خطی حرکت الکترون روی مسیر دایره‌ای بنویسید. از انرژی پتانسیل گرانشی صرفنظر کنید.

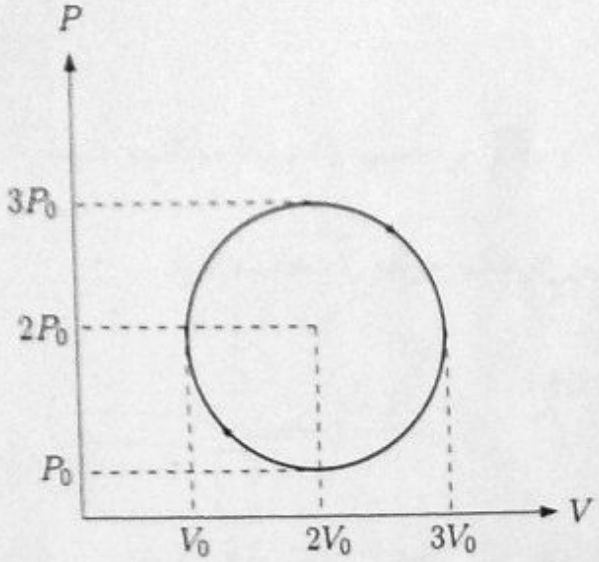
ب) به کمک اصل عدم قطعیت بین مکان و تکانه‌ی هر الکترون، کمینه‌ی انرژی مکانیکی (انرژی حالت پایه) را بر حسب m، e و h محاسبه کنید.

پ) به ازای $e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$، $m = 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ و $h = 6.6 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$ مقدار عددی انرژی حالت پایه را بر حسب الکترون ولت محاسبه کنید. مقدار تجربی انرژی حالت پایه‌ی اتم هلیوم $-78.8\,\mathrm{eV}$ است.

b) از لحاظ مکانیک نیوتونی اگر بتوانیم در یک لحظه نوک تیز مدادی را روی یک سطح افقی سفت در حالی که $\theta = 0$ و $\dot{\theta} = 0$ قرار دهیم، از آن پس مداد در حالت تعادل (ناپایدار) در وضعیت (قائم) قرار داده شده می‌ماند. اگر بخواهیم از لحاظ کوانتوم مکانیکی به مسئله نگاه کنیم اصل عدم قطعیت بین مکان و تکانه‌ی مداد در لحظه‌ی قرار دادن مداد به صورت قائم روی سطح افقی مانع از آن می‌شود که بتوانیم در یک لحظه مداد را در وضعیت $\theta = 0$ و $\dot{\theta} = 0$ قرار دهیم. با اختیار مقادیر معقولی برای کمیت‌های مورد نیاز در حل مسئله، مرتبه‌ی بزرگی بیشترین مدت زمانی که یک مداد می‌تواند قبل از افتادن (مثلاً $\theta = 5^\circ$) در وضعیت تقریباً قائم باقی بماند برآورد کنید. فرض کنید نوک مداد در هنگام افتادن روی سطح سُر نمی‌خورد.



۴) یک ماشین گرمایی در نظر بگیرید که با یک مول گاز ایده‌آل تک‌اتمی چرخه‌ی دایره‌ای برگشت پذیر نشان داده‌شده در شکل را طی می‌کند.



آ) کار انجام شده بوسیله‌ی ماشین در یک چرخه بر حسب P_0 و V_0 چقدر است؟

ب) کمترین و بیشترین دمای موجود در چرخه را بر حسب P_0 و V_0 محاسبه کنید.

پ) بازده ماشین کارنوی که بین کمینه و بیشینه‌ی دمای این چرخه کار می‌کند چقدر است؟

اکنون می‌خواهیم بازده ماشین گرمایی را بدست آوریم. برای این منظور:

ت) اگر در محدوده‌ی حجم $V_1 < V < V_2$ ماشین گرما بگیرد، به معادله‌ای مانند $f_1(V_1) = 0$ و $f_2(V_2) = 0$ برسید که از حل آن V_1 و V_2 بدست آید.

برای بدست آوردن ریشه‌های معادله‌ای مانند $f(x_n) = 0$ از روش نیوتن استفاده کنید. اساس این روش چنین است. بسط تیلور $f(x_n)$ حول x_{n-1} تا جمله‌ی خطی

$$f(x_n) \approx f(x_{n-1}) + (x_n - x_{n-1}) f'(x_{n-1})$$

است. از آنجا که x_n ریشه‌ی معادله است پس سمت چپ معادله‌ی اخیر صفر است و لذا

$$x_n \approx x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

ث) با حدس نقطه‌ای نزدیک ریشه‌ی معادله‌ی $f_1(V_1) = 0$ و $f_2(V_2) = 0$ پس از دو سه بار تکرارِ روش نیوتن می‌توان به ریشه‌ی معادله‌ها دست یافت. V_1 و V_2 را با دقت سه رقم معنی‌دار بر حسب V_0 بدست آورید.

ج) دما در نقاط متناظر با V_1 و V_2 را بر حسب P_0 و V_0 محاسبه کنید.

چ) گرمای داده شده به ماشین در یک چرخه را محاسبه کنید.

ح) بازده چرخه را بدست آورید.

در صورت نیاز:

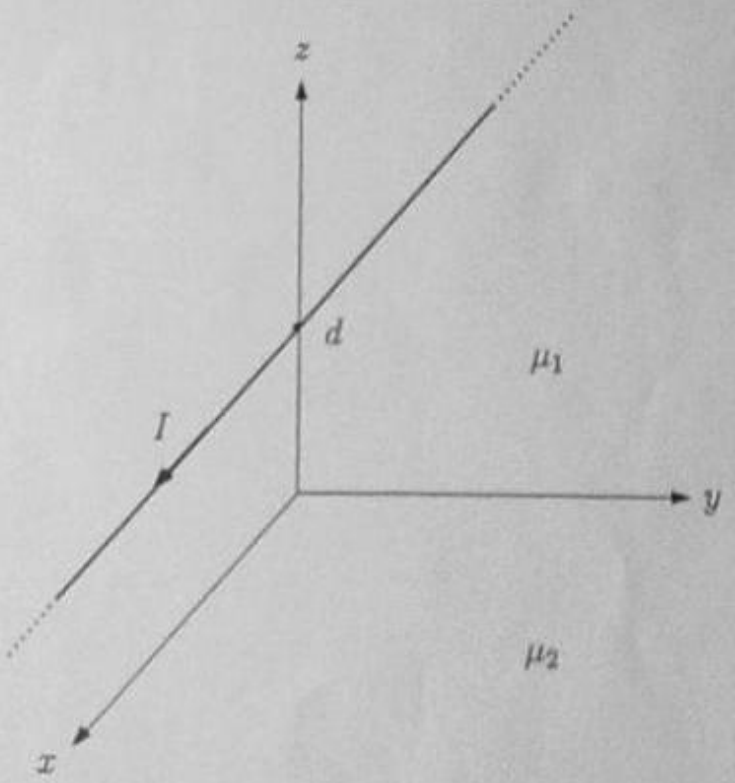
برای یک مول گاز ایده‌آل تک اتمی $C_V = \frac{3}{2}R$ و $C_P = \frac{5}{2}R$. همچنین $R = 8.3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol \cdot K}}$ و

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x.$$

۵) برای مواد مغناطیسی خطی داریم $\vec{B} = \mu\vec{H}$ که μ مستقل از $\vec{H}$ است. در حالت مغناطواستاتیک و برای نقاطی از فضا که $\vec{J} = \vec{0}$ است داریم $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0}$ و در نتیجه می‌توان نوشت $\vec{H} = -\vec{\nabla}\phi^*$.

به ϕ^* پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی می‌گویند. از آنجا که $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$، برای یک محیط خطی و همگن (μ مستقل از مکان) ϕ^* در معادله‌ی لاپلاس $\nabla^2\phi^* = 0$ صدق می‌کند. بنابراین مسئله‌ی مغناطیس تبدیل می‌شود به مسئله‌ی یافتن جوابی برای معادله‌ی لاپلاس که در شرایط مرزی صدق می‌کند.

دو محیط خطی و همگنِ نیمه نامتناهی، اولی با تراوایی مغناطیسی μ_1 در ناحیه‌ی $z > 0$ و دومی با تراوایی مغناطیسی μ_2 در ناحیه‌ی $z < 0$ در نظر بگیرید. یک سیم مستقیمِ بسیار طویلِ حامل جریان I در در ناحیه‌ی μ_1 در $z = d$ و موازی صفحه‌ی x-y قرار دارد. در محیط μ_1 اثر مرز را می‌توان با قرار دادن جریان تصویری مناسبی در $z = -d$ جایگزین کرد. همچنین در ناحیه‌ی μ_2 اثر مرز را می‌توان با قرار دادن جریان تصویری مناسبی در $z = d$ جایگزین کرد.



آ) جریان‌های تصویری را بدست آورید.

ب) نیروی وارد بر واحد طول سیم حامل جریان I را محاسبه کنید.

اگر به جای سیم نامتناهی، در ناحیه‌ی $z > 0$ یک توزیع جریان با چگالی $\vec{J}(\vec{r})$ داشته باشیم با استفاده از قانون بیوساوار

پ) چگالی جریان‌های تصویری در هر ناحیه را بدست آورید.

ت) به جای سیم نامتناهی حلقه‌ای به شعاع a حامل جریان I در محیط μ_1 در نظر بگیرید. مرکز حلقه در $z = d$ $(d \gg a)$ واقع است و بردار عمود بر سطح حلقه در صفحه‌ی y-z قرار دارد و با محور z زاویه‌ی θ می‌سازد. نیروی وارد بر حلقه‌ی جریان را محاسبه کنید.

بسمه تعالی

سئوالات المپیاد دانش آموزی فیزیک

پنج شنبه ۱۳۹۱/۲/۲۱ آزمون دوم دوره ۱۰ ام نفر

(مدت امتحان ۲۱۰ دقیقه می باشد.)

۱) متامتریال ماده ای است که به علت خواص الکترومغناطیسی خاص، دارای ضریب شکست منفی (در قانون اسنل-دکارت) است. $n = -m \ , m > 0$

متوازی السطوحی به ضخامت d از یک متامتریال با ضریب شکست $n = -m$ در اختیار داریم. اگر جسمی را در فاصله p از یک سطح متامتریال قرار دهیم،

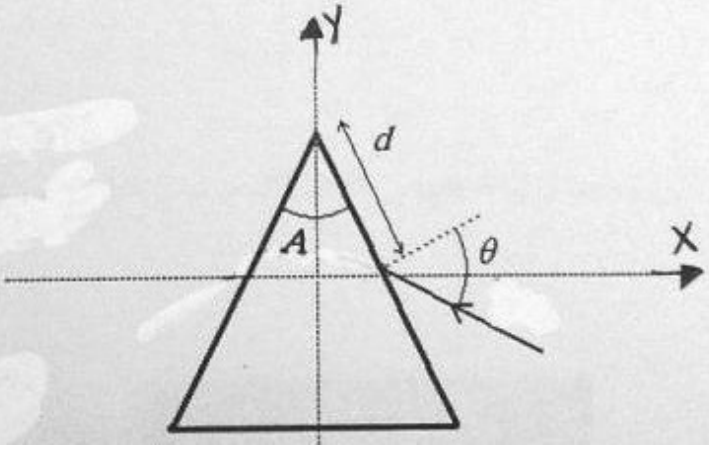
الف) تصویر آن در کجا تشکیل می شود؟

ب) تصویر حقیقی است یا مجازی؟ (در چه محدوده هایی حقیقی یا مجازی است؟)

ج) تصویر معکوس است یا مستقیم؟ (در چه محدوده هایی معکوس یا مستقیم است؟)

راهنمایی: فقط پرتوهایی را در نظر بگیرید که نزدیک به عمود به سطح متوازی السطوح (زاویه تابش کوچکی دارند) برخورد می کنند.

۲) منشوری با زاویه راس A و ضریب شکست n در اختیار داریم. باریکه نوری را با زاویه تابش θ در فاصله d از راس منشور به یکی از سطوح آن می تابانیم. اگر توان (شار انرژی بر واحد زمان) این باریکه P باشد، نیرو و همچنین گشتاور (حول راس) وارد بر منشور از جانب این نور را بدست آورید. (در این سوال فرض کنید این منشور طوری ساخته شده که تمام نور تابیده شده به منشور به آن داخل می شود و بازتابی در کار نیست.) برای مشخص کردن جهت نیرو، صفحه تابش را صفحه xy و نیمساز زاویه راس را محور y در نظر بگیرید.



۳) یک رشته مستقیم مایع و رسانا با شعاع r_0 در راستای محور z در نظر بگیرید که دارای بار سطحی σ_i است. حال فرض کنید که یک اختلال بصورت ماریپیچ با پای پیچ $2\pi b$ و شعاع r در محور این رشته ایجاد شود که در آن فرض می کنیم $R \ll r_0$. همچنین فرض کنید r شعاع جدید رشته تقریبا برابر r_0 است (واضح است که موقع ایجاد ماریپیچ، رشته کشیده شده و شعاع آن از r_0 به r کاهش می یابد) (شکل زیر).

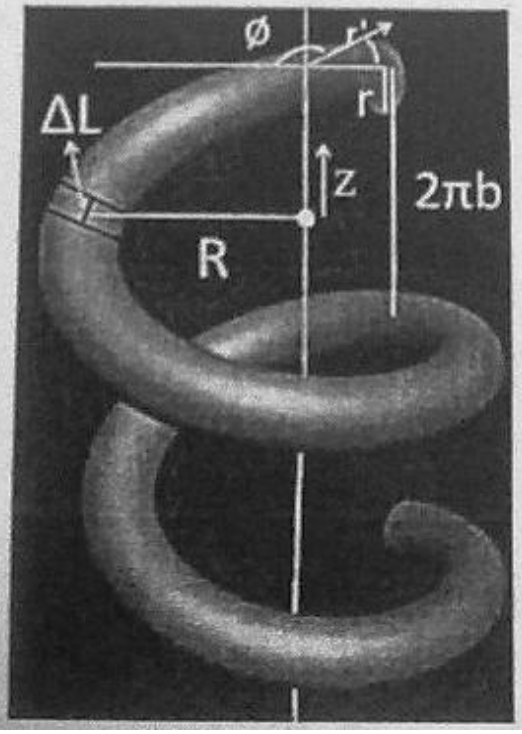
اگر بار مجموع رشته ثابت بماند جواب معادله لاپلاس برای پتانسیل در مکان قطبی r' در بیرون رشته بصورت زیر می باشد:

$$\Phi = -\sigma_i ln\left(\frac{r'}{r_0}\right) + AK_1\left(\frac{r'}{b}\right)cos\left(\frac{z}{b} + \emptyset\right)$$

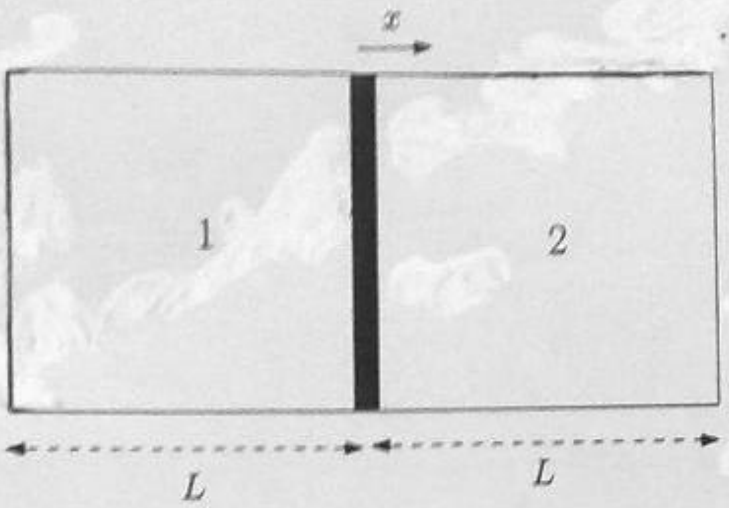
که در آن $K_1(x)$ *تابع بسل*، z پارامتر طول روی محور اولیه رشته ، r' فاصله از محور اولیه و $\emptyset$ زاویه بین راستاهای r' و R (در نقطه $z=0$) است.

الف) مقدار A را محاسبه کنید.

ب) نیروی الکتریکی وارد بر یک جزء از رشته واقع در $z=0$ (که در شکل نشان داده شده است) را بر حسب تابع بسل محاسبه کنید.



۴) یک استوانه با دیواره‌های عایق و سطح مقطع A به وسیله‌ی یک پیستون عایق به جرم m به دو قسمت مساوی تقسیم شده است. پیستون می‌تواند بدون اصطکاک در طول استوانه حرکت کند. مطابق شکل در ابتدا طول هر قسمت L است و هر طرف شامل یک مول گاز ایده‌آل با $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ در دمای T_0 است.



آ) اگر پیستون را به صورت بی‌دررو به اندازه‌ی x ($x \ll L$) از وضعیت تعادل جابجا و رها کنیم بسامد نوسانات کوچک پیستون حول مکان تعادل اولیه را بدست آورید.

ب) اکنون فرض کنید پیستون یک رسانندگی گرمایی دارد، به طوری که آهنگ انتقال گرما $\frac{dQ}{dt} = K\Delta T$ است که $\Delta T = T_2 - T_1$ و K بسیار کوچک است. آهنگ افزایش آنتروپی را تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر x بدست آورید.

پ) به واسطه‌ی تولید آنتروپی نوسان میرا می‌شود. انرژی متوسط تلف شده در هر بار نوسان پیستون چقدر است؟

بسمه تعالی

سئوالات المپیاد فیزیک

آزمون سوم دوره ۱۰ نفر

مدت امتحان: ۴ ساعت

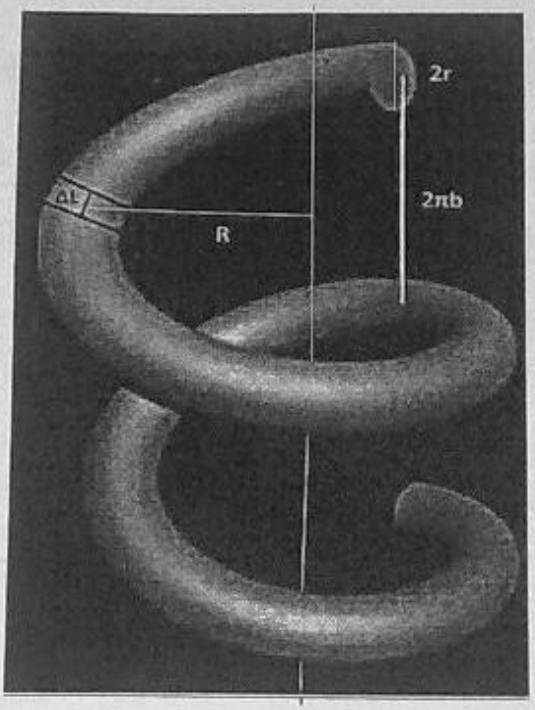
۱) فرض کنید یک بلور سه بعدی منظم از اتمهای سدیم داریم. هر کدام از اتمهای سدیم از یک یون Na^+ و یک الکترون لایه بیرونی تشکیل شده اند و از نظر ماکروسکوپیک یک محیط یکنواخت خنثی را با چگالی n اتم بر واحد حجم تشکیل میدهند. حال فرض کنید در لحظه $t=0$ الکترون‌های لایه بیرونی اتمها هرکدام به اندازه بردار مشخص $\vec{u}$ جابه‌جا شوند. بردار $\vec{u}$ برای الکترون واقع در مکان برداری $\vec{r}$ برابر است با:

$$\vec{u} = \vec{u_0}\cos(\vec{q}.\vec{r})$$

که در آن بردار $\vec{q}$ برداری ثابت است. با فرض اینکه الکترونها دارای جرم m و بار $-e$ و یونهای Na^+ ثابت باشند به علت ایجاد میدان الکتریکی ناشی از جابه جایی الکترونها نیرویی به الکترونها وارد می‌شود که باعث نوسان آنها خواهد شد. فرکانس این نوسان را پیدا کنید.

۲) رشته مایع امتحان قبل را در نظر بگیرید! که در آن فرض کرده بودیم در محور رشته ای باردار، مستقیم و بینهایت با قطر r_0 اختلالی به شکل مارپیچ با شعاع $R<<r_0$ وارد می‌شود. فرض کنید نیروی وکشسانی مایع قابل صرف نظر است و تنها نیرویی که با نیروی الکتریکی مقابله می‌کند نیروی کشش سطحی است.

بسمه تعالی شریعت پناه



با فرض اینکه انرژی پتانسیل کشش سطحی با رابطه $E = S\gamma$ داده شود که در آن S سطح رشته و γ ضریب کشش سطحی باشد نیروی کشش سطحی وارد بر جزء رشته به طول ΔL را محاسبه کنید.

حال فرض کنید نیروی الکتریکی وارد بر این جزء برابر مقدار زیر باشد:

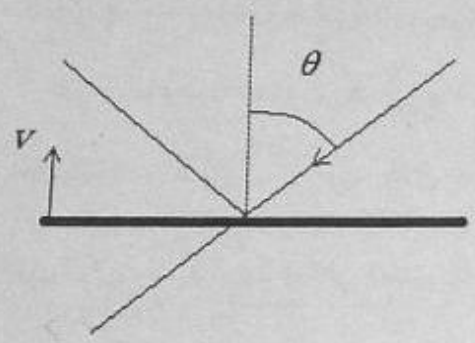
$$\Delta F_e = C\Delta LR[1 + \frac{r_0 K_1{}'(r_0/b)}{bK_1(r_0/b)}]$$

که در آن C یک مقدار ثابت و $K_1(x)$ و $K_1'(x)$ به ترتیب توابع بسل و مشتق آن می‌باشند. و فرض کنید برای تابعیت زمانی R داشته باشیم:

$$R = \mathcal{E} e^{\omega t}$$

که در آن ϵ و ω دو مقدار ثابت هستند. اگر چگالی مایع ρ باشد برای $R<<r_0$ مقدار ω را بر حسب پای پیچ مارپیچ محاسبه کنید و شرطی را بیابید که اختلال مارپیچ ایجاد شده رشد کند.

۳) اگر باریکه نوری با بسامد f با زاویه تابش θ به متوازی السطوح نازک ساکن برخورد کند با ضریب عبور فاضلی $T_0(f,\theta)$ عبور کرده و با ضریب بازتاب $R_0(f,\theta)$ بازتاب می گردد. تعریف ضریب بازتاب (عبور) نسبت توان نور بازتابی (عبوری) به توان نور فرودی است. فرض کنید جذب وجود ندارد، در نتیجه از قانون بقای انرژی خواهیم داشت:



$$R_0(f,\theta) + T_0(f,\theta) = 1$$

حال اگر این متوازی السطوح را با سرعت v (قابل مقایسه با سرعت نور) در جهت عمود بر سطح حرکت دهیم، ضریب بازتاب $R_v(f,\theta)$ و عبور $T_v(f,\theta)$ متوازی السطوح را بدست آورید. (راهنمایی: در دستگاه سکون جسم هم بسامد و هم زاویه فرود متفاوت است.)

آیا همچنین مجموع ضریب عبور و بازتاب ۱ است. اختلاف این مجموع با ۱ به چه معناست.

۴) فرض کنید که تمام رسانش گرمایی فلزات ناشی از الکترونهاست. برای مدل سازی رسانش گرمایی می توان فرض کرد زمان متوسط بین دو برخورد الکترون ثابت و برابر τ است. در یک میله با سطح مقطع A، دمایی وابسته به x ایجاد می کنیم. می توان فرض کرد که الکترونها در هر زمان τ (به طور متوسط) یک برخورد انجام می دهد و در هر برخورد الکترون با فلز در مکان برخورد همدما می شود. دقت کنید که خصوصیات الکترون تا برخورد بعدی حفظ می گردد.

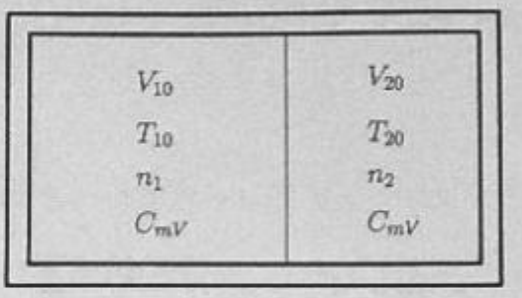
اسماعیل پور

الف) با توجه به اینکه چگالی الکترونها برابر n و ثابت است، مقدار متوسط انرژی که از مقطع میله در مکان x می گذرد را بدست آورده و از روی آن رسانندگی گرمایی فلز را تعیین کنید. در این مرحله میدان الکتریکی را در نمونه صفر در نظر بگیرید. اگر چگالی جریان گرمایی برابر باشد با $j_q = -K\nabla T$، به K رسانندگی گرمایی می گویند. (مساله از لحاظ هایی مشابه مدل درود است که در آن رسانندگی الکتریکی به صورت $\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m}$ به دست آمد.) اولین مرتبه غیر صفر رسانندگی گرمایی کافی است.

ب) در حالت فوق (میدان الکتریکی صفر)، متوسط جریان الکتریکی گذرنده از مکان x را (تا اولین مرتبه غیر صفر) حساب کنید. می دانیم که حرکت الکترونها از ناحیه گرم به ناحیه سرد باعث انباشته شدن الکترونها در ناحیهِ سرد می شود بنابراین اختلاف چگالی الکترونی در دو ناحیه سرد و گرم باعث ایجاد میدان الکتریکی در داخل میله فلزی می گردد و جریان الکتریکی (در خلاف جهت جریان ناشی از اختلاف دما) بوجود می آورد (انتظار می رود که بعد از تعادل، جریان کل میله صفر گردد). به این پدیده اثر سی بک می گویند. اگر میدان ناشی از اثر سی بک را بصورت $\vec{E} = Q\,\vec{\nabla}T$ نمایش دهیم که در آن $\vec{E}$ میدان الکتریکی، $\vec{\nabla}T$ شیب(گرادیان) دما و Q توان گرمایی است. میدان الکتریکی $\vec{E}$ چقدر باشد تا جریان الکتریکی فوق (ناشی از شیب دما) صفر گردد. توان گرمایی را بدست آورید.

راهنمایی: توجه داشته باشید که در کل مسئله مدار باز می باشد. در تمام این سوال می توانید، الکترونها را مانند گاز با مولکولهای تک اتمی در نظر بگیرید. در نتیجه در دمای T داریم: $\langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{3\,K_B T}{m}$

۵) مطابق شکل یک ظرف استوانه‌ای که جداره‌های آن عایق گرما است به وسیله‌ی دیواره‌ای سعادت که از جرم آن صرفنظر می‌کنیم به دو قسمت تقسیم شده است. دیواره می‌تواند بدون اصطکاک در طول استوانه بلغزد. دیواره دارای ضریب رسانش گرمایی کوچکی است به طوری که آهنگ انتقال گرما از یک طرف به طرف دیگر برابر $\dot{Q} = K\Delta T$ است که ΔT اختلاف دمای دو طرف دیواره و K ضریب ثابتی است. طرف چپ و راست به ترتیب دارای n_1 مول و n_2 مول گاز ایده‌آل یکسان با گرمای ویژه‌ی مولی C_{mV} است. در لحظه‌ی $t = 0$ که دیواره در حال تعادل مکانیکی است و حجم و دمای گازها V_{10}، V_{20}، T_{10} و T_{20} است، دیواره رها می‌شود. فرآیندها را ایستاوار فرض کنید.



آ) معادله‌ی حالت گاز دو را در لحظه‌ی دلخواه t بنویسید.

ب) قانون اول ترمودینامیک را برای گاز سمت چپ در لحظه‌ی دلخواه t بنویسید.

پ) معادله‌ی دیفرانسیلی برای $V_1(t)$، حجم گاز سمت چپ در لحظه‌ی دلخواه t بدست آورید.

ت) $V_1(t)$، $T_1(t)$ و $T_2(t)$ را بدست آورید.

ث) مختصات ترمودینامیکی گاز دو طرف را پس از رسیدن دو گاز به تعادل ترمودینامیکی محاسبه کنید.

ج) حداقل کار لازم برای این که پس از رسیدن دستگاه به تعادل ترمودینامیکی قسمت ث) آن را به حالت اولیه (حالت دستگاه در لحظه‌ی $t = 0$) بازگردانیم چقدر است اگر حداقل دمایی که در اختیار داریم منبعی با دمای T_0 باشد.

در صورتی نیاز: آنتروپی گاز ایده‌آل شامل N ذره در حجم V و دمای T برابر $S(N,T,V) = Nk(\ln \frac{n_Q(T)}{n} + 5/2)$ است که $n_Q(T) = (\frac{mkT}{2\pi\hbar^2})^{3/2}$، $n = N/V$ و m جرم یک ذره‌ی گاز است.