امتحان اول المپیاد فیزیک (دوره‌ی ۱۰ ام)

۸۳/۱۰/۱۴

وقت : ۳ ساعت

مسئله ۱:

ذره‌ای به جرم m در منظومه‌ی شمسی در نظر بگیرید. خورشید به این ذره نیروی $\vec{F}_G$ را وارد می‌کند.

$$\vec{F}_G = -G\frac{M_\odot m}{r^2}\hat{r}$$

در این جا G ثابت گرانش نیوتن، $M_\odot$ جرم خورشید، r فاصله‌ی ذره از مرکز خورشید، و $\hat{r}$ بردار یکه در امتداد از خورشید به ذره است.

نشان داده می‌شود که تابش خورشید بر این ذره نیرو وارد می‌کند، که دو بخش دارد

$$\vec{F}_{Rad} = \beta\frac{GM_\odot m}{r^2}\hat{r} \qquad (۷)$$

$$\vec{F}_{PR} = -\beta\frac{GM_\odot m}{r^2}\frac{1}{c}\left(v_r\hat{r} + \vec{v}\right)$$

در این جا β یک عدد بی‌بُعد و مثبت است که به چیزی، شکل، و اندازه‌ی ذره بستگی دارد؛ $\vec{v}$ سرعت ذره (نسبت به خورشید) است؛ v_r مؤلفه‌ی شعاعی سرعت ذره است؛ و c سرعت نور است.

ذره‌ای در نظر بگیرید با $0 < \beta < 1$. فرض کنید وضعیت آغازین چنان است که اگر $\vec{F}_{Rad}$ و $\vec{F}_{PR}$ هم نبودند، ذره بر دایره‌ای به شعاع r_0 دور خورشید می‌گشت. با وجود $\vec{F}_{Rad}$ و $\vec{F}_{PR}$ این مدار تغییر می‌کند. $r(t)$ را به دست آورید.

راهنمایی: تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای ذره ($\vec{L}$) را بررسی کنید. دقت کنید که $\vec{L}$ هم جهت دارد هم اندازه. مسیر را همواره دایره‌ای بگیرید که شعاع آن به کندی تغییر می‌کند. این تغییر را حساب کنید.

مسئله ۲

یک ذره به جرم m و بار q دور یک ذره‌ی ساکن به بار Q می‌گردد. ذره‌ی ساکن را ساکن بگیرید. مدار ذره‌ی اول دایره‌ای به شعاع r است. یک میدان مغناطیسی یکنواخت عمود بر صفحه‌ی مدار روشن می‌کنیم. این میدان به‌کندی از مقدار صفر زیاد می‌شود به مقدار نهایی کوچک B می‌رسد. پس از آن، میدان مغناطیسی ثابت می‌ماند. مدار ذره را طی کل این فرآیند دایره‌ای بگیرید. شعاع مدار در پایان کار را $r+\Delta r$، و سرعت ذره در پایان را $v+\Delta v$ بگیرید.

⑨

Δr و Δv را تا مرتبه‌ی یک نسبت به B و برحسب q، r، B، و m حساب کنید. حرکت ذره‌ی باردار در مدار را با یک مدار جریان ثابت معادل بگیرید و تغییر دوقطبی مغناطیسی این مدار طی این فرآیند را حساب کنید.

مسئله ۳

دو صفحه‌ی بی‌نهایت بزرگ باردار با چگالی سطحی $-Ze$ (بار صفحه‌ها منفی است) به صورت موازی و با فاصله‌ی L از یکدیگر درون مایعی با ضریب دی‌الکتریک k قرار دارند. درون این مایع یونهایی با بار e هست که باعث می‌شود کل مایع خنثی باشد. فرض کنید صفحه‌ها نسبت به یونها تراوا هستند.

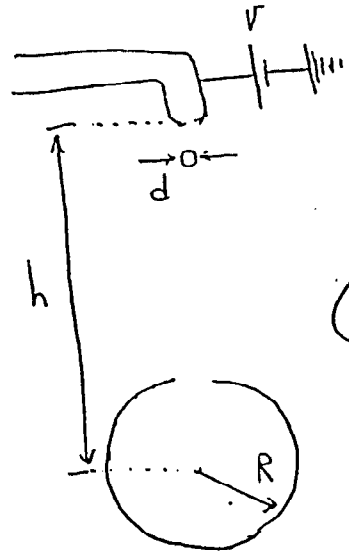
الف - پتانسیل الکتریکی را درحجاب یونها در تمام فضا بیابید و آن را ϕ_0 بنامید.

اگر دمای مایع T باشد، احتمال یافتن یونها در هر نقطه از فضا متناسب با e^{-E/k_BT} است که در آن E انرژی لازم برای آوردن یون تا آن نقطه است و k_B ثابت بولتزمن است.

ب - با کمک ϕ_0، و با فرض این که اثر یونها روی یکدیگر ناچیز است، توزیع چگالی یونها را در فضا بیابید. آن را n_0 بنامید. ($\frac{e^2}{K\epsilon_0 k_BT}$ را l_B (طول بیورم) می‌نامند و مقدار آن در آب حدود $7A^\circ$ است.)

ج - با در نظر گرفتن n_0 پتانسیل الکتریکی (ϕ_1) را در تمام فضا بیابید.

مسئله ۴



(۶)

یک دستگاه الکتروستاتیک مطابق شکل از یک ظرف کروی فلزی که از نظر الکتریکی عایق‌بندی شده و یک شیر آب تشکیل شده است. با چکیدن قطره‌ها از شیر آب، ظرف پُر می‌شود. شیر آب به پتانسیل V وصل شده و قطره‌ها کروی شکل با قطر d هستند. چگالی آب ρ است.

فرض می‌کنیم در هنگام چکیدن قطره‌ها در اثر بار سطحی‌شان پتانسیل V دارند. فاصلهٔ عمودی دهانهٔ شیر با مرکز ظرف کروی h است. در اثر انتقال بار قطره‌ها به ظرف ظرف فلزی باردار می‌شود. با افزایش بار کره نیروی دافعه بین ظرف و قطره‌های در حال چکیدن زیاد و حداکثر پتانسیل ظرف کروی را حساب کنید. فرض کنید ظرف به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد و در زمان رسیدن به بیشینه‌ی پتانسیل هنوز پُر نشده باشد. همچنین ارتفاع h را چنان بزرگ بگیرید که ظرف کروی، اثری روی پتانسیل شیر آب نداشته باشد.

فرض می‌کنیم قطره‌ها هنگام چکیدن پتانسیل V دارند، به این صورت که روی سطح آنها بار جمع شده است.

موفق باشید

بسمه تعالی

امتحان دوم المپیاد فیزیک (دوره‌ی ۱۰ ام)

۸۳/۱۱/۲۴

وقت :

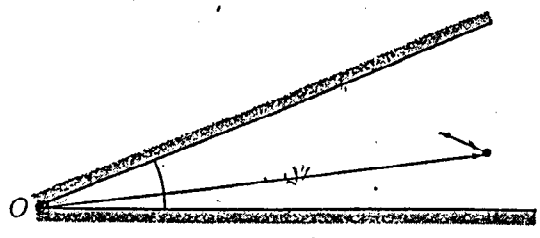
مسئله ۱

دره‌ای به جرم m تحت پتانسیل مرکزی $U(r) = -\frac{C}{r^3}$ بین دو صفحه حرکت می‌کند. r فاصله‌ی ذره تا نقطه‌ی O و C یک ثابت مثبت است. برخورد ذره با دیوارها کش‌سان است. ذره از نقطه‌ی R_0 و با سرعت اولیه‌ی v_0 بین دیوارها پرتاب می‌شود. فرض کنید $v_{0x} < 0$ وحرکت دوبعدی است. زاویه‌ی بین دیوارها α است.

الف) در این حرکت چه کمیت‌هایی بقا دارند.

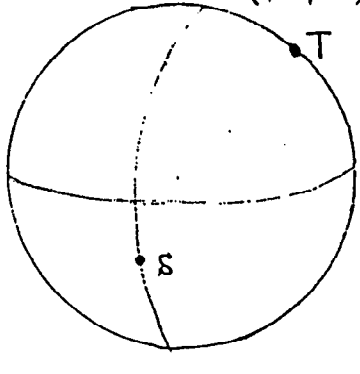
ب) چه قید یا قیدهایی روی v_0 و R_0 باشد تا ذره حتماً به مبداء برسد؟

ج) در صورتی که قید یا قیدهای بند ب برقرار باشد، ذره چند بار با دیوارها برخورد می‌کند؟



مسئله ۲

می‌خواهیم ماهواره‌ای از یک هدف عکس برداری کند. فرض کنید حداقل ارتفاع مجاز ماهواره نصف شعاع زمین و بیشترین ارتفاعی که عکس برداری ممکن باشد برابر شعاع زمین است. ماهواره در جهتی ثابت در مداری دایره‌ای که از روی دو قطب شمال و جنوب زمین می‌گذرد حرکت می‌کند. در لحظه‌ی $t=0$ این ماهواره از نقطه‌ی S با عرض جغرافیایی 30° جنوبی عبور می‌کند. هدف عکس برداری در نیم کره‌ی شمالی قرار دارد. عرض جغرافیایی هدف 60° شمالی و طول جغرافیایی آن 90° شرق نسبت به ماهواره در $t=0$ است. این هدف روی زمین است (نقطه‌ی T).

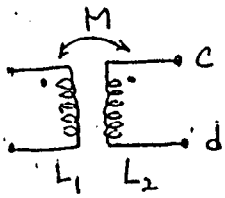


سرعت زاویه‌ای زمین را بیابید و شعاع زمین $R_E = 6400km$ و $g = 10 \frac{m}{s^2}$ در سطح زمین است. از روش زمین به دور خورشید در طی این مدت چشم بپوشید.

در عبورهای مختلف که ماهواره از بالای سر هدف می‌گذرد کمترین زمان ممکن چقدر است؟ در این حالت کمترین ارتفاع ممکن را به دست آورید.

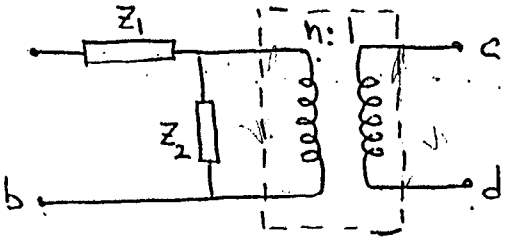
مسئله ۳

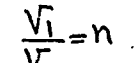
دو القاگر با خودالقایی‌های L_1 و L_2 و القای متقابل M را در نظر بگیرید.



(۲۵)

یک مدل برای این مجموعه به شکل زیر است. (یعنی رابطه‌ی ولتاژها و جریان‌های ورودی‌ی این مدل همان رابطه‌ی نظیر سیستم بالا است.)



که در آن  یک ترانسفورماتور ایده‌آل است و $\frac{V_1}{V_2} = n$.

عنصرهای Z_1 و Z_2 را به دست آورید. (راهنمایی: جریان‌ها و ولتاژها را سینوسی بگیرید.)

مسئلهٔ ۴

یک لولهٔ شیشه‌ای که تقریباً از جیوه پر شده، به انتهای یک آونگ میله‌ای آهنی به طول ۱۰۰ سانتی‌متر وصل شده است. ارتفاع جیوه در لولهٔ شیشه‌ای باید چه‌قدر باشد تا مرکز جرم این آونگ بر اثر تغییرات دما، بالا یا پائین نرود.

مساحت مقطع لوله با مساحت مقطع میلهٔ آهنی برابر است و از جرم شیشه صرف‌نظر کنید.

آهن: $\rho_{ir} = 7.87 \times 10^3 \ kg/m^3$ ، $\lambda_{ir} = 12 \times 10^{-6} / ^\circ C$

جیوه: $\rho_{Hg} = 13.6 \times 10^3 \ kg/m^3$ ، $\beta_{Hg} = 18 \times 10^{-5} / ^\circ C$

شیشه: $\lambda_{gl} = 9 \times 10^{-6} / ^\circ C$

مسئلهٔ ۵

دو کرهٔ کوچک توپُر با اندازه‌های مساوی، یکی از مس و دیگری از آلومینیوم را سیاه می‌کنیم و توسط نخ‌های ابریشمی در داخل یک حفرهٔ بزرگ از یک تطهیر در حال ذوب آویزان می‌کنیم. دمای اولیهٔ هرکدام ۳۰°C است. پس از مدتی، دمای کرهٔ آلومینیومی به ۱۰°C و دمای کرهٔ مسی به ۱۵°C می‌رسد.

نسبت گرمای ویژهٔ آلومینیوم به گرمای ویژهٔ مس چه‌قدر است؟

$\rho_{Al} = 2.7 \times 10^3 \ kg/m^3$

$\rho_{Cu} = 8.9 \times 10^3 \ kg/m^3$

۳۲

بسمه تعالی

استان سترم المپیاد فیزیک (دوره‌ی ۱۰ ام)

۸۳/۱۲/۵

وقت: ۳ ساعت

مسئله‌ی ۱ ـ $\int \ln(1-x^2)\,dx = x\ln(1-x^2) + \int \frac{2x^2}{1-x^2}\,dx$

الف ـ ذره‌ای مقید است بر سطح زمین روی یک نصف‌النهار، بدون اصطکاک حرکت کند. این ذره را از زاویه‌ای بسیار نزدیک به استوا رها می‌کنیم به طوری که سرعت اولیه‌ی آن نسبت به سطح زمین صفر باشد. این زاویه‌ی اولیه را در دستگاه کروی متصل به زمین θ_0 بگیرید. با فرض این که سرعت زاویه‌ای چرخش زمین به دور خود ω باشد (در راستای محور z) معادله‌ی حرکت آن را تا اولین مرتبه‌ی ناصفر نسبت به $\frac{\pi}{2} - \theta_0$ به دست آورید.

ب ـ حال فرض کنید ذره مقید نیست که روی یک نصف‌النهار حرکت کند اما بازهم مقید است که روی سطح زمین باقی بماند. معادله‌ی حرکت آن را با فرض این که از $\frac{\pi}{2} - \theta_0$ رها شود، تا اولین مرتبه‌ی ناصفر نسبت به $\frac{\pi}{2} - \theta_0$ به دست آورید. (منظور از معادله‌ی حرکت $\theta(t)$ و $\varphi(t)$ مختصات استاندارد کروی در دستگاه چسبیده به زمین هستند.)

ـ تذکر: سطح زمین را کروی فرض کنید.

مسئله‌ی ۲ ـ

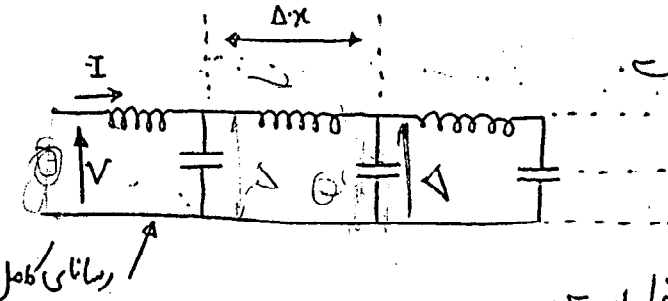
ماهواره‌ای به جرم m و به شکل مکعب به ضلع l در امتداد یکی از اضلاعش با سرعت v در فضا حرکت می‌کند. این فضا از گاز رقیقی به جرم مولکولی M و چگالی n در دمای T پر شده است. برخورد مولکول‌های گاز به دیواره‌ی ماهواره را کاملاً کشسان در نظر بگیرید و نیروی متقاوم در برابر حرکت ماهواره را به دست آورید. این نیرو را به ازای vهای کوچک $\left(\frac{Mv^2}{2kT} \ll 1\right)$ حساب کنید. در صورتی که هیچ نیروی خارجی دیگری موجود نباشد معادله‌ی حرکت ماهواره را بنویسید و حل کنید. چقدر طول می‌کشد تا سرعت ماهواره نصف سرعت اولیه‌ی آن بشود. این زمان به ازای $m = 10^3\,kg$ ، $M = 10^{-26}\,kg$ ، $l = 2m$ ، $n = 10^9/m^3$ و $T = 70\,K$ چقدر است.

$k = 1.38 \times 10^{-23}\,J/K$ ،

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \approx \frac{2x}{\sqrt{\pi}} & \text{اگر } x \ll 1 \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \approx 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}\,x} & \text{اگر } x \gg 1 \end{cases}$$

مسئله ۳

یک مدل برای یک خط انتقال مخابراتی به این شکل است.



هر خود القایی $l\Delta x$، و هر ظرفیت $C\Delta x$ است. Δx فاصله‌ی دو نقطه‌ی نزدیک به هم در طول خط است.

جریان (I) و ولتاژ (V) را تابع x و t بگیرید.

الف - معادله های تغییرات زمانی I و V را بنویسید (در حد $\Delta x \to 0$).

ب - یکی از متغیرهای I و V را حذف کنید و معادله‌ای برای فقط یک متغیر به دست آورید.

ج - دو خط انتقال، یکی با مشخصات l و c و دیگری با مشخصات l' و c' در نظر بگیرید. این دو خط به هم وصل شده‌اند. در اولی یک موج ولتاژ با بسامد زاویه‌ای ω منتشر می‌شود و به محل اتصال دو خط می‌رسد. نسبت دامنه‌ی موج بازتابیده به موج فرودی، و موج منتشر شده در خط دوم به موج فرودی را به دست آورید. هریک از این دو خط از یک طرف نامحدود است.

(۶)

د- دو سر دو خط انتقال یکسان با مشخصات l و c را به یک مقاومت R وصل می‌کنیم.

دوسر

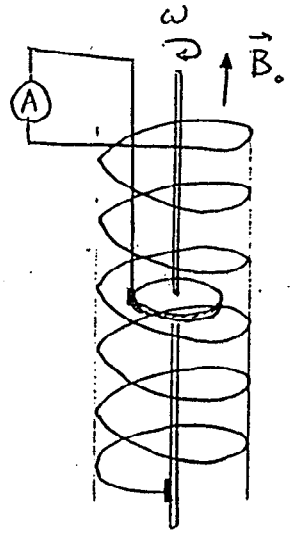
هریک از خط‌ها از یک طرف نامحدودند. یک موج ولتاژ با بسامد زاویه‌ای ω در یک خط منتشر می‌شود و به محل اتصال دو خط می‌رسد. نسبت دامنه‌ی موج بازتابیده به موج فرودی، و موج منتشره در خط دوم به موج فرودی را به دست آورید.

مسئلهٔ ۴

یک دیسک فلزی به شعاع r با اصطکاک ناچیز در داخل یک سیم‌لولهٔ طویل و مستقیم حول میل‌گردان موازی با محور تقارن سیم‌لوله دوران می‌کند. یک انتهای سیم‌لوله به لبهٔ دیسک و انتهای دیگر آن به میل‌گردان متصل است. مقاومت اهمی سیم‌لوله R و تعداد دورها در واحد طول n است. سیم‌لوله طوری قرار گرفته است که محور آن موازی با بردار میدان مغناطیسی زمین، $\vec{B}_0$، است. اگر دیسک با فرکانس زاویه‌ای ω بچرخد

الف - چه جریانی از آمپرمتر A می‌گذرد؟ این جریان را برحسب تابعی از ω برای هر دو جهت دوران ترسیم کنید.

ب - میدان مغناطیسی داخل سیم‌لوله را برحسب ω به دست آورید و آن را ترسیم کنید.



موفق باشید

بسمه تعالی

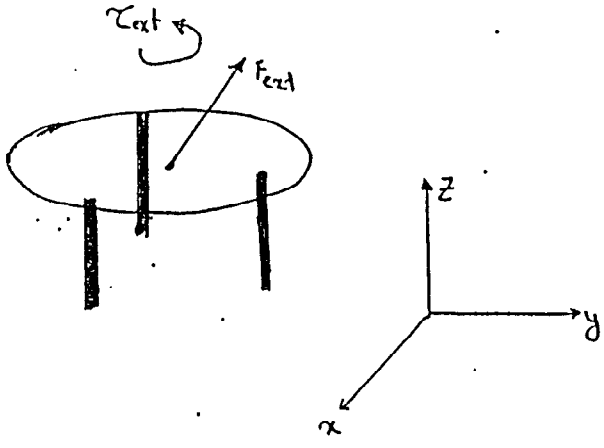
امتحان چهارم الیاد فیزیک (دوره‌ی ۱۰ ام)

۸۳/۱۲/۲۰

وقت : ۴ ساعت

مسئله‌ی ۱

سه پایه‌ای دایره‌ای شکل به شعاع $r=1$ و ارتفاع h در اختیار داریم. پایه‌ها به صورت متقارن روی این سه پایه نصب شده‌اند. این سه پایه روی سطحی با ضریب اصطکاک μ قرار دارد. می‌خواهیم با اعمال نیروی خارجی و گشتاور خارجی این سه پایه را به حرکت درآوریم.



نیرو را به مرکز دایره وارد می‌کنیم. نیرو را در صفحه‌ی (x,y) بگیرید و گشتاور را در جهت z.

مکان پایه‌ی iام را در $(r\cos\theta_i, r\sin\theta_i, 0)$ می‌گیریم به شکلی که $\theta_i = \theta_0 + \frac{2\pi}{3}(i-1)$

الف - فرض کنید سیستم در حال تعادل است. معادلات تعادل را بنویسید.

ب - فرض کنید $\theta_0 = 0$. نیروی عمودی سطح که بر هرکدام از پایه‌ها وارد می‌شود را حساب کنید.

به ازای $h=0$ جواب را ساده کنید. پس از این فرض کنید $h=0$.

نیروی اصطکاک وارد بر هر پایه (که در راستای افق است) را $\vec{f}_i$ بنامید. معادلات برای به دست آوردن این کمیت‌ها کم است. برای همین باید فرض‌های اضافه‌ای بکنیم. فرض کنید که سه پایه، کاملاً صلب است. در نتیجه در اثر نیرو و گشتاور، حداکثر حرکتی که می‌توانند بکنند، دوران حول نقطه‌ی مشخص $c=(c_x, c_y, 0)$ در راستای z است. در نتیجه نیروهای اصطکاک هم در خلاف همین جهت‌های حرکت بیشترین کمک را می‌کنند.

ج - معادله‌ی حاکم بر f_iها را با فرض بالا بازنویسی کنید.

د- در حالتی که $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ و $F_{ext} = F_x \hat{x}$ ، می‌توان نشان داد که $c = c_y \hat{y}$ جواب است.
با این فرض‌ها، جواب قسمت (ج) را ساده کنید.

وقتی جسم می‌خواهد شروع به لغزش کند، از آن جا که جسم را جلب فرض کرده‌ایم همه‌ی پایه‌ها باید بلغزند.
در نتیجه در این هنگام اندازه‌ی f_iها برابر با μN_i است.

هـ- در آستانه‌ی حرکت، F_x و $\tau_{ext.}$ را برحسب c_y بنویسید.

با حذف c_y، می‌توان به دست آورد که با τ_{ext} داده شده چه نیرویی باید وارد کرد که جسم حرکت کند.

و) در حالت‌هایی که F_x کمی از μmg کم‌تر است (یا τ_{ext} کمی از μmg کم‌تر است)، تا مرتبه‌ی دوم به دست آورید که چه لشتاور خارجی‌ای (یا چه نیروی خارجی‌ای) باید اعمال کنیم تا سه پایه شروع به حرکت کند.

مسئلهٔ ۲

الف - یک شاره و یک سطح فرضی در آن را در نظر بگیرید. ذره‌های شاره از یک طرف سطح به طرف دیگر آن می‌روند. آهنگ عبور ذره‌ها از این سطح (تعداد ذره‌ها بر واحد زمان) برابر است با αCA، که C غلظت (تعداد ذره‌ها بر واحد حجم)، A مساحت سطح، و α یک پارامتر ثابت است.

اگر غلظت شاره تابع مکان باشد، غلظتی که آهنگ عبور را تعیین می‌کند، به‌طور مؤثر غلظت در فاصله‌ی λ از صفحه است.

فرض کنید غلظت شاره تابع کند تغییری از مکان است. رابطه‌ی چگالی جریان (تعداد ذره‌ها بر واحد زمان بر واحد سطح) برحسب تغییرات چگالی را به دست آورید.

ب - یک باکتری در استخر آبی که در آب آن اکسیژن (O_2) با غلظت c_0 محلول است قرار گرفته. این باکتری برای حیات خود نیاز به مصرف اکسیژن دارد. این باکتری را با کره‌ای به شعاع R مدل سازی کنید که تمام اکسیژن در سطح خارجی خود را مصرف می‌کند. در نتیجه در حالت پایا $C(R)=0$ و غلظت اکسیژن در نقاط دور از باکتری $C(\infty)=c_0$ است.

غلظت اکسیژن در حالت پایا را در فضا، $C(r)$، و همچنین مقدار اکسیژنی که باکتری در واحد زمان مصرف می‌کند را بیابید.

مسئلهٔ ۳

یک گاز کامل در ناحیه‌ی $z>0$ است. صفحه‌ی $z=0$ یک صفحه‌ی رسانا است که چگالی سطحی بار آن در طرف گاز σ است. گاز در یک میدان گرانشی یکنواخت با شتاب $\vec{g}=-g\hat{z}$ است. پذیرفتاری الکتریکی این گاز $\chi=\alpha\rho$ است، که ρ چگالی جرمی گاز و α ثابت است. میدان الکتریکی درون گاز را $\vec{E}=E(z)\hat{z}$ بگیرید.

رابطه‌ی فشار گاز (P) با چگالی گاز $P=gL\rho$ است، که L یک مقدار ثابت است.

الف - E را برحسب ρ به دست آورید.

ب - نیروی الکتریکی بر واحد حجم گاز را برحسب ρ به دست آورید.

ج - رابطه‌ی تعادل نیروها را به شکل یک معادله‌ی دیفرانسیل برای ρ بنویسید.

د - معادله‌ی ج را حل کنید و رابطه‌ای بین ρ، ρ_0، g، و پارامترهای مسئله بیابید. ρ چگالی در $z=0$ است.

هـ - با فرض کوچک بودن σ، ρ برحسب z را تا اولین مرتبه‌ی غیرصفر نسبت به σ بیابید.

مسئله ۴ ← دیود ایده‌آل

در این مسئله می‌خواهیم رفتار لحظه‌ای و پایدار یک نوع مدار یکسوکننده را بررسی کنیم.

یک دیود ایده‌آل، عنصری است با منحنی I-V روبرو (شکل ۱). یک دیود واقعی را می‌توان با مداری مشابه شکل 2 مدل‌سازی کرد.

الف - منحنی I-V مدار شکل 2 را به‌دست آورید.

با استفاده از این دیود واقعی، مداری یکسوکننده درست می‌کنیم (شکل 3).

ورودی مدار ($v_s(t)$) در شکل 4 نشان داده شده است.

ب - ولتاژ خازن را قبل از شروع سیکل nام، v_n می‌نامیم.

رابطه‌ای بیان v_{n+1} و v_n را به‌دست آورید.

ج - اگر ولتاژ اولیه‌ی خازن v_0 باشد، v_n را به‌صورت صریح به‌دست آورید.

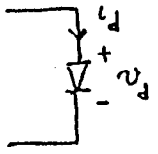
د - حالت پایای مدار را به‌صورت تابعی از زمان به‌دست آورید و نمودار

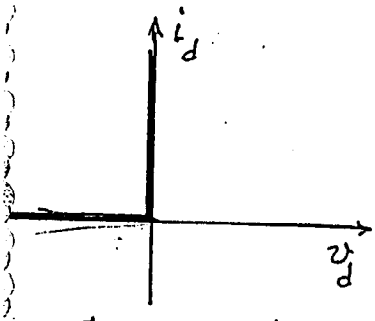
تغییرات v_n برحسب n را برای $v_0 > V_0$ ، $v_0 < V_0$ و $v_0 = V_0$

رسم کنید.

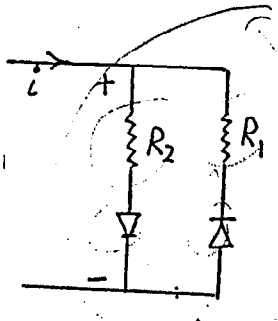
هـ - اگر فرکانس ورودی بسیار زیاد شود درحالی‌که کل زمان آزمایش $2nT$ محدود بماند، $v_c(t)$ را به‌دست آورید.

و - نشان دهید که می‌توان درحد فرکانس بی‌نهایت، مداری با عناصر خطی را جایگزین مدار شکل 3 کرد. این مدار را رسم کنید و پارامترهای آن را به‌دست آورید.

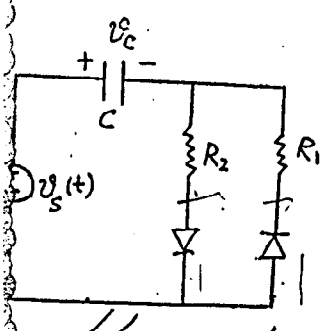




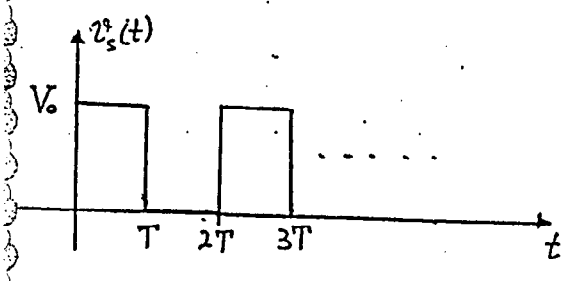
شکل ۱ - دیود ایده‌آل



شکل 2 - مدل دیود واقعی



شکل 3 - مدار یکسوکننده



شکل 4 - ورودی v_s (تکرارشونده)

موفق باشید

بسمه تعالی

امتحان پنجم المپیاد فیزیک (دوره‌ی ۱۰ ام)

۲۸ ار ۸۴

وقت: ۴ ساعت

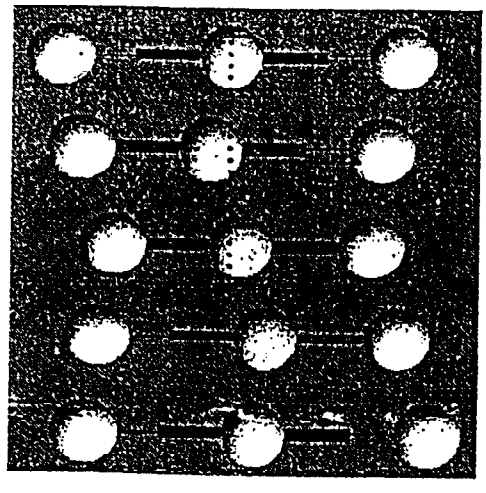
مسئله ۱

اگر به جسمی در یک شاره‌ی گران رو (مانند عسل) نیروی خارجی F وارد شود، آن جسم در اثر اعمال این نیرو به حرکت درمی‌آید ولی شتاب نمی‌گیرد، بلکه سرعت آن (V) همواره متناسب با نیرو است (مایع غیرنیوتنی)

$$F = \xi V$$

که ξ ضریب اصطکاک گران روی نامیده می‌شود. این امر باعث می‌شود که شنا کردن در چنین شاره‌ای با روشهایی که می‌شناسیم امکان پذیر نباشد.

در سال 2004 نجف و طهماسبیان ساده‌ترین مدل شناگر را برای یک شناگر در شاره‌ی گران رو پیشنهاد کردند [Physical Review E69(2004)]. در این مدل شناگر از 3 گوی همشعاع متصل به دو بازو با قابلیت انبساط و انقباض (مطابق شکل) تشکیل شده است.



طول بازوها در حالت منبسط L و در حالت منقبض $L-e$ است. حرکت دوره‌ای این شناگر با انقباض بازوی چپ، انقباض بازوی راست، انبساط بازوی چپ و نهایتاً انبساط بازوی راست کامل می‌شود. فرض کنید که ضریب اصطکاک گران روی برای هریک از گوله‌ها وقتی که از هم دورهستند (بازوی رابط منبسط است) یا در جهت مخالف حرکت می‌کند مستقل از حرکت بقیه و برابر ξ است، ولی وقتی که دو گوله به یکدیگر نزدیک هستند (بازوی رابط منقضض است) و در یک جهت حرکت می‌کنند ضریب اصطکاک گران روی برابر مجموعه آن دو 2ξ است. در ضمن فرض کنید که انقباض و انبساط بازوها با سرعت یکنواخت u صورت می‌گیرد.

الف- مقدار جابه‌جایی گوله‌ی مرکزی را در هریک از مراحل چهارگانه‌ی این حرکت محاسبه کنید.

ب- جابه‌جایی شناگر در یک دوره‌ی کامل این حرکت تناوبی را به دست آورید.

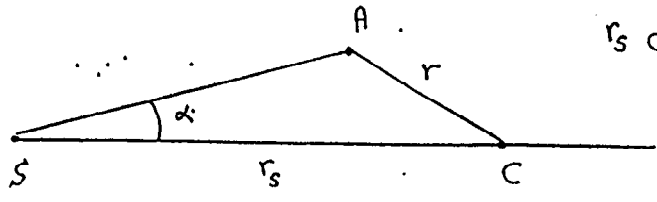
۳۷

مسئله‌ی ۲

کهکشان راه‌شیری تقریباً به شکل کیک فرض است که در آن ستاره‌ها به دور مرکز کهکشان می‌گردند. فرض کنید همه‌ی ستاره‌ها در یک صفحه‌اند، و بر مسیرهایی دایره‌ای می‌گردند.
چون تراکم جرم در مرکز کهکشان بیش‌تر است، سرعت زاویه‌ای ستاره‌ها تابعی نزولی از r (فاصله از مرکز کهکشان) است.

با مطالعه‌ی طیف نور ستاره‌ها می‌توان مؤلفه‌ی شعاعی سرعت نسبی ستاره نسبت به خورشید را به دست آورد. (منظور از مؤلفه‌ی شعاعی، مؤلفه در جهت خط واصل خورشید به ستاره است.)

در شکل، C مرکز کهکشان و S خورشید است.
ستاره‌ی A در فاصله‌ی r از مرکز کهکشان است. فاصله‌ی خورشید از مرکز کهکشان r_S است. α زاویه‌ای است که در شکل مشخص شده.



$v(r,\alpha)$ مؤلفه‌ی شعاعی (در جهت $\overrightarrow{AS}$) سرعت A نسبت به خورشید است.

الف) $v(r,\alpha)$ را برحسب $\dot\theta(r)$، $\dot\theta(r_S)$، r، r_S، و α به دست آورید.

ب) کدام ستاره‌های کهکشان به نظر می‌رسد که به طرف ما می‌آیند و کدام‌ها به نظر می‌رسد که از ما دور می‌شوند. با شکل مشخص کنید.

توضیح: در ۱۹۲۷، اُرت (Oort) منجم هلندی، با تحلیل طیف ستاره‌ها برمبنای جواب این مسئله نشان داد که $\dot\theta(r)$ واقعاً یک تابع نزولی است.

مسئله ۳

یک موج الکترومغناطیسی از هوا ($\epsilon = \epsilon_0$) بر یک رسانا فرود می‌آید. مرز هوا با رسانا صفحه‌ی $z=0$ است.

بردار موج در هوا $\vec{k}_0 = k_0(\hat{x}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta)$ است.

میدان مغناطیسی موج فرودی به شکل $B_0\hat{y}\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ است، که B_0 ثابت است. میدان مغناطیسی موج بازتابیده را $B'\hat{y}\,e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)}$، و میدان مغناطیسی موج انتقال‌یافته را $B\hat{y}\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ بنامید.

برای رسانا بنامید $\epsilon = \epsilon_0(1+\chi)$، که $\chi = \frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega}$.

الف - k_x و k_z را برحسب k_0، θ و χ حساب کنید.

ب - E_x و E_z را برحسب B و پارامترهای معلوم حساب کنید.

ج - $\frac{B}{B_0}$ را برحسب χ، θ حساب کنید.

د - فرض کنید $|\chi| \gg 1$. $\frac{B}{B_0}$ را در حد $\chi \to \infty$ ساده کنید. تقریب اول برای این نتیجه را هم پیدا کنید و اندازه‌ی $\frac{B}{B_0}$ و زاویه‌ی $\frac{B}{B_0}$ را بیابید. نتیجه را برحسب k_0، δ، و θ بنویسید که

$$\delta = \sqrt{\frac{2c^2\epsilon_0}{\sigma\omega}}$$

مسئله ۴

حجمی به حجم V محتوی یک گاز کامل به جرم مولکولی M در دمای T، به وسیله‌ی یک دیواره به دو قسمت مساوی تقسیم شده است. فشار طرف چپ در ابتدا P_{10} و فشار طرف راست در ابتدا P_{20} است، در دیواره سوراخ کوچکی به مساحت A ایجاد می‌کنیم و گاز هر طرف در طرف دیگر پخش می‌شود.

تغییر آنتروپی کل مجموعه بعد از برقراری تعادل نهایی نسبت به موقعی که دیواره سوراخ نشده بود چقدر است؟

(۶)

مسئله ۵

حجمی به سطح A توسط دیواره‌ای به دو بخش تقسیم شده است. چگالی (مول بر حجم) در طرفین دیواره ρ_1 و ρ_2 است. برای سیستم‌های با دمای ثابت نیرو برابر با $-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_T$ است که در آن F انرژی آزاد است.

نیروی وارد بر دیواره را از این روش به دست آورید.

موفق باشید.

بسمه تعالی

۸۴/۲/۸

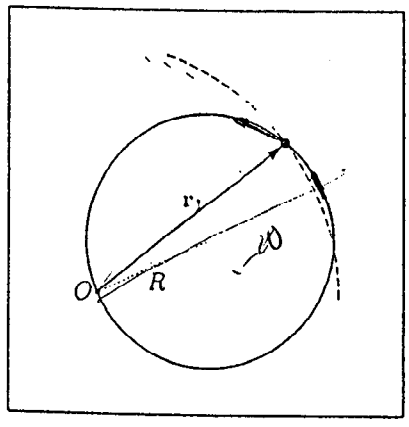
امتحان ششم المپیاد فیزیک (دوره‌ی ۱۰ام)

وقت: ۳ ساعت

۱ـ ذره‌ای به جرم m در مسیری دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند. این ذره تحت اثر نیروی مرکزی‌ی $F(r)$، که r فاصله از مرکز نیرو در O است، قرار دارد. تکانه زاویه‌ای‌ی ذره l_0 است.

الف— نیروی $F(r)$ را بر حسب l_0، R، m، و r به دست آورید.

ب— وقتی ذره به فاصله‌ی r_1 از O می‌رسد، ضربه‌ای به آن وارد می‌شود. مقدار ضربه و جهت آن نسبت به بردار مکان ذره چه‌قدر باشد تا ذره در مسیری دایره‌ای به شعاع r_1 حول O به حرکتش ادامه دهد؟



۶

$\pi - 2\theta$

۳۹

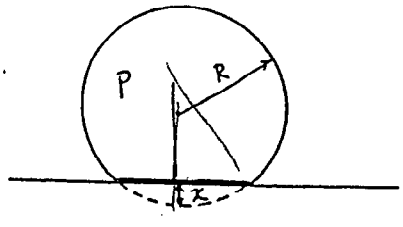
۲- یک لوله ي نازک را به‌طور ـ عمودی در یک ظرف ـ بزرگ از یک مایع فرو می‌کنیم. چگالی ي مایع ρ_L، چگالی ي بخار ـ اشباع ـ آن ρ_V، فشار ـ بخار ـ اشباع ـ آن P_0، شعاع ـ لوله r، کشش ـ سطحی ي مایع τ، چسبنده‌گی ي مایع با لوله θ، و شتاب ـ گرانش g است.

a ارتفاع ی که مایع در لوله بالا می‌رود (نسبت به سطح ـ مایع درون ـ ظرف) را حساب کنید.

b سطح ـ آزاد ـ مایع درون ـ لوله بخش ی از یک کره است. شعاع ـ این کره را حساب کنید.

c فشار ـ بخار در سطح ـ مایع ـ درون ـ لوله را بر حسب ـ نتیجه ي b و داده‌ها ي مسئله جز شعاع ـ لوله حساب کنید.

۳- یک توپ لاستیکی به جرم M که با گازی به فشار P پرشده است، شعاع R دارد. این توپ را از ارتفاع H رها می‌کنیم. خاصیت برخورد توپ با زمین را به این شکل مدل سازی می‌کنیم که فرض می‌کنیم قسمتی از توپ که با زمین برخورد می‌کند شکل زمین را به خود می‌گیرد (تخت). با فرض کوچک بودن این فرورفتگی از تغییر فشار گاز داخل توپ و شعاع آن صرفه‌نظر کنید. هم‌چنین از نیروهای وارد بر لبه‌ی خمیدگی صرفه‌نظر کنید.



الف - نیروی وارد بر توپ از طرف سطح زمین را وقتی که توپ به اندازه‌ی x فرو رفته است برحسب فشار توپ بنویسید.

ب - ضربه‌ی وارد بر توپ به‌وسیله‌ی این نیرو را تا لحظه‌ی توقف توپ به‌دست آورده و مقدار بیشینه‌ی فرورفتگی (x_m) را حساب کنید.

موفق باشید

وقت: ۵ ساعت

۱ــ در دو سر یك فنر ایده ال با ثابت فنر K و جرم ناچیز، دو جسم که جرم هر کدام از آنها M است متصل است. این مجموعه در حالتی که فنر دارای طول آزادِ خود، L، است و نوسان هم ندارد از ارتفاع H (ارتفاع مرکز جرم) به شکل عمودی رها میشود.

الف - اگر برخورد جسم پایینی با زمین یك برخورد **کاملا غیر کشسان** باشد. این مجموعه در بازگشت تا چه ارتفاعی بالا خواهد آمد (مرکز جرم).

ب ــ اگر برخورد جسم پایینی با زمین یك برخورد **کاملا کشسان** باشد،

ب1- نشان دهید که در یك برخوردِ این مجموعه با زمین، جسم پایینی حداقل دو بار با زمین برخورد میکند. (منظور از یك برخورد مجموعه با زمین یك بار "حرکت به سمت پایین و برگشت" است.)

ب2- چه رابطه ای باید بین کمیت های داده شده در این مسئله برقرار باشد که در هنگام برخوردِ دوم. جسم پایینی با زمین، دو جسم نسبت به هم ساکن باشند.

در این مسئله فرض کنید که راستای قرار گرفتن فنر و تمام حرکتها همواره عمودی اند (حرکت یك بعدی). شتاب گرانش g است و همچنین از اصطکاك ها صرف نظر کنید.

۲- در تسونوی ای که چند ماه پیش رخ داد، گفته شد که جزیره‌ی سوماترای اندونزی، به اندازه‌ی یک کیلومتر جابه جا شد و این جابه‌جایی باعث شد که محور دوران زمین کمی منحرف شود و طول شبانه روز نیز عوض شود.

فرض کنید که ابعاد این جزیره $10\,km \times 100\,km \times 1000\,km$ باشد. ماتریس لختی دورانی زمین را هم به صورت $\begin{pmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{pmatrix}$ بنویسید. محور z منطبق با محور دوران زمین است. شعاع استوایی زمین تقریباً 20km بیشتر از شعاع قطبی آن است.

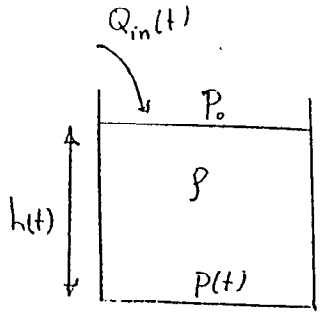
(۹)

الف - تخمینی برای I_1 ، I_0 و $\frac{I_1 - I_0}{I_1}$ به دست آورید.

ب - جزیره‌ی سوماترای اندونزی تقریباً روی استوا است. فرض کنید جزیره کاملاً به سمت جنوب حرکت کرده باشد. ماتریس لختی دورانی جدید را حساب کنید.

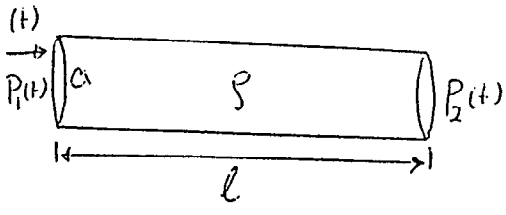
ج - چون نیروها داخلی است، تکانه‌ی زاویه‌ای کل ثابت می‌ماند. پس از این جابه‌جایی، بردار سرعت زاویه‌ای را بیابید و حرکت آن را نسبت به زمین توصیف کنید. طول شبانه روز چه قدر عوض می‌شود. فرض کنید قبل از جابه‌جایی، سرعت زاویه‌ای کاملاً در راستای محور ستوم است.

۳-



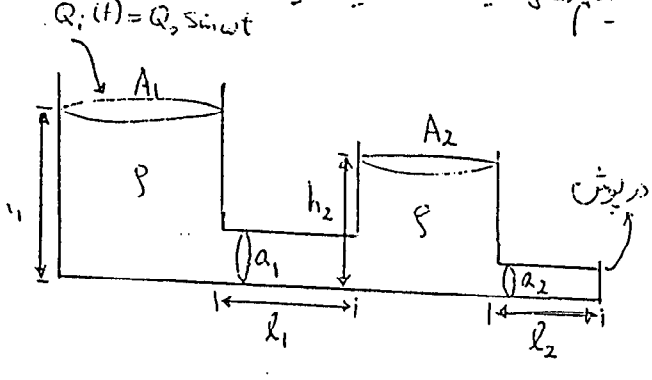
الف - فرض به مقطع A و ارتفاع $h(t)$ در نظر بگیرید.
$p(t)$ فشار در کف ظرف و P_0 فشار هواست.
رابطه‌ای بین $Q_{in}(t)$ (دبی آب ورودی) و $\Delta P(t) = P(t) - P_0$ بنویسید.

ب - لوله‌ای مطابق شکل روبه‌رو به مقطع a و طول ℓ در نظر بگیرید. سیال را تراکم ناپذیر فرض کنید.
$\Delta P(t) = P_1(t) - P_2(t)$ را برحسب $Q(t)$ و سایر پارامترهای مسئله بنویسید.



ج - با در نظر گرفتن چند فرض کنید که به عبارتی که برای $\Delta P(t)$ در قسمت ب به دست آورده‌اید جمله $\alpha Q(t)$ اضافه می‌شود:
با توجه به شباهت بین عناصر الکتریکی (سلف، خازن و مقاومت) و عناصر ذکر شده، معادل الکتریکی عناصر بالا را به دست آورید. (یعنی L، C و R را برای سیستم‌های سیالاتی تعریف کنید.)

د - در شکل روبه‌رو با توجه به مدار معادل الکتریکی که برای سیستم به دست می‌آورید، مقدار $h_2(t)$ را برحسب زمان در حالت دائمی پیدا کنید.



۴- جریان متناوب $I = I_0 \sin \omega t$ از سیم لوله‌ای می‌گذرد. حلقه‌ای با خودالقایی L و مقاومت R در نظر بگیرید که در مقابل سیم لوله قرار دارد. ضریب القایی متقابل بین حلقه و سیم لوله M باشد.

الف - جریان القایی در حلقه، I'، را برحسب زمان به دست آورید.

ب - فرض کنید نیروی بین حلقه و سیم لوله به صورت $F = \alpha I I'$ است که در آن α مستقل از زمان است. این نیرو را بیابید و مقدار متوسط زمانی آن را به دست آورید. این نیرو جاذبه است یا دافعه؟

۵-

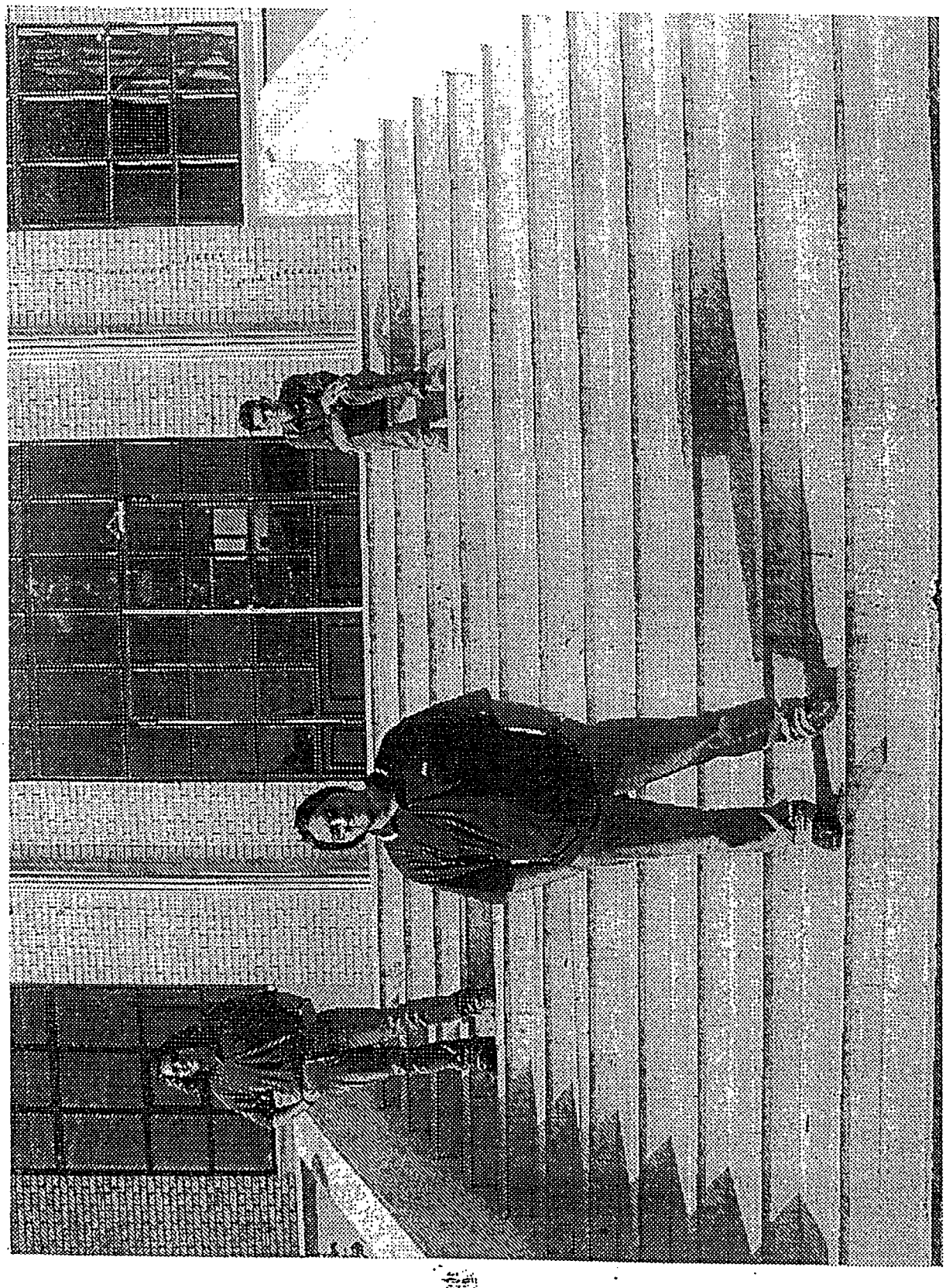
الف - فرض کنید دو ناظر S و S' داریم که S' با سرعت v در راستای محور x نسبت به S حرکت می‌کند. فرض کنید پرتو نوری با زاویه‌ی θ از دید S نسبت به محور x تابیده می‌شود. زاویه‌ی θ' که این پرتو از دید S' با محور x می‌سازد را به دست آورید. (راهنمایی: رابطه‌ای بین $\frac{\theta'}{2}$ و $\frac{\theta}{2}$ را به دست آورید.)

ب - فرض کنید ذره‌ای با ویژه شتاب ثابت α حرکت می‌کند به طوری که در دستگاه S در $t=0$ سرعت ذره صفر است و ویژه شتاب آن در راستای مثبت محور x است. سرعت و مکان ذره را برحسب زمان از دید S بیابید.

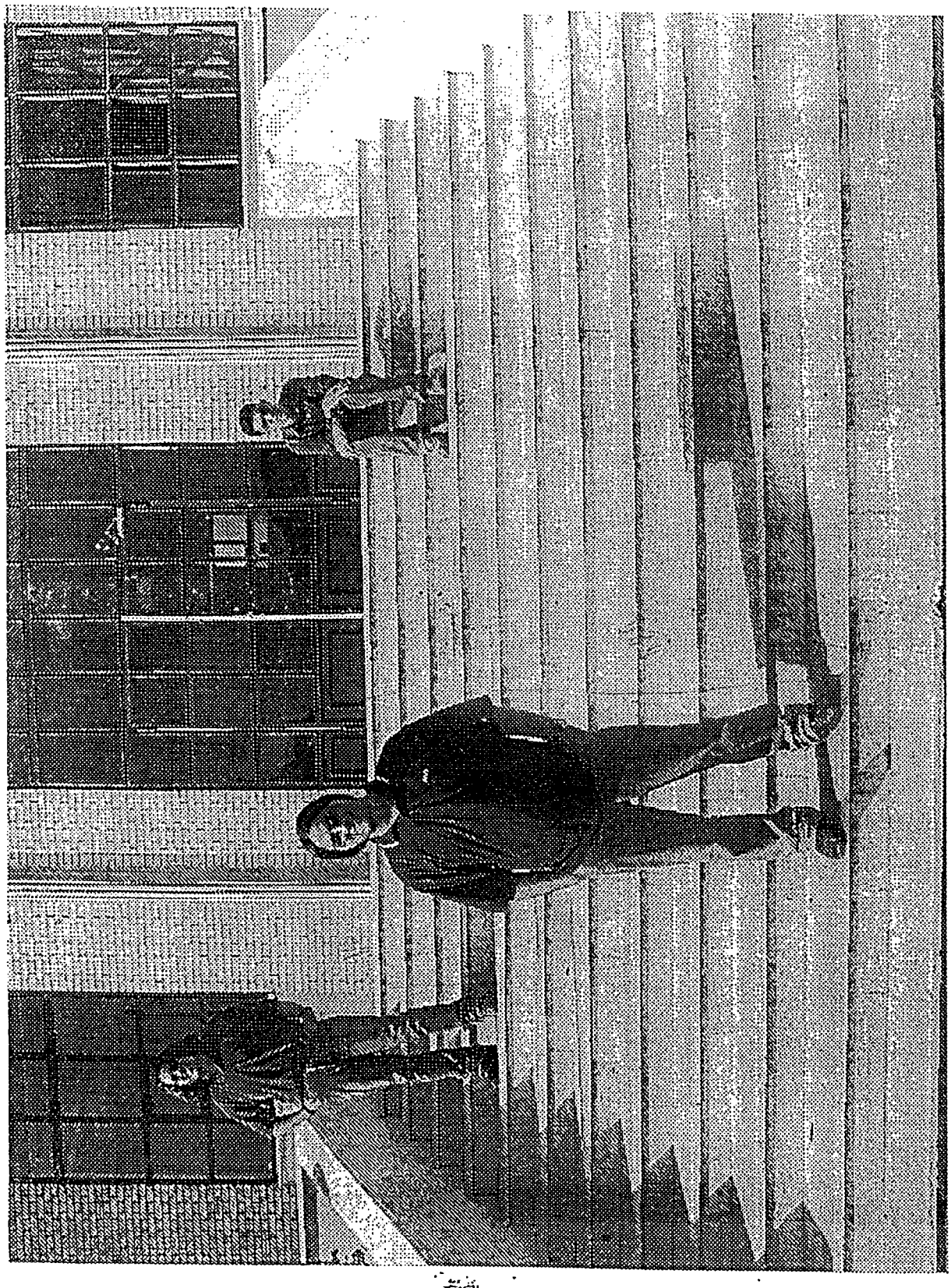
ج - فرض کنید موشکی با ویژه شتاب ثابت α شروع به دور شدن از سطح زمین به صورت شعاعی می‌کند. زاویه‌ای که موشک زمین را با آن می‌بیند به دست آورده و مقدار آن را در حد $t \to \infty$ (ویژه زمان موشک بی‌نهایت است) به دست آورید. (توجه: جواب حدی مسئله را می‌خواهیم. در نتیجه فرض کنید فاصله از سطح زمین مساوی فاصله از مرکز زمین است.)

* ویژه شتاب، شتاب در دستگاه همراه آنی ذره است.

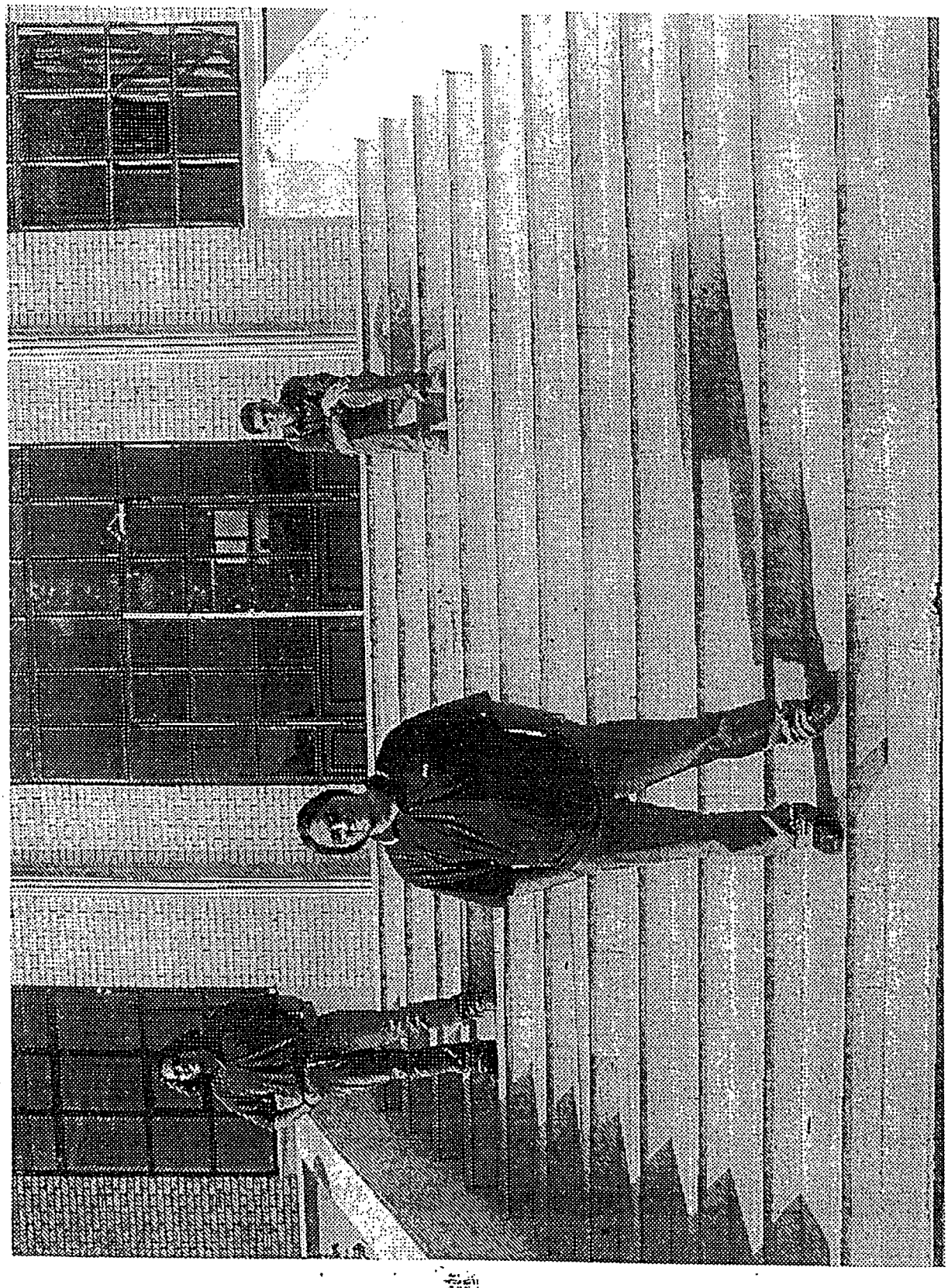
۶- در این تصویر فاصله ي عکاس (دوربین عکاسي) را از پایین ترین پله ي تصویر تخمین بزنید. روش محاسبه و مفروضات خود را شرح دهید.



۶- در این تصویر فاصله ي عکاس (دوربین عکاسی) را از پایین ترین پله ي تصویر تخمین بزنید. روش محاسبه و مفروضات خود را شرح دهید.



۶- در این تصویر فاصله ي عکاس (دوربین عکاسي) را از پایین ترین پله ي تصویر تخمین بزنید. روش محاسبه و مفروضات خود را شرح دهید.



تنها با $(\theta^{(n)}, v_\theta^{(n)})$ نمایش داد. رابطه‌ای که در بند قبل به دست آوردید، یک رابطه‌ی خطّی است. بنابراین می‌توانیم از نمایشی ماتریسی برای نشان دادن تحوّل سیستم استفاده کنیم:

$$S_{n+1} = QS_n \qquad (1)$$

که در آن Q، یک ماتریس ۲ × ۲ است.

پ) مؤلّفه‌های ماتریس Q را با توجه به نتیجه‌ی بند ب، به دست آورید. چه شرطی باید روی Q باشد تا حالت سیستم تناوبی N مرحله‌ی داشته باشد؟

ت) می‌توان نشان داد که ماتریس‌هایی مثل U و D وجود دارند که Q را به صورت زیر تجزیه می‌کنند:

$$Q = U^{-1}DU \qquad (2)$$

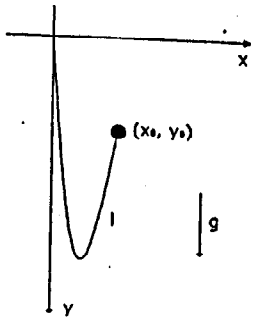
که در آن D قطری و عناصر قطری آن، مقادیر ویژه‌ی Q است.

ث) نشان دهید که $Q^N = U^{-1}D^NU$.

ج) چه شرطی باید روی v_0 باشد تا حرکتی نوسانی با N برخورد داشته باشیم؟

راهنمایی: معادله‌ی $x^N = 1$ دارای N ریشه‌ی متمایز زیر است:

$$\omega_k = \exp\frac{2k\pi}{N}\,,\quad k = 0, 1, \ldots, (N-1) \qquad (3)$$



شکل ۲

۸- ظرف ی شامل ـ یک مایع است. عمق ـ شاره در مقایسه با طول و عرض ـ این ظرف بسیار کوچک است. می‌خواهیم رابطه ي پاشنده‌گی ي امواج ـ کم‌دامنه ي سطح ـ این مایع را به دست آوریم. این امواج ناشی از گرانش و کشش ـ سطحی اند. راستا ي عمود بر سطح ـ مایع (در حالت ـ تعادل) را راستا ي z بگیرید. تابع ـ موج $Z(\mathrm{r},t)$ است، که Z جابه‌جایی ي (عمودی ي) سطح ـ مایع نسبت به حالت ـ تعادل، r بردار ـ مکان ـ دوبُعدی در سطح ـ مایع، و t زمان است. چگالی ي مایع ρ، کشش ـ سطحی ي مایع τ، و شتاب ـ گرانش g است.

a انرژی ي پتانسیل ـ گرانشی را به شکل ـ یک انتگرال ـ دوبُعدی بنویسید.

b انرژی ي ناشی از کشش ـ سطحی را به شکل ـ یک انتگرال ـ دوبُعدی بنویسید.

راه‌نمایی: $\vec{\mathrm{dS}} = \left(1, 0, \frac{\partial Z}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial Z}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

c Z و مشتقات ـ آن را کوچک بگیرید و نتیجه ي b را تا اول‌ین جمله ي غیرصفر نسبت به حالت ـ تعادل بنویسید.

موج ی به شکل ـ $Z(\mathrm{r},t) = a\cos(\mathrm{k}\cdot\mathrm{r} - \omega t)$ در نظر بگیرید. ω بس‌آمد ـ زاویه‌ای و k بردار ـ موج است، و فرض می‌کنیم طول‌موج نسبت به طول و عرض ـ ظرف بسیار کوچک است. نشان داده می‌شود متناظر با این موج، چگالی ي سطحی ي متوسط ـ انرژی ي جنبشی برا ي امواج ـ کم‌دامنه برابر است با

$$\frac{\rho\omega^2 a^2 \coth k L}{4k},$$

که L عمق ـ مایع است.

d رابطه ي پاشنده‌گی (برا ي موج‌ها ي کم‌دامنه) را به دست آورید.

۹ـ یک قطره به شعاع r از یک شاره را در نظر بگیرید. فشار ـ بخار ـ تعادل برا ي این قطره $p(r) = p_0 + (\alpha/r)$ است، که p_0 و α ثابت اند (فقط به دما بستهگی دارند). اگر فشار ـ بخار p و اختلاف ـ p با $p(r)$ کوچک باشد، آن‌گاه آهنگ ـ ورود ـ بخار به قطره (جرم بر زمان بر سطح) $\beta[p - p(r)]$ است، که β ثابت است.

دو قطره از یک نوع مایع را در نظر بگیرید، که شعاع‌ها پشان r_1 و r_2 است. این دوقطره در ظرف ی به حجم ـ V اند، که V خیل ی بزرگ‌تر از حجم ـ قطره‌ها است. فشار ـ بخار ـ این مایع در آن ظرف p است. جزم ـ مُلی ي مایع را M و دما را T بگیرید. (این دوکمیت ثابت اند.)

a $(\mathrm{d}p/\mathrm{d}t)$ را بر حسب ـ $(\mathrm{d}r_1/\mathrm{d}t)$ و $(\mathrm{d}r_2/\mathrm{d}t)$ بنویسید.

b فرض کنید $r_1 = r_2 = r_e$ و $p = p_e$ یک نقطه ي تعادل است. r_1 و r_2 و p را حول ـ این مقدارها ي تعادل بسط دهید و معادله‌ها ي دیفرانسیل ـ خطی‌شده ي $x_1 := r_1 - r_e$ و $x_2 := r_2 - r_e$ را بنویسید (که شامل ـ p نباشد).

c متغیرها ي $x := x_1 - x_2$ و $y := x_1 + x_2$ را در نظر بگیرید و معادله‌ها را بر حسب ـ این متغیرها بنویسید.

d در معادله ي مربوط به x، نقطه ي تعادل ـ $x = 0$ پای‌دار است یا ناپای‌دار؟ بر حسب ـ پارامترها بحث کنید.

e در معادله ي مربوط به y، نقطه ي تعادل ـ $y = 0$ پای‌دار است یا ناپای‌دار؟ بر حسب ـ پارامترها بحث کنید.

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (دوره‌ی دانش‌آموزی) نوبت سوم

۸۴/۲/۱۹
وقت: ۲/۵ ساعت

۱۱- در یک محدوده‌ی دمایی، نزدیک دمای مطلق T، نیروی کشش، F، در یک میله‌ی پلاستیکی تحت کشش، به صورت زیر به طول میله، L، مربوط می‌شود (۴)

$$F = aT^2(L-L_0).$$

a یک ثابت مثبت، L_0 طول میله قبل از کشیده شدن و L طول میله در حالت کشیده شده است. هنگامی که $L=L_0$ است ظرفیت گرمایی میله $C_L(T,L_0) = bT$ است که b ثابت است.

الف- قانون اول ترمودینامیک را برای فرآیند برگشت‌پذیری که طی آن میله کشیده می‌شود، بنویسید.

ب- اگر $S(T_0,L_0)$ معلوم باشد، آنتروپی $S(T,L)$ را برحسب $S(T_0,L_0)$ و سایر پارامترهای موجود در مسئله به دست آورید.

ج- اگر میله را از لحاظ گرمایی عایق‌بندی کنیم و آن را به طور ایستاوار از طول اولیه‌ی L_1 در دمای T_1 بکشیم تا طول آن به L_2 $(L_2>L_1)$ برسد، دمای آن در این حالت چه قدر است؟

د- ظرفیت گرمایی میله را در طول L (به‌جای L_0)، $C_L(T,L)$، به دست آورید.

۴۷

۲۴۸

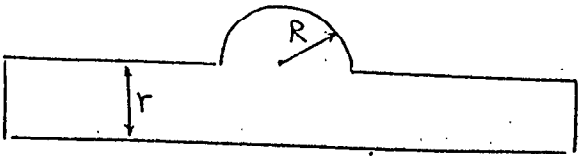
۱۲) یک ماشین گرمایی بین دو منبع گرم و سرد با ظرفیت های گرمایی متناهی و ثابت C_H و C_L یک چرخه برگشت پذیر شامل چهار فرآیند زیر را طی می کند.

در فرآیند اول ماشین از منبع گرم که دمای اولیه ی آن T_H است گرما می گیرد و به دمای T_1 می رسد. فرآیند دوم بی دررو است. در فرآیند سوم ماشین مقداری گرما به منبع سرد که دمای اولیه ی آن T_L است می دهد و سرانجام طی فرآیند چهارم که بی دررو است به حالت اولیه باز می گردد.

الف - کار انجام شده در یک چرخه توسط ماشین، و بازده این ماشین را محاسبه کنید.

ب - کار بیشینه ی قابل حصول از این ماشین چه قدر است؟ در این شرایط بازده ماشین را حساب کنید.

۱۳) یک مجرای عبور نور با ضریب شکست $n < \sqrt{2}$ در نظر بگیرید. ضریب شکست محیط را یک فرض کنید. شکل مجرا معادل دوران شکل زیر حول محور δ است ($R < r$).



در ابتدای مجرا یک منبع نور گسترده و همسانگرد با سطح مقطعی برابر با سطح مقطع مجرا می چسبانیم. شدت نور منبع I_0 است.

الف - چه کسری از انرژی نورانی درون قسمت اول مجرا (قبل از برآمدگی) جریان می یابد.

ب - وقتی نور به برآمدگی می رسد، قسمتی از نور از مجرا خارج می شود، حداکثر زاویه ی میل پرتوهای خارج شده نسبت به محور δ چقدر است؟

ج - چه کسری از انرژی نورانی از برآمدگی خارج می شود و چه کسری در ادامه ی مجرا انتشار می یابد؟

۱۰- پرتوهای کیهانی پروتون‌هایی هستند که با انرژی‌های بسیار زیاد در کیهان حرکت می‌کنند. سازوکارهای مختلفی برای تولید این ذره‌ها بیان شده. یکی از این سازوکارها شتاب‌گیری فرمی است. در این سازوکار پروتون‌های آزاد کم‌انرژی در نتیجه‌ی برخوردهای پیاپی با میدان‌های مغناطیسی وابسته به اجرام سنگین شتاب می‌گیرند. آن چه در زیر می‌آید یک مدل ساده شده‌ی یک‌بعدی از این شتاب‌گیری فرمی است.

جسم بزرگی به جرم M در امتداد محور x حرکت می‌کند و قدرمطلق سرعت آن V است. ذره‌ی کوچکی، مثلاً یک پروتون در امتداد همین محور x حرکت می‌کند و قدرمطلق سرعت آن v است. این دو سرعت نسبت به دستگاهی بیان شده که آن را دستگاه کیهان می‌نامیم. این دو جسم با هم برخورد می‌کنند. برخورد ممکن است رودررو باشد، یا ممکن است ازعقب باشد (که یعنی ذره به دنبال جسم بزرگ حرکت کند).

فرض کنید در چارچوب کیهان انرژی پروتون E و تکانه‌ی آن p باشد. در چارچوب همراه M انرژی و تکانه‌ی پروتون را پیش از برخورد E'_i و P'_i، و پس از برخورد E'_f و p'_f می‌نامیم.

الف) برای برخورد رودررو، E'_i و p'_i را بر حسب E و p و V بیان کنید. از فرمول‌های نسبیت خاص استفاده کنید.

ب) فرض کنید در چارچوب همراه M انرژی پروتون پایسته است، یعنی $E'_f = E'_i$، و تنها تکانه‌ی پروتون تغییر علامت می‌دهد. انرژی پروتون پس از برخورد در چارچوب کیهان را E'' می‌نامیم. E'' را بر حسب E، V، v، و c به دست آورید (c سرعت نور است)؛ و $\Delta E = E'' - E$ را ساده کنید.

ج) ΔE را برای حالتی که پروتون به دنبال M می‌رود بنویسید.

اینک فرض کنید پرتون مطابق شکل به تعداد زیادی جسم سنگین، برخورد کند. فرض کنید به طور آماری نصف این جسم‌ها به طرف پروتون می‌آیند و نصف آن‌ها هم‌جهت با پروتون حرکت می‌کنند. در این صورت می‌توان استدلال کرد که احتمال برخورد رودررو برابر است با $(V+v)/(2v)$ و احتمال برخورد از عقب برابر است با $(v-V)/(2v)$. (همواره مجموع این دو کسر 1 است، و اگر $v > V$ باشد، هر کدام از این دو کسر بین 0 و 1 اند.)

د) با این دو احتمال برخورد، تعیین کنید که پس از هر برخورد، به طور متوسط ΔE چه قدر می‌شود. عبارت $\Delta E/E$ را ساده کنید.

ه) به این ترتیب، اگر آهنگ برخوردها f باشد، آهنگ افزایش انرژی ذره، یعنی dE/dt، می‌شود $dE/dt = \alpha E$ ، مقدار α را به دست آورید.

به این ترتیب دیده می‌شود که با گذشت زمان انرژی پروتون به صورت نمایی زیاد می‌شود.