

①

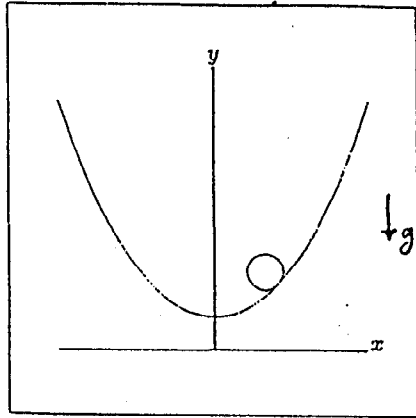
مسئله اول

امتحان اول المیار فیزیک (دروس ۷ نفر)

۸۴، ۹، ۲۷

وقت: ۳، ۵ ساعت

۱- دیسکی به جرم m و شعاع R روی سطحی با معادله $y = a \cosh(x/a)$ ($a > R$) بدون لغزش می‌غلتد.

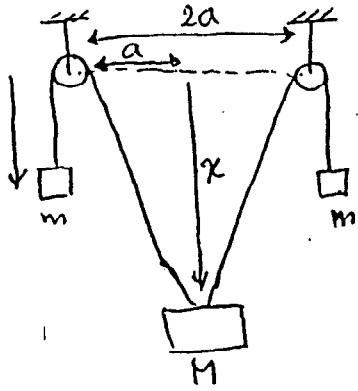


⑥

- زاویه ϕ ، زاویه‌ی دوران دیسک حول مرکزش است. ϕ را چنان انتخاب کرده‌ایم که وقتی مرکز دیسک در $x = 0$ است، $\phi = 0$ باشد.
- الف- بردارهای یکدیگر مماس بر منحنی \hat{t} و عمود بر آن \hat{n} (در صفحه‌ی xy) را بر حسب ϕ به دست آورید.
- ب- دیسک به اندازه‌ی ϕ غلتیده است. x و y ، مختصات مرکز دیسک را به دست آورید.
- ج- انرژی مکانیکی دیسک E را بر حسب ϕ و $\dot{\phi}$ به دست آورید.
- د- برای وقتی که $\phi \ll a/R$ است، حرکت دیسک هماهنگ ساده است. فرکانس نوسان‌های کوچک دیسک را به دست آورید.
- و- نیروی عمودی N و نیروی اصطکاک f وارد از سطح بر دیسک را به دست آورید.
- ه- فرض کنید ضریب اصطکاک ایستایی سطح $\mu_s = 1/2$ باشد. اگر دیسک را از $a/R \ll \phi_0 < 0$ رها کنیم، آیا شرط غلتش برقرار می‌ماند و یا دیسک شروع به لغزش می‌کند؟ مسئله در بعدی است.

$$R \sin \theta \sin \phi = g$$

$R \theta =$



(د)

✓ ۲- در شکل مقابل، قوه‌ها را کوچک و سبک بگیرید و از

هم برهان چشم ببندید. در کل مسئله زمین کنید

فاصله M از قوه‌ها برابر است. سیستم در میان

رانگی زمین با شتاب g است.

✓ الف- مقدار α در نقطه‌ی تعادل را بیابید.

✓ ب- شتاب هر جسم m را بر حسب شتاب و سرعت M بیابید.

✓ ج- نیروی کشش برهان را بر حسب مکان و سرعت M بیابید.

✓ د- پس آمد نوسانهای کوچک حول تعادل را بیابید.

✓ ۳- صندل مداری ماه (ماهه ماه - زمین) با صندل مداری زمین (ماهه زمین - خورشید) زاویه $\delta = 5^\circ$

ی سازد. در هر ماه قمری با احتمال P ماه زلزله رخ می دهد (P را روی بازه‌ی زمان طولانی میانگین

میکنیم).

در موردی که فاصله زمین تا خورشید $1.5 \times 10^8 \text{ km}$ ، فاصله ماه تا زمین $0.5 \times 10^6 \text{ km}$ و

شعاع زمین 6400 km باشد، P چقدر خواهد بود ؟

۴- خورشید به دلیل پدیده‌های اپتیکی به اندازه زمان t در فاصله از آنچه انتظار می‌رود غروب (ظاهر) می‌کند. در موردی که فاصله لایه هوای اطراف زمین h و شعاع زمین R و فریب حرکت هوا n باشد (چگالی هوا را تا ارتفاع h ثابت و پس از آن همز در نظر بگیرید).

الف - h را به عنوان تابعی از پارامترهای مسئله بیابید.

ب - اگر $t = 120\text{ s}$ ، $R = 6400\text{ km}$ ، و $n = 1.0003$ باشد ، h چقدر است ؟

۵- کره‌های رسانای به شعاع a و بار Q در فاصله دوری از یک پوسته کروی رسانای به شعاع داخلی b و شعاع خارجی c است. پوسته کروی بدون بار است و a کوپلتر از b است. کره به شعاع a را در مرکز پوسته کروی قرار می‌دهیم.

الف - تغییر انرژی الکتروستاتیک سیستم را به دست آورید.

ب - پتانسیل کره به شعاع a چقدر تغییر می‌کند ؟

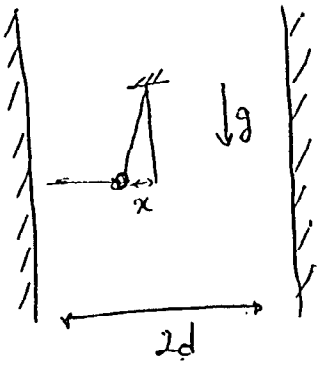
6- یک بار نقطه‌ای به جرم m و با بار q ، از یک نقطه آویز

با یک رسان به طول l آویخته شده است. در دو طرف این

بار، دو صفحه رسانا با فاصله مساوی d از نقطه آویز، قرار داده

شده است.

5



بار مورد نظر در میدان گرانشی g (که موازی با همپهنه‌های رسانا است) قرار دارد.

الف - میدان α را جایی بپذیرید که تیغ موازی با نیروی جاذبه است. شرطی روی پارامترهای مسئله

به دست آورید که این نقطه، یک نقطه تعادل پایدار باشد.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) \approx 1.2 \right)$$

فرض کنید رساناها نزدیک رسانش سطحی α دارند. بدین ترتیب اثر از سطح آنها چگالی سطحی و میدان

K داشته باشیم، میزان اتلاف انرژی در واحد سطح برابر با $\frac{K^2}{\alpha}$ است.

ب - فرض کنید d آن قدر بزرگ است که فقط اولین بارهای تقویری مهم هستند. با به دست آوردن چگالی

بار سطحی روی رساناها و چگالی جریان سطحی را به دست آورید. (جواب را تا اولین مرتبه‌ی ناهموازی

α و α حساب کنید.)

ج - توان اتلافی سیستم چقدر است؟ معادله‌ی توانی بار را تصحیح کنید و با حل آن، حرکت

بار را تصحیح کنید.

موفق باشید



- ۱- یک ستاره به شکل روی به شعاع R است. چالی و فشار را تابع فقط r (فاصله تا مرکز ستاره) و \vec{g} (شد میدان گرانشی) را به شکل $\vec{g} = -g(r)\hat{r}$ بنویسید.
- الف - معادله دیفرانسیل برای تغییرات g نسبت به r بنویسید.
- ب - معادله دیفرانسیل برای تغییرات P نسبت به r بنویسید.
- ج - g را حذف کنید و معادله دیفرانسیل شامل P و ρ به دست آورید.
- د - معادله حالت به شکل $\rho = \rho_0 (1 + \frac{P}{B})$ بنویسید. (ρ_0 و B ثابت اند.) با فرض این که B بزرگ است، P بر حسب r را تا مرتبه یک نسبت به $\frac{1}{B}$ به دست آورید. (راههای: در $r=R$ فشار صفر
- ه - جرم ستاره را M بنویسید و R را تا مرتبه یک نسبت به $\frac{1}{B}$ به دست آورید.

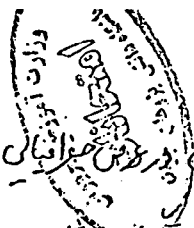
۱۱- اتومبیلی در پیچ به شعاع انحنای r با سرعت ثابت v حرکت می کند. فزید اصطکاک چرخها و سطح جاده

۲

۴ است. فرض کنید: با معادله زیر

- (i) ارتفاع مرکز جرم اتومبیل از زمین h ، فاصله ی چرخهای سمت چپ با چرخهای سمت راست l و جرم اتومبیل m
- (ii) نیروی پیش بران موتور به تساوی بین محور عقب و محور جلو تقسیم می شود
- (iii) حال اتومبیل بسیار کوچکتر از شعاع انحنای جاده است.
- (iv) مقدار نیروی مقاومت هوا، بر روی اتومبیل برابر با $k v^2$ و جهت آن خلاف جهت حرکت اتومبیل است
- (v) نیروی عکس العمل زمین وارد بر چرخ جلوی هر سمت اتومبیل با نیروی عکس العمل وارد بر چرخ در همان سمت برابر است.

سوال: حداکثر سرعت اتومبیل و حقدر باشد تا در این وضع تلفزد.



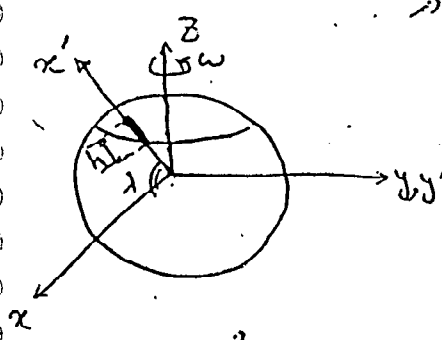
۳- ذره‌ای به جرم m از بُرجی به ارتفاع h بالای سطح زمین در عرض جغرافیایی λ رها می‌شود. شعاع زمین R است.

دستگاه $x'y'z'$ که x' جهت سمت الرأس است، دستگاهی ثابت در

فضا است. معادله حرکت این ذره چون تحت تأثیر نیروی متناسب با

$\frac{1}{r^2}$ زمین است، روی یک بیضی خواهد بود که معادله آن در

مختصات $x'y'z'$ عبارت است از $\frac{1}{r} = B - AC \cos \theta$ که در آن



$A = \sqrt{B^2 + \frac{2mE}{L^2}}$ و $B = -\frac{mk}{L^2}$ و θ زاویه بین بردار مکان ذره و جهت مثبت محور

x' است. سرعت زاویه‌ای زمین به دور خود برابر ω است.

(۵)

الف- مقادیر B و A را بر حسب کمیت‌های معلوم مشخص کنید.

ب- زاویه بین محل برخورد ذره با سطح زمین و محور x' (θ_0) را بر حسب کمیت‌های معلوم به دست آورید.

۴- کشنده‌ای با سطح مقطع A ، ضریب d و رسانایی K در نظر بگیرید. در صورتی که دما در دو طرف

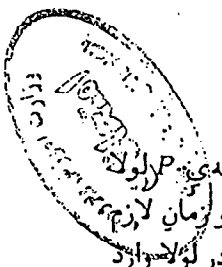
(۶)

این کشنده T_H و T_C باشد شارش رها را H می‌نامیم.

رسانایی هوا بر حسب دما به صورت $K_{\text{هوا}} = cT^{\frac{1}{2}}$ است. در صورتی که دما در فاصله‌ی d از

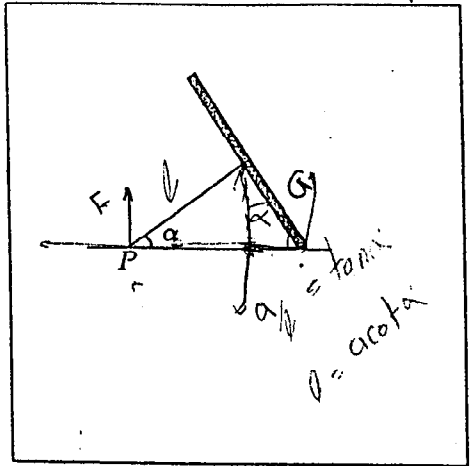
کشنده به ترتیب T_H و T_C باشد شارش رها را H' می‌نامیم ($H' = \alpha H$).

معادله جبری برای α بر حسب ثابت‌های مسئله به دست آورید. (مسئله یک بُعدی است.)



دیسکی به جرم m و شعاع a مطابق شکل توسط میله ای با جرم ناچیز به نقطه P آویزان شده است. میله با سطح افق زاویه α می سازد. دیسک روی سطح می غلتد و زمان لازم برای آن که یک دور مداری حول P طی کند، T است. نیرویی که به سر میله در گوشه وارد می شود چه قدر است؟ فرض کنید این نیرو قائم است.

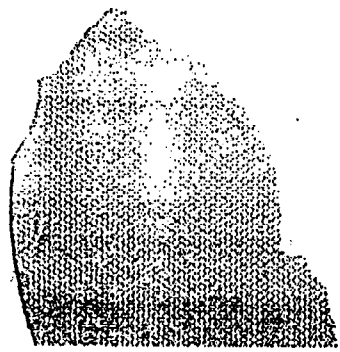
جسم صلب

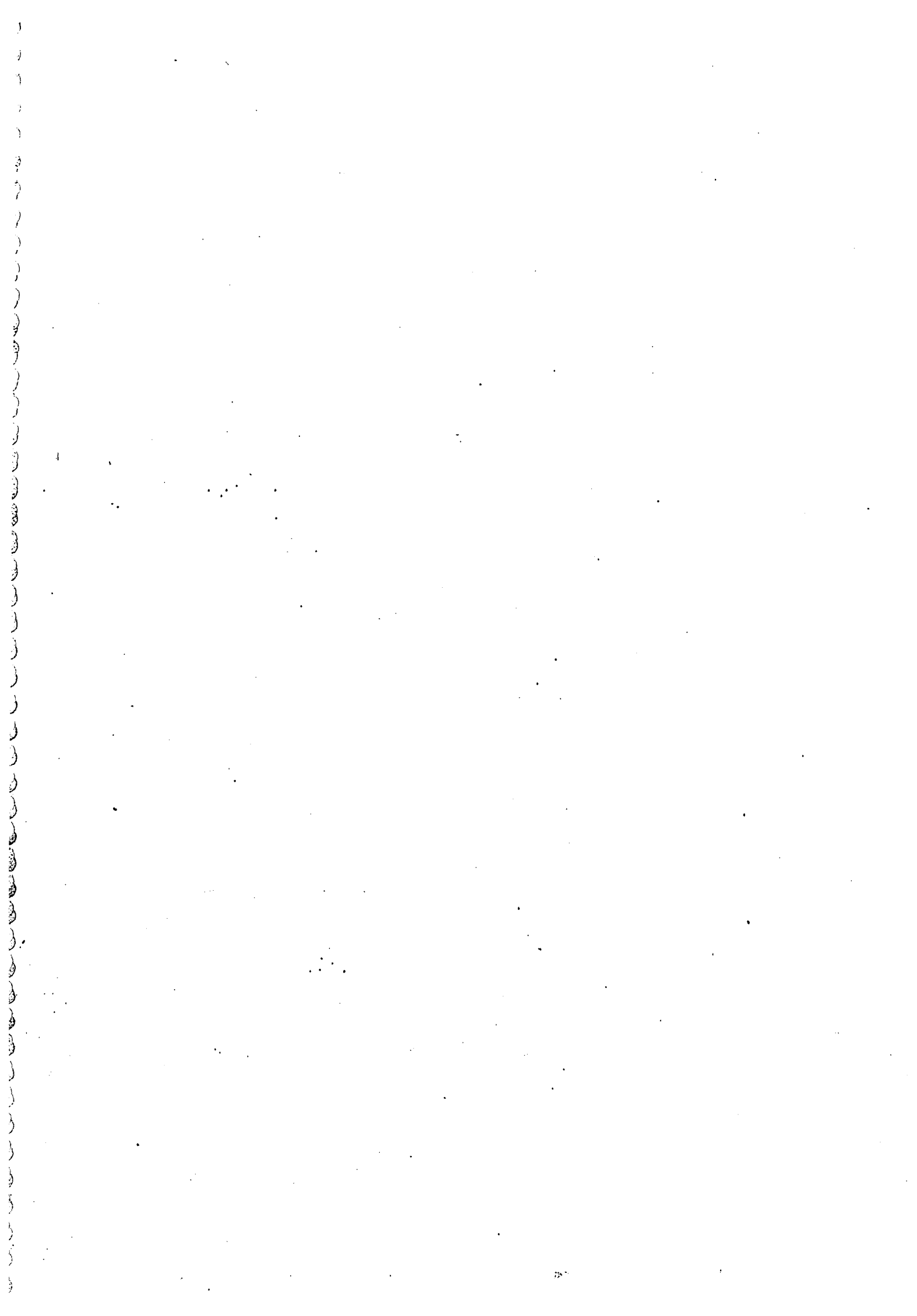


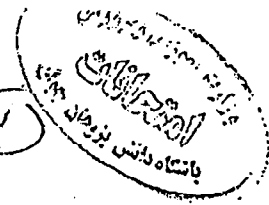
(6)

۳

۱۷





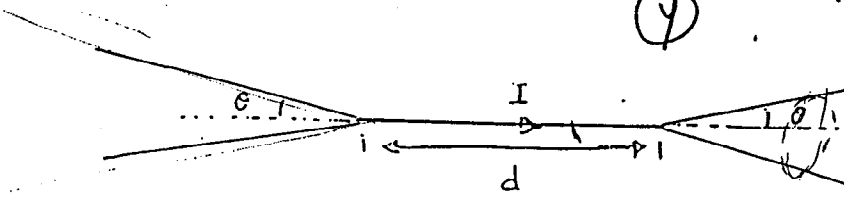


وقت: ۴ ساعت

۸۴۱۱۱۲

۱- مانند شکل، دو مخروط ابریزانا، به زاویه α با یک سیم به هم وصل شده اند. محور تقارن مخروط ها بر هم منطبق اند و فاصله d در رأس مخروط برابر با d است. فرض کنید مخروط ها تا بنهایت ادامه دارند. از سیم جریان ثابت I میگذرد. به عبارتی از مخروط اول جریان I میگذرد و در دوم I میگذرد.

(۷)



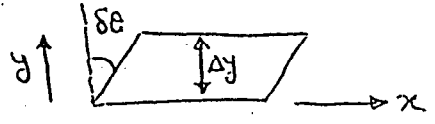
الف- چگالی جریان سطحی را روی دو مخروط حساب کنید.

ب- میدان مغناطیسی در سطح مخروط ها چه قدر است؟ (میدان مغناطیسی داخل ابریزانا نفوذ نمی کند.)

ج- میدان مغناطیسی را در تمام فضا بیابید.

۲- یک تابع به چگالی ρ و فریب μ جریان روی μ در نظر بگیرید. دو لایه این تابع در جهت x حرکت می کنند. این

لایه ها در عمده x اند و فاصلهیشان از هم Δy است. v تابع y است. سطحی در عمده x در نظر بگیرید که دو ضلع موازی آن در y (لایه اول) و $y + \Delta y$ (لایه دوم) اند. نقطه هایی از شماره که در زمان t روی ضلع های این سطح اند، در زمان $t + \Delta t$ روی یک متوازی الاضلاع اند.

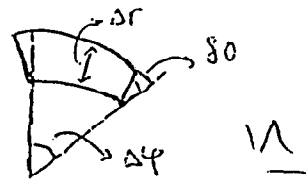


الف- نیروی ناشی از بران روی μ بین این دو لایه را بر حسب $\frac{\rho \mu}{\Delta t}$ و مساحت لایه ها (A) بنویسید.

برکت یک شارژ به شکل $\vec{v} = v(r)\hat{e}_r$ است که (r, φ, z) مختصات استوانه ای اند. بخشی از

شارژ را که در زمان t بین φ و $\varphi + \Delta \varphi$ و r و $r + \Delta r$ است در نظر بگیرید. شکل این بخش،

در زمان $t + \Delta t$ مطابق شکل است.





را به دست آورید $\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \phi}{\delta t}$

ج - با استفاده از نتیجه‌های بخش الف و ب، نیروی ناشی از گرانش بین دو لایه‌ی شارژ بین ϕ

$4 + 5\phi$ ، یک لایه در شعاع r و یک لایه در شعاع $r + \delta r$ را به دست آورید.

(راه‌های: این نیرو در راستای \hat{r} است.)

→ تعریف کنید $\omega = \frac{v}{r}$ ، و یک معادله‌ی دیفرانسیل برای ω به دست آورید.

د - بپذیرید $\omega(r,t) = e^{-\alpha t} \Omega(r)$ ، که α یک مقدار ثابت است. یک معادله‌ی دیفرانسیل برای Ω

به دست آورید.

و - بپذیرید $\Omega(r) = \Omega_0 [1 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots]$ ، که a_i ها ثابت‌اند. اولین a_i غیر صفر را

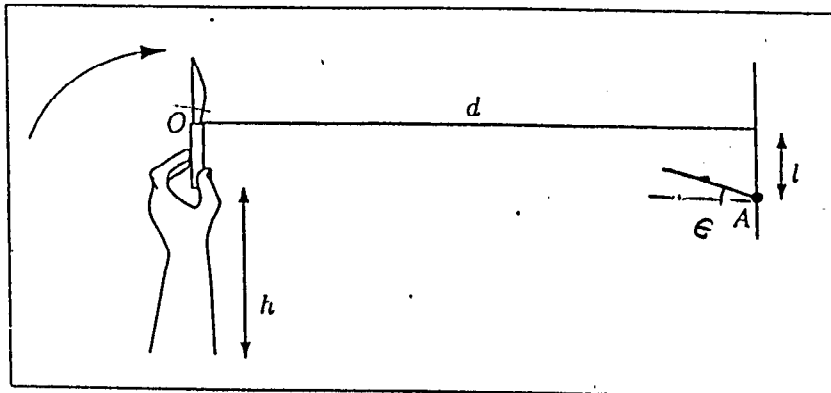
آوردید.

ز - فرض کنید در $r=R$ ، نوع شارژ هم‌زمان متغیر α را به دست آورید. (Ω را با دو جمله

که در بخش (و) به دست آوردید، تقریب کنید.)

فردی چاقویی به طول $2l$ را به سمت هدفی (نقطه‌ای A) که در شکل می‌بینید، پرتاب می‌کند. فرض کنید که برای پرتاب چاقو دستش را حول مفصل آرنجش با سرعت زاویه‌ای Ω می‌چرخاند و هنگامی که چاقو از دستش رها می‌شود قائم است. O مرکز جرم میله و وسط آن است. برای سادگی در بررسی حرکت چاقو آن را مثل یک میله در نظر بگیرید.
 الف- چه شرط و یا شرط‌هایی روی Ω ، l ، h و یا d وجود دارد که نوک چاقو به طور قائم به هدف برخورد؟

ب- در صورتی که در زمان برخورد به هدف، اگر چاقو حداکثر به اندازه زاویه کوچکی ϵ هم از خط قائم منحرف باشد، باز هم در هدف فرو برود، شرط و یا شرط‌هایی بنویسید که چه قدر تغییر می‌کنند؟ جواب خود را تا کوچک‌ترین توان غیر صفر مرتبه‌ی ϵ بنویسید.



(7)

نیم حلقه‌ای به جرم M روی سطحی افقی قرار دارد. فرض کنید که صفحه‌ی نیم حلقه هم‌واره قائم می‌ماند. مطابق شکل دو دانه‌ی تسبیح هر یک به جرم m به طور متقارن از بالای نیم حلقه با اختلالی کوچک به پایین لغزیده‌اند.

الف- تحت چه شرطی زاویه‌ی مثل θ_0 وجود دارد که وقتی دانه‌های تسبیح به آن زاویه برسند نیروی از سطح افقی بر نیم حلقه وارد نشود؟

می‌خواهیم ببینیم که در صورت برقرار بودن آن شرط آیا نیم حلقه از زمین بلند می‌شود. زمانی که دانه‌های تسبیح به زاویه‌ی θ_0 می‌رسند را T بگیرد. $\dot{\theta}_{\pm}$ و $\ddot{\theta}_{\pm}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

(۱)

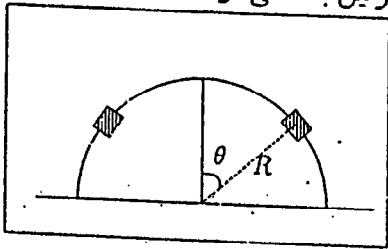
$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{\pm} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \dot{\theta}|_{t=T \pm \epsilon} \\ \ddot{\theta}_{\pm} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ddot{\theta}|_{t=T \pm \epsilon} \end{aligned} \quad (1)$$

علامت اندیسی \pm برای کمیت‌های دیگر را نیز به همین صورت تعریف می‌کنیم.

ب- $\dot{\theta}_-$ و $\ddot{\theta}_-$ را به دست آورید.

ج- فرض کنید اگر حلقه از زمین بلند شود، ارتفاع مرکزش را با h نشان دهیم. \dot{h}_+ و \ddot{h}_+ را به دست آورید. در لحظه‌ی بلند شدن h_+ و \dot{h}_+ صفر هستند.

د- حالا $\dot{\theta}_+$ و \ddot{h}_+ را محاسبه کنید. آیا حلقه از زمین بلند می‌شود؟



سهم‌تالی

اتمان مهم الیاز نیریک (دوره‌ی ۷ متر) وقت: ۳ ساعت

۱- در ۲۵ ژوئن ۱۹۹۷ ایستگاه فضایی میر (Mir) روسیه در اثر برخورد با یک ظرف تدارکات

خزده‌ای با مساحت A در آن به وجود می‌آید. بر اثر این حفره فشار داخل میر در مدت ۸ دقیقه از

مقدار 750 mmHg به 775 mmHg کاهش می‌یابد. حجم ایستگاه فضایی میر 390 m^3 و دمای

اولی آن 298 K بود. فرض کنید هوای داخل میر از قانون گاز ایده‌آل تبعیت می‌کند.

الف- مساحت سوراخ ایجاد شده روی دیواره‌ی میر را به دست آورید.

ب- پس از این مدت (۸ دقیقه) دمای میر چگونه تغییر کرد؟

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \text{ ثابت بولتزمن}$$

$$\bar{m} = 28 \times 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg} \text{ حجم متوسط مولکول هوا}$$

۲- یک موج اسکالر تخت تک‌رنگ با بس‌آمد ω زاویه‌ای θ با زاویه‌ی فرود θ

از محیط ۱ به فصل مشترک محیط‌ها ۱ و ۲ می‌تابد. سرعت انتشار موج در

محیط‌ها ۱ و ۲ به ترتیب v_1 و v_2 و امپدانس محیط‌ها ۱ و ۲ به ترتیب z_1 و z_2 است.

الف) با استفاده از پیوستگی‌ی تابع موج و پایستگی‌ی انرژی، نسبت دامنه‌ی موج

بازتابیده به دامنه‌ی موج فرودی را به دست آورید.

ب) با استفاده از نتیجه‌ی بخش الف، یک رابطه‌ی پیوستگی برای مشتق تابع

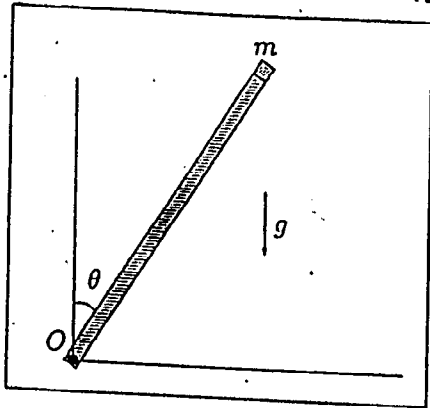
موج به دست آورید.

۳- میله‌ای به طول l و جرم M از یک سرش در نقطه‌ی O لولا شده است. از اصطکاک در لولا چشم‌پوشی کنید.

الف- ذره‌ای به جرم m ($m \ll M$) را روی سر میله‌ای قرار می‌دهیم. میله از زاویه‌ی θ_0 رها می‌شود. از اثر m روی حرکت میله چشم‌پوشی کنید. ضریب اصطکاک ایستایی بین m و سر میله، μ_s حداقل چه قدر باشد که m در لحظه‌ی اول جدا نشود؟

ب- در صورتی که شرط بند قبل برقرار باشد، جرم m در زاویه‌ی θ_1 است از میله جدا می‌شود. θ_1 چه قدر است؟

ج- جرم m در چه نقطه‌ای به زمین می‌خورد؟



۱

مسئله ۱

الف) دست‌گاه S لخت A با سرعت $(v, 0, 0)$ نسبت به دست‌گاه S لخت S حرکت می‌کند (محورها ی A و S موازی اند). دست‌گاه B لخت B با سرعت $(0, w, 0)$ نسبت به دست‌گاه S لخت A حرکت می‌کند (محورها ی A و B موازی اند). بردار و اندازه‌ی سرعت B نسبت به S را به دست آورید.

۶

ب) دست‌گاه D لخت D با سرعت $(0, w, 0)$ نسبت به دست‌گاه S حرکت می‌کند (محورها ی D و S موازی اند). دست‌گاه E لخت E با سرعت $(v, 0, 0)$ نسبت به دست‌گاه D لخت D حرکت می‌کند (محورها ی E و D موازی اند). بردار و اندازه‌ی سرعت E نسبت به S را به دست آورید.

مسئله ۲

اگر آینه‌ی تخت ی ساکن باشد، قانون‌های بازتابش در مورد آن چنین اند:

۷

- پرتو ی تابیده، خط عمود بر آینه، و پرتو ی بازتابیده، هر سه در یک صفحه اند،
- زاویه ی بازتابش برابر است با زاویه ی تابش،
- بسامد پرتو ی بازتابیده، برابر است با بسامد پرتو ی تابیده.

اکنون آینه‌ی تخت ی در نظر بگیرید که عمود بر محور x ها است، و با سرعت v در امتداد محور x ها حرکت می‌کند. قانون‌های بازتابش را، از دید ناظر S که آینه را متحرک می‌بیند، به دست آورید.

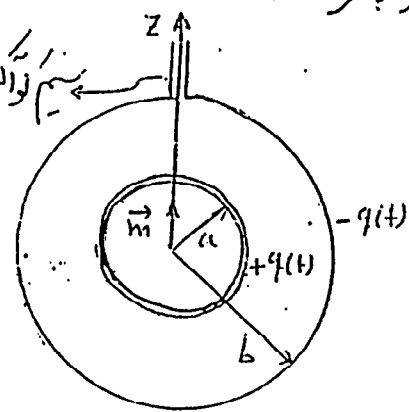
✓ مسئله ۳

سپار مغناطیسی یک آهن ربای کروی در بیرون آن مثل یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور دوقطبی مغناطیسی \vec{m} است. اگر \vec{m} در جهت محور Z باشد، میدان مغناطیسی بیرون کروی به صورت

$$\vec{B}(r, \theta) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

است که در آن (r, θ) مختصات کروی نقطه مورد نظر است.

آهن ربای کروی با شعاع a و گشتاور دوقطبی مغناطیسی معادل \vec{m} در امتداد Z در نظر بگیرید. آهن ربای درون کروی رسانایی با شعاع تقریباً همان a است ولی با آن تماس ندارد (مثلاً یک لایه نازک نارسانا بین آنها گذاشته ایم). کروی رسانایی دیگری با شعاع b ($b > a$) هم مرکز با کروی اول است.



فرض کنید دو کروی رسانا آزادند حول محور Z بچرخند. در ابتدا دو کروی رسانا ساکن اند. به تدریج دبی آرای به وسیله یک سیم کواکسیال بار به دو کروی به طور هم‌اهنگ جاری می‌شود (با یک سوراخ کوچک روی کروی بزرگتر، منفی سیم کواکسیال را به کروی داخلی وصل می‌کنیم و دیگری آن را به کروی بیرون متصل می‌کنیم). بار توسط این سیم در امتداد $\hat{\theta}$ روی روی رساناها جاری می‌شود تا بارهای آنها $+Q$ و $-Q$ شود.

با جاری شدن جریان روی رساناها، یک نیروی مغناطیسی بر آنها وارد می‌شود (میدان مغناطیسی را فقط ناشی از کروی بزرگ در نظر بگیرید و از میدان مغناطیسی ناشی از جریان روی رساناها صرف نظر کنید).

الف - با توجه به نیروی وارد بر رساناها، اندازه حرکت زاویه‌ای حرکت از آنها را محاسبه کنید. مجموع اندازه حرکت زاویه‌ای را بنویسید.

(۴)

ی دانیم چنانچه اندازه حرکت خطی یک میدان الکترومغناطیسی به صورت $\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$ است که در آن c سرعت نور و $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ بردار پوینتینگ است.

ب - با توجه به بردار \vec{g} ، اندازه حرکت زاویه‌ای میدان الکترومغناطیسی را بدست آورید.

ج - با توجه به مقادیر بدست آمده در قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

یک پلاسما (شاره ای که ذره‌ها پیش‌باردار اند) شامل دو نوع ذره است. ذره‌ها ی با بار مثبت پرجرم اند و می‌شود آن‌ها را ساکن گرفت. ذره‌ها ی با بار منفی حرکت می‌کنند و بار هر کدام نشان q و جرم هر کدام نشان m است. تعداد بر واحد حجم، چگالی ی بار، چگالی ی جرم، و سرعت ذره‌ها ی با بار منفی را با به ترتیب n ، ρ ، و v نشان می‌دهیم. فشار و میدان الکتریکی را هم با به ترتیب P و E نشان می‌دهیم. چگالی ی بار ذره‌ها ی مثبت مقدار ثابت و یک‌نواخت p^+ است. در حالت تعادل، چگالی ی بار کل، سرعت، و میدان الکتریکی صفر اند، و تعداد ذره‌ها ی با بار منفی بر واحد حجم ثابت و یک‌نواخت است.

الف) معادله ی پی‌وسته‌گی و معادله ی نیوتن برای ذره‌ها ی با بار منفی، و معادله ی گاوس برای میدان الکتریکی را بنویسید.

ب) فرض کنید انحراف از حالت تعادل کوچک است. بخش خطی ی معادله‌ها ی الف) نسبت به انحراف‌ها را بنویسید.

ج) مدول کپه‌ای ی پلاسما برای ذره‌ها ی با بار منفی را B بگیرد و معادله ای برای δ (انحراف چگالی ی بار ذره‌ها ی با بار منفی نسبت به حالت تعادل) بنویسید.

د) معادله ی پاشنده‌گی ی موج ج) (رابطه ی بس‌آمد زاویه‌ای و عدد موج) را بنویسید.

ه) سرعت فاز و سرعت گروه را بر حسب عدد موج به دست آورید.

✓ معادله حالت گاز واندرسون را در این صورت بنویسید

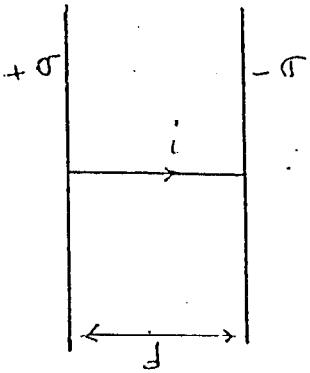
$$\left\{ \begin{aligned} \left(P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) &= RT \\ u &= C T - \frac{a}{v} \end{aligned} \right.$$

است بدان که $v = \frac{V}{N}$ و $u = \frac{U}{N}$ از برای واحدهای هر مول است. a, b, R ثابت هستند.

- (۶) الف) β, κ, C_p و C_v را برای این گاز تعیین کنید.
- ب) رابطه‌های ترمودینامیکی بین u و v را بدست آورید.
- ج) ds را به عنوان تابعی از dT و dv بدست آورید.
- د) هر یک از β, κ, C_p و C_v را در حد a, b به دست آورید.

۶

مسئله ۱



دو سیم موازی را با مساحت A را با یک سیم با مساحت R به هم وصل کرده ایم. روی یکی از سیم‌ها چگالی بار $+\sigma$ و روی سیم دیگر چگالی بار $-\sigma$ قرار دارد. فاصله d سیم‌ها را L بگیریم. به خاطر اختلاف پتانسیل دو سیم، جریانی بین دو سیم ایجاد می‌شود.

فرض کنید این جریان آن قدر کوچک است که بارهای روی دو سیم فرصت دارد تا آرایش خود را حفظ کنند.

الف - جریان سیم و چگالی بار سطحی سیم‌ها را به عنوان تابعی از زمان به دست آورید.

ب - میدان مغناطیسی را در نزدیکی سیم، با اولین مرتبه از وارون مساحت سیم‌ها به دست آورید.

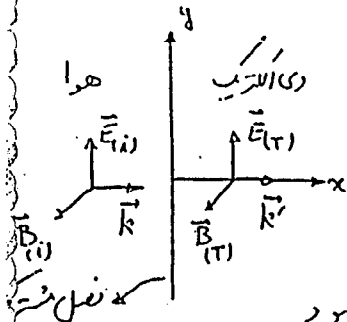
ج - برای بررسی همبستگی باید در نظر گرفت که سیم یک خود القایی به اندازه L هم دارد.

با در نظر گرفتن این موضوع، قسمت‌های الف و ب را دوباره حل کنید.

مسئله ۲

در این مسئله می خواهیم مربع انتقال یافته به یک دی الکتریک را به دست آوریم. فرض کنید موجی با میدان الکتریکی

$$\vec{E}_{(z)} = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{z}$$



از هوا، عمود بر محیطی با ضریب شکست n می آید. می دانیم $n = \sqrt{1 + \chi}$ است که χ پذیرفتاری دی الکتریک با ضریب شکست n است و $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$ است.

می دانیم با اعمال میدان الکتریکی روی یک دی الکتریک، مولکولهای آن قطبیده می شود

و قطبش آن از $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ به دست می آید. این قطبش با توجه به قانون ماکسول-آمپر جریان

به اندازه $\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ ایجاد می کند. این جریان میدان الکتریکی جدیدی تولید می کند. میدان الکتریکی

دوباره محیط را قطبیده می کند و جریان جدیدی تولید می شود و این جریان میدان الکتریکی جدیدی تولید می کند و

و آنگاه ادامه می یابد.

می دانیم میدان الکتریکی در ناحیه S از یک همبندی تحت با پتانسیل سطحی $K(t)$ از $\vec{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \hat{z}$ به دست می آید که در آن C سطح نوار است.

فرض کنید در مرتبه n همبندی S ، میدان منتقل شده در دی الکتریک همان میدان فرودی است یعنی

$$\vec{E}_{(z)}^{(n)} = \vec{E}_{(z)}$$

الف - بردار قطبش مرتبه اول، $\vec{P}^{(1)}(x, t)$ ، را از روی میدان الکتریکی مرتبه n همبندی $\vec{E}_{(z)}^{(n)}$ بنویسید و از روی آن جریان پلازما مرتبه اول، $\vec{J}_p^{(1)}(x, t)$ ، را تعیین کنید و سپس از روی آن میدان الکتریکی تا مرتبه اول نسبت به χ محاسبه کنید.

ب - با میدان الکتریکی به دست آمده در قسمت (الف)، قطبش را تا مرتبه دوم نسبت به χ ، $\vec{E}_{(z)}^{(2)}$ ، را بنویسید و از روی آن میدان الکتریکی مرتبه دوم نسبت به χ ، $\vec{E}_{(z)}^{(2)}$ ، را محاسبه کنید.

ج - می دانیم میدان الکتریکی کل منتقل شده در محیط دی الکتریک از $\vec{E} = \frac{2}{n+1} E_0 e^{i(k'x - \omega t)} \hat{z}$ به دست می آید که در آن n ضریب شکست دی الکتریک است. با بسط دادن این میدان بر حسب χ نشان دهید که جمله اولی دوم، و سوم این بسط همان میدان منتقل شده در مرتبه اول، و مرتبه دوم است که در قسمت های بالا

ناظری نا آگاه، هنگام غروب به آسمان نگاه می‌کند و از دید او سیاره‌ی زهره همی عجیب به نظر می‌آید.
این شخص برای بررسی بیشتر، با دوربین دستی فیلم برداری از این جسم عجیب فیلم می‌گیرد.

الف - فرض کنید این شخص از حداکثر درشت نایی دوربین، که ۲۰ برابر است، استفاده می‌کند.
به خاطر لرزش‌های دست او، تصویر جسم عجیب دچار نویسان می‌شود. تخمین بزنید که دامنه‌ی
این نویسان با در یک تلوویزیون معمولی چه قدر است. (دامنه‌ی دید دوربین در حالت معمول
حدود ۶۰ درجه است).

ب - به خاطر کمی نور در شب، دستگاه خودکار کانون کردن دوربین خوب کار نمی‌کند و تصویر کاملاً
روی درستی که در حدود ۵ متری شخص قرار دارد کانون می‌شود. در نتیجه تصویر زهره به صورت
تقریبی تار درمی‌آید. تخمین بزنید شعاع این قرص در صفحه‌ی تلوویزیون چه قدر می‌شود.

می‌توانید فاصله‌ی کانونی عدسی دوربین را حدود ۵ cm، قطر روزنه‌ی دوربین را حدود ۳ mm
و ابعاد CCD (یعنی جایی که تصویر تشکیل می‌شود) را ۵ mm بپذیرید.

مسئله ۲

الف) نشان دهید که فاصله ی هندسی ی افق، آن طور که ناظر ی در ارتفاع h متر می بیند، تقریباً $H = 3.5 h^{1/2}$ km است.

لایه ای از ماده ی شفاف در نظر بگیرید که ضریب شکست اش در امتداد محور y تغییر کند. محور y بر محور x عمود است. پرتوی نوری در نظر بگیرید که در این ماده در امتداد ی نزدیک به امتداد محور x حرکت کند. می توان نشان داد که این پرتو می خمد، به طوری که دیگر مسیر پرتو خط راست نیست، بل که دایره ای است به شعاع

$$R = n \left(\frac{dn}{dy} \right)^{-1} \quad (1)$$

ب) فرض کنید که تغییر ضریب شکست جو، تنها ناشی از تغییر فشار، و به شکل نمایی با طول مشخصه ی 10 km باشد، یعنی اگر y ارتفاع از سطح زمین باشد داشته باشیم

$$n(y) = n(0) + (\Delta n) \exp\left(-\frac{y}{d}\right), \quad d = 10 \text{ km.} \quad (2)$$

ضریب شکست جو در نزدیکی ی سطح زمین تقریباً 1.00028 است. با استفاده از (1) حساب کنید که خمیده شدن نور در جو چه تأثیری بر عمق افق دید ناظر دارد (یعنی رابطه ی $H = 3.5 h^{1/2}$ km چه تغییری می کند).

مسئله ۱۵

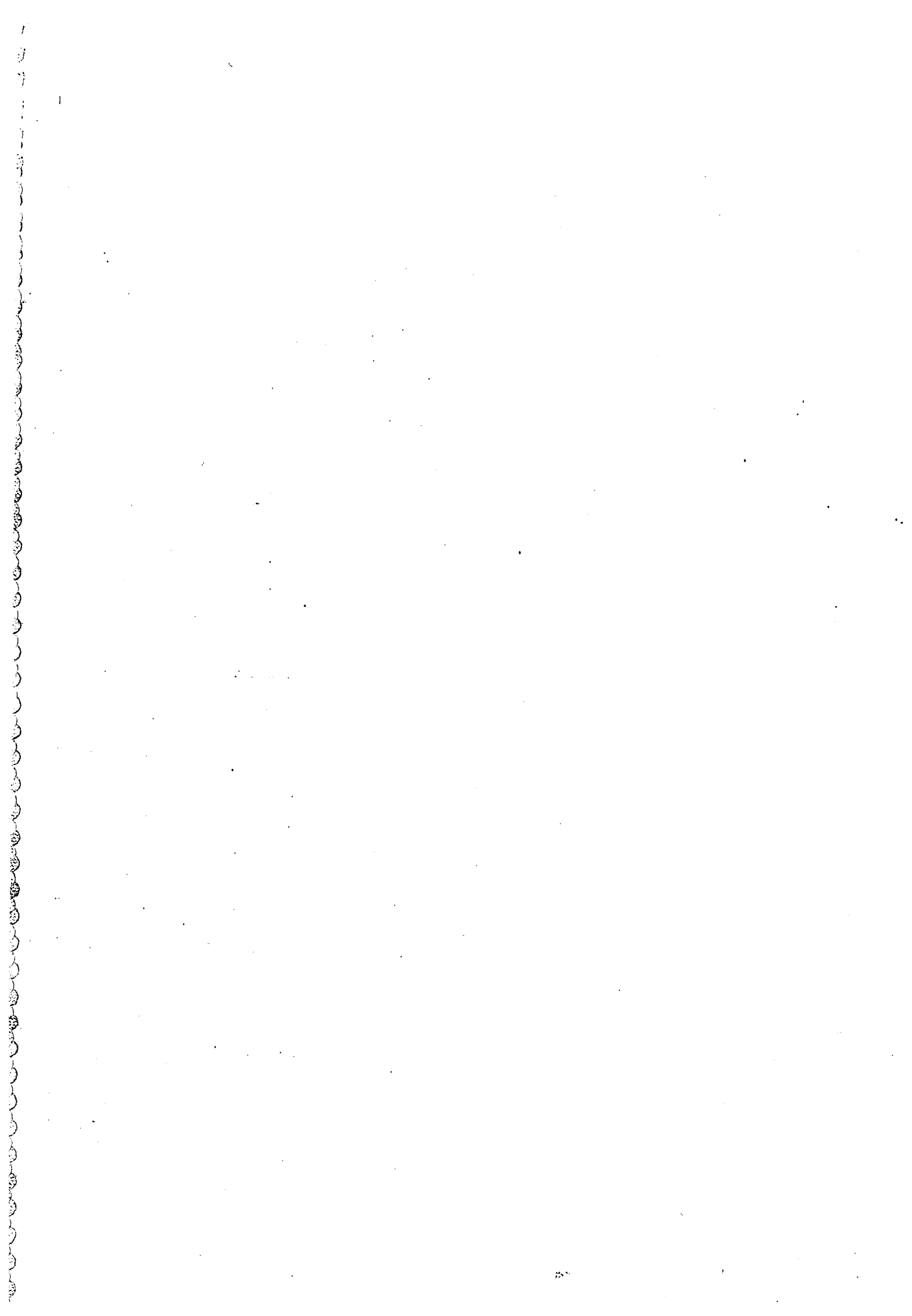
مدل یک موتور الکتریکی به شکل سه عنصر است که با هم سری اند: یک مقاومت R ، یک خودالقای L ، و یک موتور آرمانی. موتور آرمانی هم می‌تواند الکتریکی بی‌را که ذریافت می‌کند به توان مکانیکی تبدیل می‌کند، و رابطه‌ی ولتاژ-دوسر آن (V_m) با سرعت زاویه‌ای ω محور آن (ω) به شکل $V_m = k\omega$ است، که k ثابت است. به دوسر موتور واقعی ولتاژ $V(t)$ اعمال می‌کنیم، که

$$V(t) = \begin{cases} V_0, & 0 < t < T_1 \\ 0, & T_1 < t < T \end{cases}$$

$$V(t+T) = V(t)$$

a فرض کنید موتور با سرعت زاویه‌ای ω ثابت می‌چرخد. جریان گذشته از موتور در حالت دائمی را بر حسب زمان به دست آورید. منظور از حالت دائمی حالتی است که جریان بر حسب زمان دوره‌ای شده باشد.

b فرض کنید موتور با سرعت زاویه‌ای ω ثابت می‌چرخد و متوسط زمانی τ گشت آورده مکانیکی τ مقاوم می‌وارد بر آن است. T_1/T را حساب کنید.



اسمان نبال ایباد فزینک (۷ نفر) - ارامه

کتابت: ۱۳۲۰
وقت: ۲۰'

سؤال ۱

با استفاده از تحلیل ابعادی می‌خواهیم اطلاعاتی در مورد امواج و موجک‌های سطحی به دست آوریم.

امواج در آب عمیق - امواجی سطحی با طول موج λ در آب با چگالی ρ حرکت می‌کنند. نیروی بازگرداننده گرانش است. شتاب گرانش g است.
الف - سرعت فاز را بر حسب داده‌های بالا و تا حد یک ضریب ثابت و بی‌بعد به دست آورید.

ب - نسبت سرعت گروه به سرعت فاز را به دست آورید.
موجک‌های سطحی - برای بعضی از موج‌های سطحی نیروی مربوط به کشش سطحی σ به عنوان نیروی بازگرداننده از نیروی گرانش بزرگ‌تر است. این موج‌ها را موجک‌های سطحی می‌نامیم.

ج - سرعت فاز موجک‌های سطحی را تا حد یک ضریب ثابت و بی‌بعد به دست آورید.
د - نسبت سرعت گروه به سرعت فاز را برای موجک‌های سطحی به دست آورید.
ه - در حالت کلی هر دو نوع موج وجود دارند. کشش سطحی آب $\sigma = 0.07 \text{ N/m}^2$ است. تخمین بزنید به ازای چه طول موج‌هایی رابطه‌ی پاشندگی موجک‌های سطحی غالب است و در چه طول موج‌هایی رابطه‌ی پاشندگی مربوط به امواج گرانی غالب است؟

یک پلاسما (شماره ای که ذره‌ها پیش‌باردار اند) شامل دو نوع ذره است. ذره‌ها ی با بار مثبت پرجرم اند و می‌شود آن‌ها را ساکن گرفت. ذره‌ها ی با بار منفی حرکت می‌کنند و بار هر کدام q و جرم هر کدام m است. تعداد بر واحد حجم، چگالی ی بار، چگالی ی جرم، و سرعت ذره‌ها ی با بار منفی را با به ترتیب n ، ρ ، ρ_m و v نشان می‌دهیم. فشار و میدان الکتریکی را هم با به ترتیب P و E نشان می‌دهیم. چگالی ی بار ذره‌ها ی مثبت مقدار ثابت و یک‌نواخت p^+ است. سیستم در میدان مغناطیسی ی یک‌نواخت B است، و از میدان مغناطیسی ی حاصل از حرکت ذره‌ها ی باردار چشم می‌پوشیم. در حالت تعادل، چگالی ی بار کل، سرعت، و میدان الکتریکی صفر اند، و تعداد ذره‌ها ی با بار منفی بر واحد حجم ثابت و یک‌نواخت است.

a معادله ی پی‌وستگی و معادله ی نیوتن برای ذره‌ها ی با بار منفی، و معادله ی گاوس برای میدان الکتریکی را بنویسید.

b فرض کنید انحراف از حالت تعادل کوچک است. بخش خطی ی معادله‌ها ی a نسبت به انحراف‌ها را بنویسید.

c مدول کپهای ی پلاسما برای ذره‌ها ی با بار منفی را B بگیرید. انحراف نسبت به حالت تعادل را یک موج تخت با بس آمد زاویه‌ای ω و بردار موج k بگیرید (یعنی انحراف‌ها را متناسب با $\exp(-i\omega t + ik \cdot r)$ بگیرید، که t زمان و r مکان است). معادله ای شامل فقط v ، ω ، k ، و ثابت‌ها ی c ، ω_p ، و ω_c به دست آورید. داریم

$$v(t, r) = V \exp(-i\omega t + ik \cdot r)$$

و

$$c := \sqrt{B/\rho_m}, \quad \omega_p := \sqrt{n q^2 / (\epsilon_0 m)}, \quad \omega_c := qB/m$$

(این ثابت‌ها با مقادارها ی حالت تعادل حساب می‌شوند.)

d بگیرید

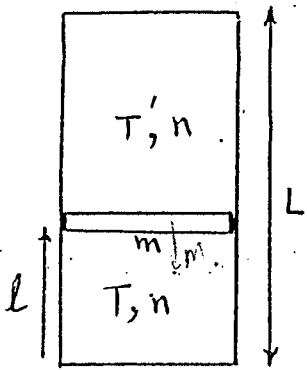
$$B = B e_3, \quad k = k_2 e_2 + k_3 e_3, \quad V = V_1 e_1 + V_2 e_2 + V_3 e_3$$

که e_1 ، e_2 و e_3 سه بردار یکه ی متعامد اند.

d1 فرض کنید V با B موازی است. k را بر حسب ω و ثابت‌ها ی c ، ω_p ، و ω_c به دست آورید.

d2 فرض کنید V با B موازی نیست. V_1 و V_3 را بر حسب V_2 ، ω ، ثابت‌ها ی c ، ω_p ، و ω_c و مثلثه‌ها ی k به دست آورید. از این‌جا رابطه ای بین k و ω بر حسب ثابت‌ها ی c ، ω_p ، و ω_c به دست آورید.

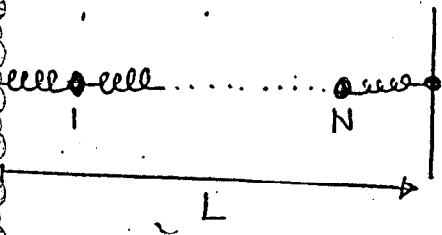
لوله‌ای استوانه‌ای به طول L و سطح مقطع A که با گاز تک اتمی ($C_v = \frac{3}{2}R$) پر شده جنبه‌ای عمودی روی زمین قرار داده شده است. در میان این لوله یک قرص با جرم m و ضخامت ناپیوسته قرار دارد که می‌تواند با اصطکاک ناپیوسته در لوله حرکت کند و ضمناً مانع جابه‌جایی شدن گاز بین دو بخش این لوله باشد. تعداد مول‌های گاز در هر سوی لوله برابر و مساوی n است و دمای اولیه‌ی گاز در دو سوی لوله برابر T_0 و T'_0 است.



الف - فاصله‌ی صفحه را از کف لوله l می‌نامیم. معادله‌ی حرکت قرص را بدست آورید. (توجه کنید که تنها پارامتر متغیر در این معادله l باشد)

ب - با کمک جواب قسمت الف مکان تعادل را بدست آورید.

سیستمی از N جرم (N در حد ترمودینامیکی است) که با فزونی یکدیگر بسته شده اند، تشکیل شده است. جرم‌های اول و آخر به دو دیواره با فاصله L متصل هستند. مسئله یک بُبری است. طول طبیعی



جرمها a و ثابت آنها k است. دمای این سیستم T و نیرویی که به دیواره‌ها وارد می‌شود F است. برای محاسبه توانایی که هر ذره احسان می‌کند می‌توان فرض کرد که دو ذره‌ی هم‌جوار آن ساکن و در موضع تعادل شان هستند.

چنیناً دیواره را به صورت دو ذره‌ی کاملاً ساکن که به همان شکل نیرو وارد می‌کنند، فرض کنید.

الف - معادله‌ی حالت سیستم (رابطه‌ی بین T ، L ، و F) و انرژی داخلی سیستم (به عنوان تابعی

T و L) را به دست آورید.

ب - C_F و C_L این سیستم را محاسبه کنید.