بسمه تعالی

امتحان اول المپیاد فیزیک (دوره ۷ ان)

۹٫۲۸

وقت : ۲٫۵ ساعت

مسئله ۱

یک ذره به جرم M و N ذره به جرم Δm در نظر بگیرید. همه‌ی ذره‌ها روی یک خط راست حرکت می‌کنند. M ابتدا ساکن است.

الف – ذره‌های به جرم Δm، به ترتیب با سرعت v به M می‌خورند، و همه‌ی برخوردها کشسانند. سرعت نهایی ذره‌ی به جرم M چه قدر است؟ (فرض کنید همه‌ی ذره‌های کوچک به جرم M می‌خورند، و ذره‌های کوچک پس از برخورد با جسم M، مزاحم هم نیستند.)

ب – فرض کنید ذره‌های به جرم Δm، به ترتیب به M می‌خورند، و سرعت هر جرم پیش از برخورد، نسبت به جرم M برابر v است. سرعت نهایی ذره‌ی M چه قدر است؟

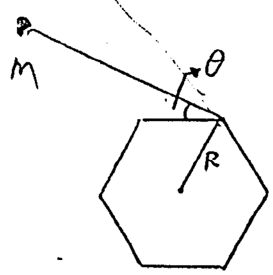
ج – بگیرید $m = N\Delta m$، و بخش‌های الف و ب را در حد $N\to\infty$، $\Delta m\to 0$ به طوری که m ثابت باشد، حساب کنید. سرعت نهایی جرم M در حالت‌های الف و ب در حد $N\to\infty$، و به ازای $N=1$ را با هم مقایسه کنید (یعنی به ترتیب بزرگی مرتب کنید). این محاسبه را برای حالت $\frac{m}{M} \gg 1$ انجام دهید.

راهنمایی : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha}$

مسئله ۲

یک جسم به جرم m به نخی بسته شده، و نخ دور یک N ضلعی منتظم پیچیده شده. N ضلعی و نخ در یک صفحه‌اند. نخ کشیده است. N ضلعی ساکن است، و انتهای نخ به N ضلعی بسته شده. طی حرکت جرم، نخ کشیده می‌ماند. فاصله‌ی مرکز N ضلعی تا هر یک از رأس‌های آن R است.

ادامه دارد ←



در حالتی که اولین نقطه‌ی تماس نخ با N ضلعی رأس iام است،
سرعت زاویه‌ای جرم نسبت به این نقطه را ω_i، طول بخش آزاد نخ را l_i، و انرژی جنبشی جسم را E_i بنامید.

الف - $\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i}$ را به دست آورید.

ب - $\frac{E_{i+1}}{E_i}$ را به دست آورید.

ج - در حد $N\to\infty$ (R ثابت) رابطه‌ی ω و E برحسب φ را به دست آورید. φ کمانی از دایره است که نخ دور آن پیچیده. فرض کنید سرعت جرم در $\varphi=0$ برابر v_0 باشد.

$\boxed{\text{مسئله‌ی ۳}}$

سفینه‌ی فضایی ای به شکل استوانه با طول l و شعاع R با سرعت زاویه‌ای ω حول محور خود می
این سفینه به گونه‌ای طراحی شده است که سطح داخلی آن شرایط لازم برای زندگی انسان را داشته باشد
(شتاب گرانش ظاهری g^*، دمای T^*، و فشار P^*). (۷۹)

الف - درصورتی که انرژی گرمایی این مجموعه از طریق یک لامپ استوانه‌ای با شعاع r_0 و دمای T_0 که در محور استوانه قرار دارد، تأمین شود، دمای هوا را برحسب فاصله از مرکز به دست آورید.
(ضریب رسانایی گرمایی برابر $cT^{1/2}$ است که c فقط تابع جنس گاز است.)

ب - با فرض این که لامپ خاموش است، فشار را برحسب فاصله از مرکز به دست آورید.
(از رابطه‌ی $\vec{\nabla}P+\rho\vec{g}=0$ استفاده کنید.)

موفق باشید

$\omega(l_0-R\varphi)=C$

۲

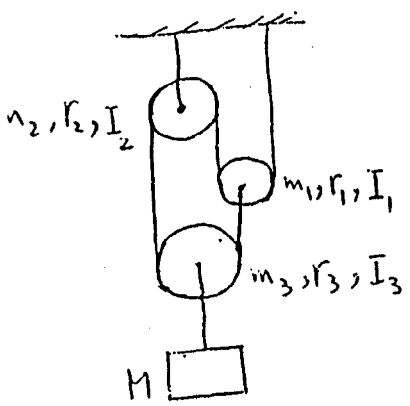
بسمه تعالی

امتحان دوم المپیاد فیزیک (دوره‌ی ۷ نفر)

وقت: ۲٫۵ ساعت

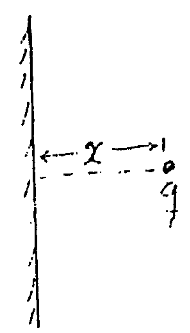
مسئله‌ی ۱

۶



در سیستم مقابل، از جرم و کشیدگی نخ‌ها چشم بپوشید و فرض کنید نخ‌ها روی قرقره‌ها نمی‌لغزند. مشخصات هر قرقره (جرم، شعاع، و لختی چرخشی) کنار هر قرقره نوشته شده. این سیستم در میدان گرانشی زمین است. شتاب جسم M را به دست آورید.

مسئله‌ی ۲



۶

بار q مقابل صفحه‌ی رسانای بسیار بزرگ که به زمین وصل است، قرار دارد.

الف - با فرض این که بتوان مسئله را الکتروستاتیک در نظر گرفت، نیروی وارد به بار و زمان رسیدن آن به صفحه‌ی رسانا را حساب کنید.

ب - با نزدیک شدن بار به صفحه، چگالی بار روی صفحه عوض می‌شود. چگالی جریان سطحی را برحسب سرعت بار q بیابید.

ج - مقاومت ویژه‌ی سطحی رسانا را ρ بگیرید، در نتیجه توان اتلافی در واحد سطح رسانا برابر است با ρj^2. توان اتلافی کل را برحسب مکان و سرعت بار q حساب کنید.

د - با استفاده از قضیه‌ی کار-انرژی معادله‌ی حرکت بار q را بنویسید (لازم نیست حل کنید).

← ادامه دارد

مسئله‌ی ۳

گاز ایده‌آل دو بعدی، گازی است که مولکول‌های آن تنها در صفحه‌ی xy حرکت می‌کنند و با هم برهم‌کنش ندارند.

۷

الف - $p(v)\,dv$ (احتمال این که اندازه‌ی سرعت یک مولکول بین v و $v+dv$ باشد)، را حساب کنید.

ب - با تعریف پارامترهای مناسب، معادله‌ی حالت این گاز را به دست آورید.

بسمه تعالی

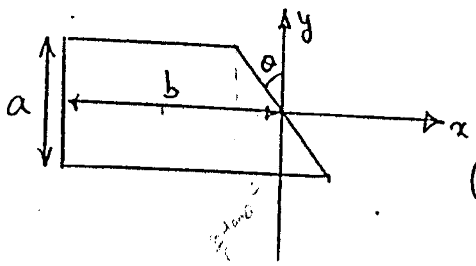
۸۱/۱۲/۱۵

امتحان سوم المپیاد فیزیک (۷ الف)

وقت: ۴ ساعت

مسئلهٔ ۱

الف ـ یک ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه درنظر بگیرید که ارتفاع آن a و فاصله‌ی بین مرکز دو ساق آن b است. زاویه‌ی ساق‌های ذوزنقه با هم θ است. چگالی ذوزنقه را یکنواخت بگیرید و مرکز جرم آن را به دست آورید.

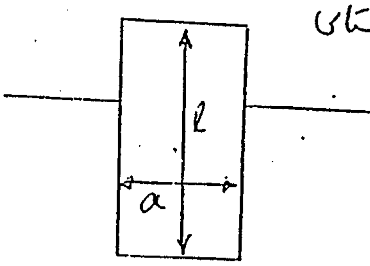


محورهای x و y را مطابق شکل بگیرید.

$\left(\frac{a^2}{24b}\tan^2\theta - \frac{b}{2} ,\ -\frac{a^2}{12b}\tan\theta\right)$

۶

ب ـ یک مکعب مستطیل یکنواخت به چگالی ρ در یک مایع به چگالی ρ_0 شناور است. رابطه‌ای بین a، l، و چگالی‌ها به دست آورید که حالت تعادل شکل، نسبت به چرخش در راستای عمود بر صفحه پایدار باشد.



مسئلهٔ ۲

در خلأ، همواره احتمال به وجود آمدن زوج الکترون و پادالکترون وجود دارد. این احتمال متناسب با چگالی انرژی موجود در فضاست. به این ترتیب اگر در یک نقطه از خلأ میدان $\vec{E}$ داشته باشیم چگالی دوقطبی‌ای در آن جا به وجود می‌آید که برابر است با $\vec{P} = \alpha E^2 \vec{E}$ که α یک کمیت ثابت و بسیار کوچک است.

الف ـ فرض کنید در $\vec{r}=0$، یک ذره با بار q قرار داده‌ایم. میدان الکتریکی و چگالی دوقطبی الکتریکی را تا مرتبه‌ی دوم از α، به عنوان تابعی از r حساب کنید. (خیلی نزدیک بار نشوید!)

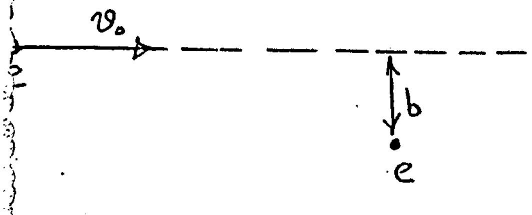
۵

ب ـ با توجه به اینکه در ابعاد اتمی، نیروی کولنی با تقریب بسیار خوبی درست است، حدی برای α به دست آورید.

۴

مسئله ۳

الکترونی از بی‌نهایت با سرعت v_0 به طرف الکترون ساکنی با پارامتر برخورد b شلیک می‌شود. بردار سرعت نهایی دو الکترون را به دست آورید (تا اولین مرتبه‌ی تقریب — b را بزرگ فرض کنید).



مسئله ۴

مکعب مستطیلی با جرم M و سطح مقطع A و سرعت V در هوا حرکت می‌کند: اگر جرم مولکولهای هوا m، آنها در واحد حجم n_0، و دما T باشد: (5)

الف- نیروی وارد بر مکعب مستطیل را حساب کنید. (مسئله را یک بعدی فرض کنید.)

ب- این نیرو را در حدود $\frac{V}{v_{rms}}$ خیلی بزرگ و خیلی کوچک محاسبه کنید:

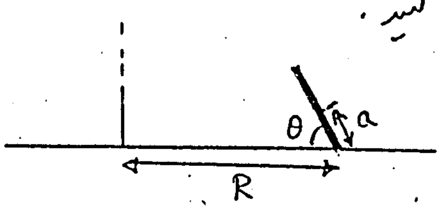
تعریف: $$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

مسئله ۵

الف- سکه‌ی فلزی روی دایره‌ای به شعاع R بدون لغزش حرکت می‌کند. زاویه‌ی صفحه‌ی سکه با سطح نیز مقدار θ است. همچنین حرکت به گونه‌ای است که همواره تک روی سکه به سمت مرکز مسیر است. شعاع سکه a

رابطه‌ی بین R، a، θ، و سرعت دوران سکه حول مرکزش را پیدا کنید.

(۶)



ب- حداقل سرعت زاویه‌ای سکه حول محور خودش برای اینکه حرکت پایدار باشد را به دست آورید.

(مسئله ٦)

ذره‌ای تحت تأثیر پتانسیل $U(x)$ قرار دارد. انرژی این ذره را E بگیرید. دوره‌ی تناوب این نوسانگر برابر است با:

$$T=\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}\quad,\quad U(x_1)=U(x_2)=E$$

الف - نشان دهید درصورتی که پتانسیل $U(x)$ به اندازه‌ی $\delta U(x)$ تغییر کند، تغییر دوره‌ی تناوب، δT، تا رتبه‌ی اول δU از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\delta T=-\sqrt{\frac{m}{2}}\;\frac{\partial}{\partial E}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\delta U(x)\,dx}{\sqrt{E-U(x)}}$$

٧

که در واقع همان

$$\delta T=-\frac{\partial}{\partial E}\left(T\,\overline{\delta U}\right)$$

است. $\overline{\delta U}$ متوسط زمانی δU است یعنی:

$$\overline{\delta U}=\frac{1}{T}\int_0^T\delta U(x(t))\,dt.$$

ب - فرض کنید $U=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ و $\delta U=\beta x^4$ است. δT را به دست آورید.

موفق باشید

امتحان چهارم المپیاد فیزیک (۷۸ نف)
وقت: ۳/۵ ساعت

مسئله ۱

منجّم‌ها می‌توانند نور ی را که از کهکشان‌ها ی ِ دیگر می آید مطالعه کنند، و از جمله می‌توانند طیف ِ عنصرها ی ِ مختلف را در آن تشخیص دهند. برا ی ِ کهکشان‌ها ی ِ دوردست، تقریباً همیشه این طیف‌ها به سمت ِ طول‌موج‌ها ی ِ بلندتر (یعنی سرخ‌تر) منتقل شده اند، به طور ی که نور ی که در دست‌گاه ِ سکون ِ کهکشان با طول‌موج ِ λ_0 گسیل شده، وقت ی به ما می‌رسد طول‌موج‌ش λ_D است، و داریم

$$\frac{\lambda_D}{\lambda_0} = Z > 1. \qquad (1)$$

این انتقال‌به‌سرخ‌ها را می‌توان انتقال‌ها ی ِ دُپلری پنداشت، به این معنی که می‌توان آن‌ها را به دور شدن ِ کهکشان‌ها ی ِ دوردست از ما نسبت داد.

(الف) اگر انتقال‌به‌سرخ ِ کهکشان ی Z باشد، و این انتقال‌به‌سرخ فقط ناشی از دور شدن ِ آن کهکشان از ما باشد، سرعت ِ دور شدن ِ آن کهکشان از ما چه قدر است؟

بیش‌تر ِ فیزیک‌پیشه‌ها، این انتقال‌به‌سرخ‌ها را به بزرگ شدن ِ جهان نسبت می‌دهند. بنا بر این نظریه، که نظریه ی ِ متعارف ِ کیهان‌شناسی نام دارد و شاهدها ی ِ تجربی ی ِ خوب ی هم دارد، جهان در حال ِ بزرگ شدن است؛ به این معنی که کهکشان‌ها ی ِ دوردست از ما دور می‌شوند؛ و سرعت ِ دور شدن ِ آن‌ها متناسب است با فاصله ی ِ آن‌ها از ما، یعنی

$$v = H\,d. \qquad (2)$$

در این فرمول، H ثابت ی است موسوم به ثابت ِ هابل. نتیجه ی ِ رصدها ی ِ کنونی حاکی از آن است که ثابت ِ هابل تقریباً برابر است با

$$H \cong 75\ \mathrm{km\,s^{-1}\,(Mpc)^{-1}}. \qquad (3)$$

در این فرمول پارسک، با علامت ِ pc، یک واحد ِ فاصله است و برابر است با 3.24 ly (سال ِ نوری = ly).

اختروش ِ 3C273، جسم ی است در آسمان که تابش ِ رادیویی ی ِ بسیار قوی ای دارد. طول‌موج ِ پرتوها یی که از این کهکشان به ما می‌رسد: با یک ضریب ِ $Z = 1.158$ بزرگ‌تر شده است.

۶ ۱۰

(ب) با فرض ـ درست بودن ـ مدل ـ متعارف ـ کیهان‌شناسی، یعنی بزرگ شدن ـ هابلی ی ـ جهان، فاصله ی ـ این اختروش از ما چه قدر است؟

شکل ـ (1) تصویرها یی از اختروش ـ 3C273 است که در فاصله ی ـ زمانی ی ـ 1977.56 تا 1980.52، توسّط ـ رادیوتله‌سکپ ـ VLBI گرفته شده است. از این نمودارها چنین بر می‌آید که چیز ی در آن جا دو پاره شده؛ یک پاره به سمت ـ شمال ـ شرقی (بالا ـ چپ در تصویر)، و یک پاره به سمت ـ جنوب ـ غربی (پایین ـ راست در تصویر) حرکت می‌کند.

(ج) به کمک ـ خط‌کش فاصله ی ـ بین ـ تصویر ـ این دو تکّه را بر حسب ـ میلی‌متر بسنجید. برا ی ـ این کار باید نقطه‌ها یی را در مرکز ـ داخلی‌ترین دایره‌ها ی ـ دو شکل، به عنوان ـ جا ی ـ هر کدام از توده‌ها انتخاب کنید. اینک با استفاده از مقیاس ـ زاویه، که بر حسب ـ میلی‌ثانیه ی ـ قوس، در پایین ـ شکل مشخّص شده، زاویه ی ـ بین ـ توده‌ها را به میلی‌ثانیه تبدیل کنید (واضح است که رأس ـ این زاویه زمین است). اینک با توجّه به زمان ـ ثبت ـ این تصویرها، که بر حسب ـ سال در سمت ـ راست ـ نمودارها نوشته شده، جدول ـ زیر را کامل کنید.

در این جدول $\Delta t := t_i - t_{i-1}$، S فاصله ی ـ مرکزها ی ـ دو توده ی ـ بزرگ و کوچک ـ شکل است (بر حسب ـ میلی‌متر)، φ فاصله ی ـ زاویه‌ای ی ـ بین ـ این دو توده است (بر حسب ـ میلی‌ثانیه ی ـ قوس، m sec، و بر حسب ـ نانورادیان، n Rad)، d فاصله ی ـ بین ـ دو توده است (بر حسب ـ سال ـ نوری)، $\Delta d := d_i - d_{i-1}$، و $\beta = \Delta d/(c\Delta t)$ سرعت ـ دور شدن ـ این دو توده است (بر حسب ـ سرعت ـ نور).

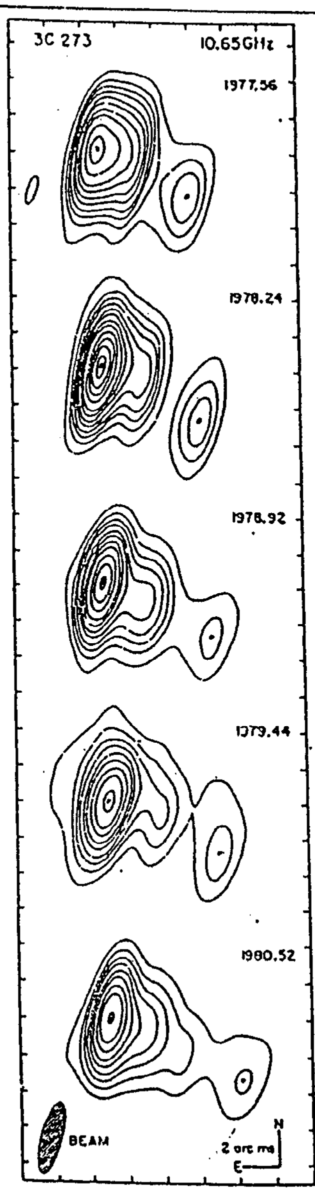


Fig. 4.5. VLBI maps at a frequency of 10.65 GHz of the quasar 3C 273 ($z = 0.158$) made at five different epochs, showing apparent 'superluminal' (i.e., faster than light) expansion of the source (from Pearson *et al.* 1981). Figure courtesy of T. J. Pearson and the California Institute of Technology. Reproduced by permission from *Nature*, Vol. 290, pp. 365–367. Copyright 1981 Macmillan Journals Limited.

شکل ـ 1

۳

V

i	t_i /y	t_i /y	Δt /y	S_i /mm	φ_i /msec	φ_i /nRad	d/ ly	Δd /ly	β
0	1977.56	0.00	———					———	———
1	1978.24								
2	1978.92								
3	1979.44								
4	1980.52								

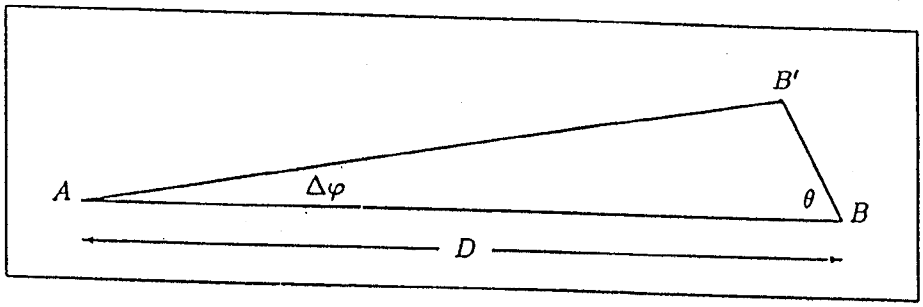
چنین به نظر می‌رسد که دو توده ای که از هم جدا شده اند، با سرعت ی بسیار بیش از سرعت ـ نور از هم دور می‌شوند. این معضل ی است که باید حل شود. یک ی از فرضیه‌ها یی که برا ی ـ رفع ـ این معضل ارائه شده این است که فرض کنیم انتقال‌به‌سرخ ـ 3C273، ناشی از انبساط ـ هابلی ی ـ جهان نیست، به این معنی که این اختروش در فاصله ی ـ خیل ی کم‌تری از ما است (کم‌تر از آن چه فرمول ـ هابل می‌گوید).

(د) فاصله ی ـ 3C273 از ما چه قدر باشد که معضل ـ بالا رفع شود؟

(ه) اگر 3C273 در این فاصله باشد، انحراف ـ سرعت ـ ش از سرعت ـ هابلی — یعنی سرعت ـ ش نسبت به کهکشان‌ها یی که در این فاصله از ما هستند، ولی از فرمول ـ هابل تبعیّت می‌کنند — چه قدر است؟

در سال ـ 1977، سه منجم به نام‌ها ی ـ Blandford، McKee، و Rees مدل ی پیش‌نهاد کردند که می‌تواند چنین سرعت‌ها ی ـ فرانوری ای را در چارچوب ـ نسبیّت ـ خاص توضیح دهد. اینک به مطالعه ی ـ این مدل می‌پردازیم.

با توجه به شکل ـ (2)، دو جسم در نظر بگیرید که در نقطه ی ـ B باشند. ناظر در نقطه ی ـ A است، و فاصله ی ـ A تا B برابر ـ D است.



شکل ـ 2

فرض کنید B نسبت به A ساکن باشد. در لحظه ی ـ t_1 بخش ی از جسم ـ B در امتداد ـ θ با سرعت ـ v پرت می‌شود. پس از گذشت ـ زمان ـ δt این جسم به اندازه ی ـ $v\,\delta t$ از B دور شده و در B' است. ناظر ی که در A ایستاده، بودن ـ دو جسم کنار ـ هم در B را در زمان ی می‌بینند که نور فاصله ی ـ D را پیموده و به A رسیده. پس از گذشت ـ زمان ـ Δt ناظر یک ی از دو جسم را در همان جا ی ـ قبلی می‌بیند؛ و جسم ـ جدا شده را در زاویه ی ـ $\Delta\varphi$ می‌بینند. از نظر ـ این ناظر، که در A ایستاده، سرعت ـ ظاهری ی ـ دور شدن ـ توده ی ـ دوم از توده ی ـ اول برابر است با

$$u = \frac{D\,\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{4}$$

(و) با محاسبه ی ـ Δt سرعت ـ ظاهری ی ـ $\beta := \frac{u}{c}$ را به عنوان ـ تابع ی از v و θ به دست آورید. (دقّت کنید v سرعت ـ جدا شدن ـ توده ی ـ دوم از توده ی ـ اوّل است و بنا بر فرض نقطه ی ـ B نسبت به A ساکن است. یعنی این سرعت هیچ ربط ی به سرعت ـ هابلی ی ـ کهکشان ی که در B است ندارد.)

(ز) بیشینه ی ـ β برا ی ـ چه θ ای است، و مقدار ـ این بیشینه چه قدر است؟

(ح) فرض کنید سرعت ـ جدا شدن ـ توده ی ـ B' تقریباً $0.995\,c$ باشد. زاویه ی ـ θ چه قدر باشد تا بتوان مشکل ـ سرعت ـ فرانوری ی ـ 3C273 را حل کرد؟

سئوال ۲

یک لایه یِ شاره را در نظر بگیرید که چگالی یِ آن فقط تابع ـ z است. این شاره ساکن است. و شکل ـ آن نسبت به صفحه یِ $z = 0$ تقارن دارد. با استفاده از $\rho(z)$ (چگالی یِ شاره) $m(z)$ را چنین تعریف می‌کنیم.

$$m(z) := \int_0^z \mathrm{d}z'\, \rho(z')$$

۵

(a) معادله‌ها یِ دیفرانسیل ـ فشار (P) و شدت ـ میدان ـ گرانشی (g) بر حسب ـ z را بنویسید. (فرض کنید این دوکمیت فقط تابع ـ z اند، g در راستا یِ z است، و میدان ـ گرانشی هم ناشی از خود ـ شاره است.)

(b) با استفاده از تعریف ـ m (و معادله‌ها یِ بالا) معادله یِ دیفرانسیل ی برا یِ P بر حسب ـ m بنویسید.

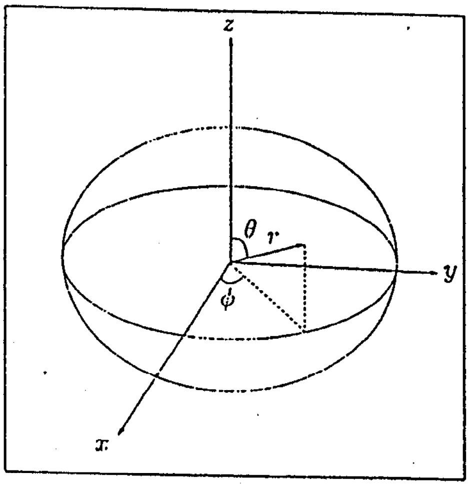
(c) P را بر حسب ـ m حساب کنید. فرض کنید شاره بین ـ $z = -a$ و $z = a$ است، $m(a) = M$، و بیرون ـ شاره فشار صفر می‌شود.

(d) معادله یِ حالت ـ شاره را $\rho = f(P)$ بگیرید. معادله یِ دیفرانسیل ی برا یِ z بر حسب ـ m بیابید.

(e) معادله یِ حالت را $\rho = \alpha\, P^{\beta}$ بگیرید، که α و β ثابت‌ها یی مثبت اند. به ازا یِ چه مقدارها یی از β، مقدار ـ a بی‌نهایت می‌شود؟ به ازا یِ مقدارها یِ دیگر ـ β (که a محدود می‌ماند) a با چه توان ی از M متناسب است؟ مقدار ـ a بر حسب ـ M، به ازا یِ چه مقدارها یی از β صعودی است و به ازا یِ چه مقدارها یی نزولی؟ (برا یِ این بحث‌ها، لازم نیست انتگرال ی را حساب کنید.)

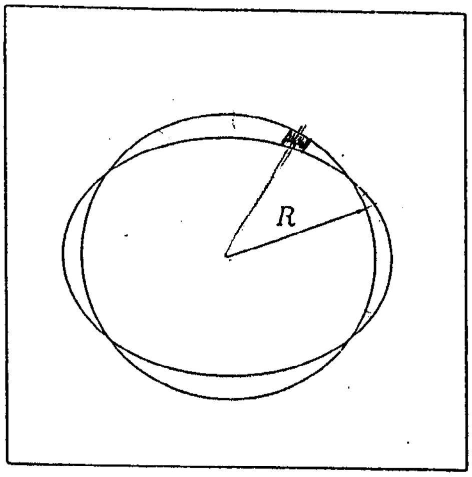
مسئله ۳ — در این مسئله می‌خواهیم اثرِ پَخیِ زمین را در پتانسیلِ گرانشِ آن وارد کنیم. فرض کنید که زمین تقریباً بیضی‌گون است. بیضی گونِ زمین، بیضی‌ای است که حولِ قطرِ کوچک‌ترش دوران یافته است. شعاعِ استوایِ زمین a و فاصله‌یِ مرکزِ زمین تا قطب $a(1-\eta)$ است. $\eta \approx 0.0034$، بنا بر این اثرِ پَخیِ زمین را تا رتبه‌یِ اولِ η بررسی می‌کنیم. چگالیِ زمین ثابت و برابرِ با ρ است.

الف — نقطه‌ای رویِ سطحِ زمین با مختصاتِ r، θ، ϕ در نظر بگیرید. r را بر حسبِ θ و ϕ تا رتبه‌یِ اولِ η به دست آورید.



ب — اگر زمین کره‌ای با همان جرم و چگالی بود شعاعِ آن R می‌شد. R را تا رتبه‌یِ اولِ η به دست آورید

حجمِ بیضی‌گونی با نیم‌قطرهایِ a، b، و c $V = (4\pi/3)abc$ است.



ج — به جایِ آن که زمین را بیضی‌گون بگیریم، می‌توانیم آن را کره‌ای به شعاعِ R بگیریم که رویِ آن یک توزیعِ جرمِ سطحیِ $\sigma(\theta, \phi)$ قرار دارد. σ را تا رتبه‌یِ اولِ η به دست

آورید.
د-- پتانسیلِ ناشی از σ را تا رتبه‌ي اولِ η و در فواصلِ دور، $R << r$، به دست آورید. این جمله‌ي اضافه در پتانسیل، به علتِ پخيِ زمین است.

بسمه تعالی

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (بخش اول)

وقت: ۳/۵ ساعت

مسئله ۱ — ذره ای به جرمِ m، تحتِ اثرِ نیروی گرانش روی سیکلوییدِ بدونِ اصطکاکی به پایین می‌لغزد. معادلاتِ پارامتریِ سیکلویید

$$x = A(\phi + \sin\phi) \qquad -\pi < \phi < \pi$$
$$y = A(1 - \cos\phi)$$

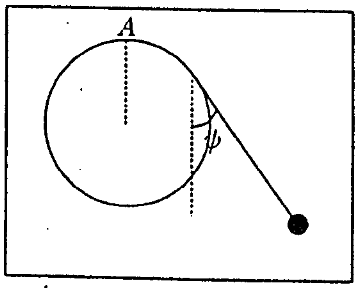
است.

الف— s طولِ کمانی در امتدادِ سیکلویید است که از پایینِ منحنی اندازه‌گیری می‌شود. انرژیِ ذره را بر حسبِ s و $\dot{s}$ به دست آورید.

ب— مقدارِ دوره‌ی تناوب را به دست آورید.

۱۰

✓ مسئلهٔ ۲ — جرمِ m به وسیلهٔ طنابی به طولِ l مطابقِ شکل به نقطهٔ A روی استوانه‌ای بسته شده است. محورِ استوانه افقی و شعاعِ آن R است. $R < 2l/\pi$ است. استوانه را ثابت و حرکت را منحصر به صفحهٔ قائمی بگیرید که از نقطهٔ A می‌گذرد و بر محورِ استوانه عمود است. فرض کنید جرمِ m در زمانِ $t = 0$ در ψ_0 باشد.



الف— انرژیِ این جسم را بر حسبِ ψ_0، ψ، و $\dot{\psi}$ دست آورید.

ب— فرکانس نوسان‌های کوچک حولِ تعادلِ پایدار را به دست آورید.

مسئله ۳

در ناحیه ای نزدیک به محور ـ z، یک میدان ـ مغناطیسی ي مستقل‌اززمان هست. در این ناحیه جریان ـ الکتریکی صفر است، بنابراین میدان ـ مغناطیسی را می‌شود مشتق ـ یک پتانسیل گرفت:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$$

فرض کنید این میدان نسبت به محور ـ z متقارن است. در این صورت پتانسیل ـ ϕ تابع ـ z و ρ می‌شود. که ρ فاصله از محور ـ z است. $\phi(z, \rho = 0)$ را با $f(z)$ نشان می‌دهیم.

- با استفاده از قانون ـ گاوْس، $\phi(z, \rho)$ را برا ي ρ ها ي کوچک حساب کنید. این کمیت را بر جسب ـ f به دست آورید و فقط اولین تصحیح ـ غیرِصفر نسبت به $\rho = 0$ را نگه دارید.

جسم ی به جرم ـ m با دوقطبی ي مغناطیسی ي μ را در نظر بگیرید. انرژی ي پتانسیل ـ این جسم ناشی از میدان ـ مغناطیسی، $-\mu'|\mathbf{B}|$ است، که μ' تصویر ـ دوقطبی ي مغناطیسی در جهت ـ $\mathbf{B}$ است. میدان ـ گرانشی هم یک‌نواخت و در جهت ـ $-z$ است.

- انرژی ي پتانسیل ـ این جسم را برا ي ρ ها ي کوچک به دست آورید. (μ' را ثابت بگیرید.)

- شرط ی برا ي تعادل ـ جسم در نقطه ای رو ي محور ـ z به دست آورید.

- شرط ی به دست آورید که این تعادل پای‌دار باشد. برا ي این که تعادل پای‌دار باشد، μ' باید مثبت باشد یا منفی؟

۲۰

۱۱

مسئله ۴

یک پلاسما شامل ـ n الکترون بر واحد ـ حجم، و مقدار ی یون ـ مثبت است، چنان که توزیع ـ بار ـ یون‌ها ي مثبت تقریباً یک‌نواخت، و بار ـ کل ـ پلاسما صفر است. بارها ي مثبت را ساکن فرض کنید. هیچ میدان ـ الکترومغناطیسی ي خارجی یی در پلاسما نیست. افت‌وخیز ی در پلاسما را در نظر بگیرید. این افت‌وخیز را با $\delta\rho$، $\delta\mathbf{v}$، $\mathbf{E}$، و δp مشخص می‌کنیم، که این کمیت‌ها به‌ترتیب تغییر ـ چگالی ي بار نسبت به حالت ـ تعادل، تغییر ـ سرعت ـ الکترون‌ها نسبت به حالت ـ تعادل، میدان ـ الکتریکی ي ناشی از جابه‌جایی ي الکترون‌ها، و تغییرِفشار نسبت به حالت ـ تعادل اند. در حالت ـ تعادل، سرعت، چگالی، و فشار مستقل از مکان و زمان اند و سرعت ـ شاره $\mathbf{v}$ است.

معادله‌ها ي گاؤس (برا ي میدان ـ الکتریکی)، پی‌وسته‌گی، و نیوتن (برا ي حرکت ـ الکترون‌ها) را بنویسید. فقط شکل ـ خطی‌شده ي این معادله‌ها لازم است.

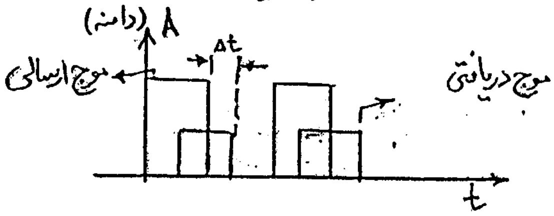
فشار، میدان ـ الکتریکی، و سرعت را حذف کنید و معادله ای برا ي $\delta\rho$ به دست آورید. برا ي این کار فرض کنید $\delta p = Y\delta\rho_m/\rho_m$، و Y را ثابت بگیرید. ρ_m چگالی ي جرمی ي الکترون‌ها است. بار ـ هر الکترون $(-e)$، و جرم ـ هر الکترون m است.

یک موج ـ تخت برا ي معادله ي بالا در نظر بگیرید، و رابطه ي پاشنده‌گی (رابطه ي بین ـ بس‌آمد ـ موج و بردار ـ موج) را بنویسید.

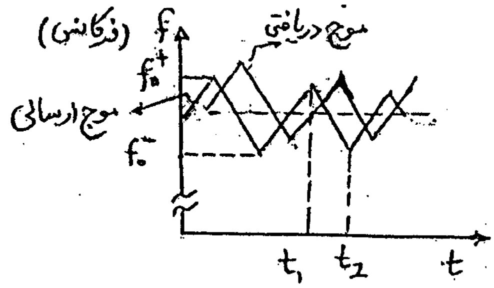
مسئله ۵

الف - در گذشته اساس کار رادارها این بوده که منبع یک موج مربعی با پریود T به سمت هدف ارسال کرده و از روی مدت زمان اختلاف بین موج ارسالی و موج دریافتی به فاصله هدف از منبع پی می برد. حداکثر برد این رادار چقدر است؟

(بدون توجه به دامنه موج بازگشتی)



ب - در رادارهای پیشرفته‌تر با استفاده از اثر دوپلر پی به سرعت هدف می برند. اساس کار بر این است که منبع موجی ارسال می‌کند که فرکانس آن متغیر با زمان است (مطابق شکل).



این رادار با اندازه گیری فرکانس موج بازگشتی در دو لحظه t_1 و t_2 (زمانی که فرکانس موج ارسالی مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود را اختیار می‌کند) پی به سرعت و مکان جسم می‌برد. $\left[(f_0^+ - f_0^-) \ll (f_0^+ + f_0^-)\right]$

فرض کنید مسئله یک بعدی می باشد و هدف مورد نظر یک هواپیمای مسافربری می باشد.

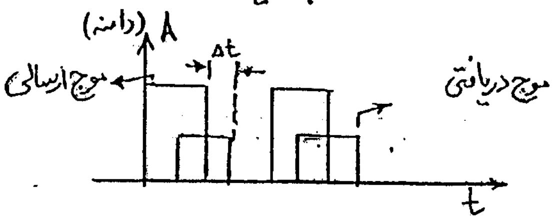
سرعت و مکان جسم را برحسب فرکانس ها در زمان t_1 و t_2 به دست آورید.

بسمه تعالی

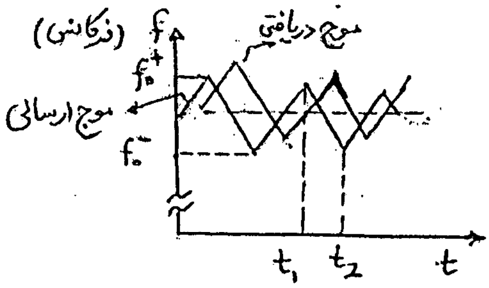
امتحان نهایی المپیاد فیزیک (بخش دوم) — وقت: ۲/۵ ساعت

مسئله ۵

الف - در گذشته اساس کار رادارها این بوده که منبع یک موج مربعی با پریود T به سمت هدف ارسال کرده و از روی مدت زمان اختلاف بین موج ارسالی و موج دریافتی به فاصله هدف از منبع پی می برد. حداکثر برد این رادار چقدر است؟
(بدون توجه به دامنه موج بازگشتی)



ب - در رادارهای پیشرفته تر با استفاده از اثر دوپلر پی به سرعت هدف می برند. اساس کار براین است که منبع موجی ارسال می کند که فرکانس آن متغیر با زمان است (مطابق شکل).



این رادار با اندازه گیری فرکانس موج بازگشتی در هر لحظه t_1 و t_2 (زمانی که فرکانس موج ارسالی مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود را اختیار می کند) پی به سرعت و مکان جسم می برد. $\left[(f_0^+ - f_0^-) \ll (f_0^+ + f_0^-)\right]$

فرض کنید مسئله یک بعدی می باشد و هدف مورد نظر یک هواپیمای مسافربری می باشد.

سرعت و مکان جسم را برحسب فرکانس ها در زمان t_1 و t_2 به دست آورید.