سؤالات پنج‌گزینه‌یی

۱) نگهبانی در یک شرکت با سه کارمند به نام‌های علی، حسین، و مجید کار می‌کند. نگهبان باید هر روز سر کار حاضر شود، مگر روزی که هر سه کارمند در مرخصی باشند. می‌دانیم که

- علی یک روز در میان به مرخصی می‌رود و امروز هم سر کار است.
- حسین ۵ روز کار می‌کند و دو روز به مرخصی می‌رود و دیروز اولین روز کار او بعد از یک مرخصی بوده است.
- مجید سه روز کار می‌کند و یک روز به مرخصی می‌رود. او دیروز در مرخصی بوده است.

اولین روز تعطیلی نگهبان چند روز دیگر است؟

الف) ۴   ب) ۷   ج) ۱۱   د) ۱۹   هـ) نگهبان هیچ‌گاه تعطیلی نخواهد داشت.

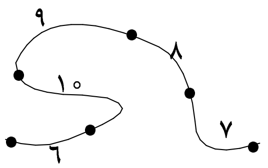
۲) عددهای ۱ تا ۷۸ را به‌ترتیب حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره‌یی نوشته‌ایم. عدد ۱ را به‌عنوان عدد جاری انتخاب کرده و عملیات زیر را آن‌قدر تکرار می‌کنیم که تنها یک عدد بر روی دایره باقی بماند:

- اگر عدد جاری مساوی x باشد، آن را از روی دایره حذف، به هر یک از x عدد بعدی (در جهت عقربه‌های ساعت) بر روی دایره یک واحد اضافه، و عدد $x + 1$ام پس از آن را به‌عنوان عدد جاری انتخاب می‌کنیم.

توجه داشته باشید که اگر تعداد عددهای باقی مانده بر روی دایره از x کم‌تر باشد، ممکن است به یک یا چند عدد بیش از یک واحد اضافه شود. عددی که در نهایت بر روی دایره می‌ماند، چه باقیمانده‌یی بر ۵ دارد؟

الف) صفر   ب) ۱   ج) ۲   د) ۳   هـ) ۴

۳) شکل روبه‌رو ۵ شهر و جاده‌های بین آن‌ها را نشان می‌دهد. عددهای بین شهرهای متوالی، نشان‌گر مسافت بین آن‌هاست. می‌خواهیم پمپ بنزینی بر روی جاده یا در یکی از شهرها احداث کنیم به‌طوری که مجموع مسافت شهرهای مختلف تا پمپ بنزین که آن را y می‌نامیم حداقل باشد. جزء صحیح y چند است؟ (جزء صحیح عدد x، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بزرگ‌تر نباشد.)



الف) ۶۳   ب) ۶۹   ج) ۷۰   د) ۷۶   هـ) ۹۲

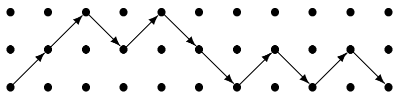
۴) ده نقطه‌ی متمایز a_1، a_2، ...، و a_{10} بر روی صفحه‌یی قرار دارند به‌طوری که هیچ سه‌تایی از آن‌ها روی یک خط نیستند. برای هر سه عدد متمایز i، j، و k، مجموع تمام زاویه‌های $\angle a_i a_j a_k$ به‌طوری که $\angle a_i a_j a_k < 180^\circ$ چند درجه است؟

الف) ۱۸۲۰۰   ب) ۱۹۸۰۰   ج) ۲۱۶۰۰   د) ۳۳۶۰۰   هـ) ۴۳۲۰۰

۵) به چند طریق می‌توان تعدادی از خانه‌های غیر مجاور در یک صفحه‌ی 4×2 را علامت زد؟ (دو خانه مجاور هستند اگر در یک ضلع مشترک باشند.)

الف) ۱۷   ب) ۲۶   ج) ۳۴   د) ۴۱   هـ) ۵۴

۶) شکل روبه‌رو یک جدول ۱۱ × ۳ با ۳۳ نقطه است. می‌خواهیم با استفاده از حرکت‌های مورب (مانند شکل روبه‌رو) از نقطه‌ی گوشه‌ی سمت چپ و پایین به نقطه‌ی گوشه‌ی سمت راست و پایین برویم. توجه کنید که با هر حرکت مورب فقط می‌توان به سمت راست شکل رفت. این کار به چند طریق ممکن است؟

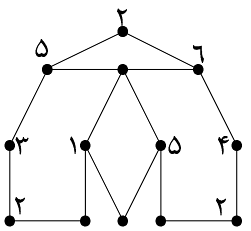


الف) $2^4 \times 3^2$ ب) $\binom{10}{5} \times 3$ ج) 2^5 د) $\binom{10}{5}$ ه) 2^4

۷) مهدی عدد مخفی x از مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۵۳ را انتخاب می‌کند. مریم می‌خواهد با تعدادی سؤال از عدد x آگاه شود. مریم در هر مرحله دو عدد a و b را با فرض $1 \le a < b \le 53$ انتخاب می‌کند. اگر $x = a$ یا $x = b$، مهدی مقدار x را به مریم می‌گوید و کار تمام است. در غیر این صورت مهدی یکی از سه جواب زیر را به مریم می‌دهد که عدد انتخابی او کوچک‌تر از a، بین a و b، یا بزرگ‌تر از b است. مریم با چند سؤال حتماً می‌تواند عدد مهدی را پیدا کند؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ٦ ه) ۷

۸) شکل روبه‌رو ۱۳ نقطه را نشان می‌دهد که توسط ١٦ پاره‌خط به هم متصل شده‌اند. در ابتدا برای هر نقطه یک عدد طبیعی به‌عنوان برچسب آن نقطه در نظر گرفته شده است. پس از آن در هر مرحله برای هر نقطه، از بین نقاط متصل به آن، نقطه‌یی که بزرگ‌ترین و نقطه‌یی که کوچک‌ترین برچسب را در مرحله‌ی قبل داشته است در نظر گرفته، مجموع برچسب آن دو را به‌عنوان برچسب آن نقطه در آن مرحله قرار می‌دهیم. در شکل داده‌شده، برچسب بعضی از نقطه‌ها در ابتدا بر روی آن‌ها نشان داده شده است. در مورد مجموع برچسب بقیه‌ی نقاط در انتهای مرحله‌ی سوم چه می‌توان گفت؟



الف) زوج است و بر ۳ بخش‌پذیر است. ب) فرد است و بر ۳ بخش‌پذیر است.
ج) زوج است و بر ۳ بخش‌پذیر نیست. د) عدد اول است.
ه) احتمال درستی هر کدام از چهار مورد فوق وجود دارد.

۹) آزمونی شامل ۴۰ پرسش ۵ گزینه‌یی است. در این آزمون هر پاسخ درست ۴ نمره‌ی مثبت، هر پاسخ نادرست ۱ نمره‌ی منفی، و هر پرسش بدون پاسخ نمره‌ی صفر دارد. کم‌ترین تعداد شرکت‌کنندگان در این آزمون چه‌قدر باشد تا مطمئن شویم که حداقل دو نفر نمره‌ی برابر می‌گیرند؟

الف) ۱۵٦ ب) ۱۹۱ ج) ۱۹۴ د) ۱۹٦ ه) ۲۰۱

۱۰) ۵ تیم فوتبال در یک تورنمنت به صورت دوره‌یی با یک‌دیگر مسابقه داده‌اند. هر باخت، مساوی، و برد به‌ترتیب صفر، یک، و سه امتیاز دارد. اگر بدانیم که هر دو تیم با هم یک مسابقه برگزار کرده‌اند و نیز بدانیم که پس از پایان تورنمنت تیم اول ۹ و تیم دوم ۷ امتیاز کسب کرده‌اند، تیم چهارم حداکثر چند امتیاز کسب کرده است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ٦ ه) ۷

۱۱) یک ماشین محاسبه‌گر یک حافظه‌ی داخلی به نام M دارد. این ماشین می‌تواند با انجام دستورهای زیر یک عبارت را محاسبه کند:

- $\mathrm{Add}\ X$: مقدار X را با مقدار M جمع و حاصل را در M ذخیره می‌کند.
- $\mathrm{Mul}\ X$: مقدار X را در مقدار M ضرب و حاصل را در M ذخیره می‌کند.

در دستورهای فوق X می‌تواند یک عدد صحیح یا یک متغیر باشد. فرض کنید مقدار M در ابتدا صفر است. برای مثال، دستورهای زیر، از راست به چپ، عبارت $ax + ۵$ را محاسبه می‌کند: $\mathrm{Add}\ a$، $\mathrm{Mul}\ x$، و $\mathrm{Add}\ 5$.
کدام یک از عبارت‌های زیر با این ماشین قابل محاسبه نیست؟

الف) $ax^۲ + bx + c$ ب) $(a+b)xy + ya$ ج) $(ax+by)(a+b)$
د) $۳x^۵ + ۱$ ه) همه‌ی این عبارت‌ها را می‌توان محاسبه کرد.

۱۲) اگر گزاره‌های زیر درباره‌ی گزینه‌های همین سؤال باشند و بدانیم که دقیقاً یک گزینه درست است، گزینه‌ی درست کدام است؟

الف) اگر گزینه‌ی «ب» درست باشد، گزینه‌ی «د» نادرست است.
ب) گزینه‌ی «ب» درست است.
ج) اگر یکی از گزینه‌های «الف» یا «ه» درست باشد، گزینه‌ی «د» درست است.
د) گزینه‌های «الف» و «ب» درست هستند.
ه) هیچ‌کدام از گزینه‌های بالا درست نیستند.

۱۳) به چند حالت می‌توان از یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی به‌ترتیب سه زیرمجموعه‌ی $A_۱$، $A_۲$، و $A_۳$ را انتخاب کرد به‌طوری که $A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳ = \phi$؟ ($A_i$ ها لزوماً متمایز نیستند.)

الف) $۲^{۱۰}$ ب) $۲^{۱۵}$ ج) $۳^{۱۰}$ د) $۲^{۲۰}$ ه) $۷^{۱۰}$

۱۴) یکان یک عدد k رقمی ۷ است. می‌دانیم اگر یکان این عدد را از سمت راست عدد برداریم و در سمت چپ آن بگذاریم، عدد ما ۵ برابر می‌شود. k حداقل چند است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ٦ د) ۷ ه) ۱۰

۱۵) تعداد رشته‌هایی به طول ۱۰ متشکل از A، T، C، و G را بیابید که در آن‌ها A و T مجاور هم نباشند و C و G نیز مجاور هم نباشند.

الف) ۲۰۴۸ ب) $۴^۹$ ج) $۴^{۱۰} - ۴ \times ۱۰ \times ۲^۸$ د) ۱۰۲۴ ه) $۴^٦$

۱۶) ارزش یک عدد $\overline{a_۵a_۴a_۳a_۲a_۱a_۰}$ در مبنای ۱۰− برابر است با:

$$a_۵ \times (-۱۰)^۵ + a_۴ \times (-۱۰)^۴ + \cdots + a_۱ \times (-۱۰) + a_۰$$

تعداد اعداد یک‌رقمی تا ٦ رقمی در مبنای ۱۰− که ارزش آن‌ها منفی است، چند تا است؟ (برای اعدادی که کم‌تر از ٦ رقم دارند، رقم‌های سمت چپ را صفر در نظر بگیرید.)

الف) ۱۰۱۰۱۰ ب) ۸۱۹۰۰۰ ج) ۵۰۰۰۰۰ د) ۵۰۹۰۹۰ ه) ۹۰۹۰۹۰

۱۷) به چند طریق می‌توان اعداد ۰ و ۱ را در خانه‌های یک جدول 15×10 قرار داد به‌طوری‌که مجموع هر ۴ عدد متوالی در یک سطر یا یک ستون عددی زوج باشد؟

الف) صفر ب) ۵۱۲ ج) 2^{16} د) $\binom{15}{4}\binom{10}{4}$ ه) $\frac{2^{150}}{\binom{15}{4}\binom{10}{4}}$

۱۸) ۸ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. به چند طریق می‌توان این نقطه‌ها را دوبه‌دو به هم متصل کرد، به‌طوری که هیچ دو وتری از ۴ وتر حاصل، هم‌دیگر را قطع نکنند؟ (وتر یک دایره پاره‌خطی است که دو نقطه از محیط دایره را به هم وصل می‌کند.)

الف) ۸ ب) ۱۴ ج) ۱۶ د) ۱۸ ه) ۲۴

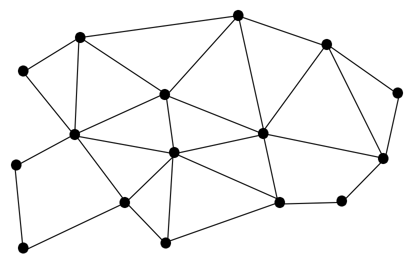
۱۹) از دو عدد دودویی A و B، عدد دودویی $C = A \oplus B$ را به این صورت به‌دست می‌آوریم: اگر رقم‌های iام A و B یکسان باشند، رقم iام C برابر صفر و در غیر این صورت برابر ۱ است (در سمت چپ هر عدد به اندازه‌ی کافی می‌توان رقم صفر اضافه کرد). مثلاً $00010 = 110 \oplus 00100$. حال بر روی عدد دودویی x عمل زیر را انجام می‌دهیم: x را به دو قسمت دل‌خواه x_1 و x_2 تقسیم می‌کنیم و x را برابر $x_1 \oplus x_2$ قرار می‌دهیم. مثلاً اگر $x = 11000100$، بر اساس یک حالت از تقسیم x داریم: $x_1 = 110$ و $x_2 = 00100$. یک عدد دودویی را «جالب» می‌گوییم اگر بتوان با تکرار عمل بالا آن را به ۱ تبدیل کرد. چند عدد دودویی به طول ۱۰ «جالب» است؟ (رقم‌های سمت چپ یک عدد دودویی می‌تواند صفر باشد.)

الف) ۳۲ ب) ۱۰۲۴ ج) ۵۱۱ د) ۱۰۲۳ ه) ۵۱۲

۲۰) می‌خواهیم تعدادی مهره‌ی 1×2 را در یک جدول 1×12 بچینیم به‌طوری‌که هر مهره دقیقاً روی دو خانه‌ی مجاور قرار گیرد و دیگر نتوانیم هیچ مهره‌یی روی جدول قرار دهیم. به چند طریق این کار ممکن است؟

الف) ۱۹ ب) ۲۰ ج) ۲۱ د) ۲۲ ه) ۲۳

۲۱) درجه‌ی یک رأس در گراف برابر تعداد یال‌هایی از گراف است که به آن متصل هستند. در گراف مقابل به هر رأس، عددی برابر مجموع درجه‌های همسایه‌های آن رأس نسبت می‌دهیم. فرض کنید مجموع این اعداد برابر A شود. در گام بعدی روی هر یال یک رأس جدید اضافه می‌کنیم و دوباره برای هر رأس، همان عمل را انجام می‌دهیم. مجموع اعداد جدید را B می‌نامیم. $B - A$ چند است؟



الف) ۳۰ ب) ۶۰ ج) ۶۲ د) ۱۲۰ ه) ۱۲۴

۲۲) یک شرکت بشکه‌هایی از چهار ماده‌ی شیمیایی مختلف به‌نام‌های A، B، C، و D تولید و در انبارهای خود ذخیره می‌کند. این شرکت ۴ انبار دارد که در هر انبار ۴ بشکه از انواع A، B، C، و D موجود است (از هر ماده یک بشکه). این مواد شیمیایی در صورتی که با هم مخلوط شوند، خطرناک هستند. به همین دلیل شرکت تصمیم دارد بشکه‌ها را بین این انبارها طوری جابه‌جا کند که در نهایت هر انبار حاوی ۴ بشکه از یک نوع ماده‌ی شیمیایی باشد. برای این کار از یک کامیون استفاده می‌شود. این کامیون می‌تواند در هر بار جابه‌جایی حداکثر ۲ بشکه را از یک انبار به یکی دیگر از انبارهای شرکت انتقال دهد. حداقل با چند بار جابه‌جایی می‌توان این کار را انجام داد؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۱۰

۲۳) تعدادی عدد طبیعی متفاوت داده شده‌اند که مجموعشان برابر ۱۳ می‌باشد. بیش‌ترین مقدار حاصل‌ضربشان چه‌قدر است؟

الف) ۴۲ ب) ۶۰ ج) ۷۲ د) ۷۵ ه) ۸۰

۲۴) نقطه‌ی (X,Y) داده شده است. هر بار می‌توانیم به مقدار X یا به مقدار Y یک واحد اضافه کنیم و به نقطه‌ی جدید (X',Y') برویم. می‌خواهیم با تکرار عمل بالا از نقطه‌ی $(۱,۱)$ به نقطه‌ی $(۵,۵)$ برسیم. برای این کار باید ۸ بار عمل فوق را انجام دهیم و از ۷ نقطه‌ی میانی بگذریم، یعنی

$$(۱,۱) \rightarrow (x_۱,y_۱) \rightarrow \cdots \rightarrow (x_۷,y_۷) \rightarrow (۵,۵).$$

می‌خواهیم این نقاط را طوری انتخاب کنیم که $x_۱ \times x_۲ \times \cdots \times x_۷ \times y_۱ \times y_۲ \times \cdots \times y_۷$ ماکزیمم باشد. این مقدار ماکزیمم در کدام بازه قرار دارد؟

الف) بین ۱۰۰,۰۰۰ و ۱,۰۰۰,۰۰۰
ب) بین ۱,۰۰۰,۰۰۰ و ۵,۰۰۰,۰۰۰
ج) بین ۵,۰۰۰,۰۰۰ و ۲۰,۰۰۰,۰۰۰
د) بین ۲۰,۰۰۰,۰۰۰ و ۶۰,۰۰۰,۰۰۰
ه) بیش از ۶۰,۰۰۰,۰۰۰

۲۵) دنباله‌یی از اعداد ۱ تا ۹ داده شده است. روی این دنباله الگوریتم زیر را انجام می‌دهیم. ابتدا ۳ عنصر اول دنباله را مرتب می‌کنیم. بعد از آن عناصر سوم و چهارم و پنجم را مرتب می‌کنیم. بعد عناصر پنجم و ششم و هفتم و در نهایت عناصر هفتم و هشتم و نهم را مرتب می‌کنیم. برای چه تعداد از جایگشت‌های اعداد یک تا نه دنباله‌یی که با این روش به‌دست می‌آید، مرتب است؟

الف) ۸۱ ب) ۵۱۲ ج) ۱۰۲۴ د) ۱۲۹۶ ه) ۲۵۴۲

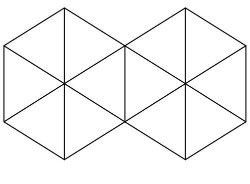
۲۶) ۷۰۰ سکه را در صد ستون ۷ تایی قرار داده‌ایم. از هر ستون که حداقل ۳ سکه دارد، ۲ سکه برمی‌داریم، یکی را دور می‌اندازیم و دومی را روی ستون سمت چپ قرار می‌دهیم (در مورد سمت چپ‌ترین ستون، سکه‌ی دوم را نیز دور می‌اندازیم). این‌کار را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا هیچ ستونِ ۳ سکه‌یی و بیش‌تر نداشته باشیم. در پایان مجموعاً در همه‌ی صد ستون چند سکه باقی مانده است؟

الف) ۱۰۰ ب) ۱۹۷ ج) ۱۹۸ د) ۱۹۹ ه) ۲۰۰

۲۷) رقم‌های یک سیستم عددنویسیِ باستانی عبارت‌اند از: X با ارزش ۱۰، Y با ارزش ۹، V با ارزش ۵، U با ارزش ۴، و I با ارزش ۱. هر عدد در این سیستم، از کنار هم قرار گرفتن تعدادی از ارقام فوق تشکیل می‌شود به‌طوری‌که ابتدا ارقام X و Y به ترتیب دل‌خواه، سپس ارقام U و V به ترتیب دل‌خواه، و در نهایت ارقام I قرار می‌گیرند. مثلاً، $YXII = ۹ + ۱۰ + ۱ + ۱ = ۲۱$، و $VVUVII = ۵ + ۵ + ۴ + ۵ + ۱ + ۱ = ۲۱$. برای عدد ۱۳، چند نمایش مختلف در سیستم فوق وجود دارد؟

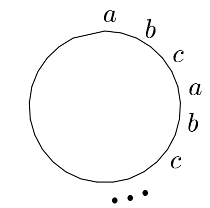
الف) ۱۲ ب) ۱۳ ج) ۱۴ د) ۱۵ ه) ۱۶

۲۸) ۲۳ چوب کبریت به‌صورت روبه‌رو چیده شده‌اند. حداقل چند چوب کبریت باید برداریم تا هیچ مثلثی در شکل باقی نماند؟ (هر پاره‌خط کوچک در شکل یک چوب کبریت است.)



الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۹

۲۹) حروف a، b، و c را مانند شکل به‌طور متناوب دور یک دایره چیده‌ایم. می‌دانیم که در مجموع ۴۸ حرف دور دایره قرار داده‌ایم. سپس از یکی از حروف a شروع کرده و در جهت عقربه‌های ساعت حروف را یک در میان حذف می‌کنیم (خود اولین حرف نیز حذف می‌شود) تا در نهایت، دو حرف باقی بماند. این دو حرف به‌ترتیب نسبت به مبدأ، کدام دو حرف هستند؟



الف) اول a، بعد b ب) اول c، بعد a ج) اول c، بعد b د) اول a، بعد c ه) اول b، بعد c

۳۰) ۲۰۰۰ بلوک ساختمانی هر یک به‌تنهایی بر روی زمین قرار دارند. می‌خواهیم برجی با قرار دادن همه‌ی این بلوک‌ها روی هم بسازیم. برای این کار تعداد نامحدودی جرثقیل داریم که می‌توانند به‌صورت هم‌زمان کار کنند. هر جرثقیل می‌تواند یک برج متشکل از یک یا چند بلوک را بر روی یک برج دیگر قرار دهد و یک برج جدید بسازد. اگر تعداد بلوک‌های برجی که توسط جرثقیل برداشته می‌شود کم‌تر یا مساوی ۱۰۰ باشد، این کار یک ساعت و در غیر این‌صورت دو ساعت طول می‌کشد. حداقل چند ساعت برای ساختن برج ۲۰۰۰ بلوکی لازم است؟

الف) ۱۱ ب) ۱۲ ج) ۱۳ د) ۱۴ ه) ۱۵

۳۱) یک ماتریس M با درایه‌های صفر و یک و با ابعاد $2^n \times 2^n$ موجود است. S رشته‌ی متناظر با ماتریس M را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم: اگر کلیه‌ی درایه‌های M صفر باشد، $S = 0$ و اگر کلیه‌ی درایه‌های M یک باشد، $S = 1$. در غیر این‌صورت ماتریس را به چهار ماتریس مساوی M_1، M_2، M_3 و M_4 (مطابق ماتریس بالا از شکل روبه‌رو) تقسیم می‌کنیم. رشته‌ی S_i $(i = 1,2,3,4)$ متناظر با ماتریس M_i را به‌دست می‌آوریم. سپس $S = 2S_1S_2S_3S_4$. برای مثال رشته‌ی متناظر ماتریس پایین از شکل روبه‌رو ۲۱۰۰۱ است.

M_1	M_2
M_3	M_4

۱	۰
۰	۱

کدام‌یک از رشته‌های زیر ممکن است رشته‌ی متناظر یک ماتریس صفر و یک باشد؟

۱) ۲۰۲۲۱۱۱۰۱۱۱۱۱ ۲) ۲۱۱۲۰۰۲۰۰۰۰۰۱ ۳) ۲۰۱۰۲۱۰۲۱۰۱۰۱۰

الف) ۱ و ۳ ب) ۱ و ۲ ج) ۱ و ۲ و ۳ د) ۲ و ۳ ه) هیچ‌کدام

۳۲) در سؤال قبلی چند رشته‌ی متناظر برای ماتریس‌های 16×16 وجود دارد؟

الف) 16^{64} ب) 2^{16} ج) 2^{64} د) 4^{256} ه) 4^{16}

۳۳) پنج نفر به نام‌های احسان، حامد، حسین، شادی، و الهام در تعدادی جلسه شرکت کردند. می‌دانیم تصادفاً در هر جلسه دقیقاً یک نفر غایب بوده است. الهام در ۵ جلسه شرکت کرد و حامد در ۸ جلسه. در ضمن می‌دانیم سه نفر دیگر هر یک در بیش‌تر از ۵ جلسه و کم‌تر از ۸ جلسه شرکت کرده‌اند. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سه نفر درست است؟

الف) هر سه در ۶ جلسه شرکت کرده‌اند. ب) دو نفر در ۶ جلسه و یک نفر در ۷ جلسه شرکت کرده‌اند.
ج) دو نفر در ۷ جلسه و یک نفر در ۶ جلسه شرکت کرده‌اند.
د) هر سه در ۷ جلسه شرکت کرده‌اند. ه) اطلاعات داده شده برای حل مسئله کافی نیست.

۳۴) در دو گوشه‌ی متقابل یک صفحه‌ی شطرنجی ۲۰۰۰ × ۲۰۰۰ دو مهره‌ی اسب قرار دارد. این دو مهره به‌نوبت حرکت می‌کنند. حرکت مهره‌ی اسب ۱ خانه در جهت عمودی یا افقی و ۲ خانه در جهت دیگر است. کم‌ترین مجموع تعداد حرکات لازم برای دو مهره چه‌قدر است تا این دو مهره روی یک خانه قرار بگیرند؟

الف) ۱۳۳۰   ب) ۱۳۳۱   ج) ۱۳۳۲   د) ۱۳۳۳   ه) ۱۳۳۴

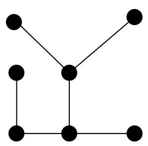
۳۵) در جزیره‌یی فرد عجیبی زندگی می‌کند که در روزهای سه‌شنبه، چهارشنبه، و پنج‌شنبه همه‌ی جمله‌هایی که می‌گوید دروغ است و در بقیه‌ی روزهای هفته همه‌ی جمله‌های او راست است. این فرد عجیب در چند روز از یک هفته می‌تواند جمله‌ی زیر را بگوید: «من هم دیروز دروغ گفتم و هم فردا»؟

الف) ۱   ب) ۲   ج) ۳   د) ۴   ه) ۵

توجه کنید که سؤال‌های ۳۶ تا ۴۰ وجود ندارند و باید در پاسخ‌نامه سؤال‌های بله — خیر را از شماره‌ی ۴۱ علامت بزنید.

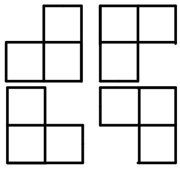
سؤالات بله ـ خیر

۴۱) نقشه‌ی شهرهای یک کشور در شکل روبه‌رو داده شده است. در این شکل هر دایره متناظر یک شهر و پاره‌خط‌های بین آن‌ها متناظر جاده‌های بین این شهرهاست. هر شهر دارای یک مخزن بنزین است. همه‌ی این مخزن‌ها در ابتدا تهی هستند بجز یک شهر دل‌خواه به‌نام شهر مبدأ که مخزن آن ۳۰ لیتر بنزین دارد. در شهر مبدأ ماشینی قرار دارد که می‌تواند حداکثر ۳ لیتر بنزین حمل کند، و برای رفتن از هر شهر به شهر مجاور یک لیتر از این بنزین را مصرف می‌کند. ماشین می‌تواند مقداری از بنزینی را که حمل می‌کند در مخزن بنزین یک شهر خالی کند، یا از مخزن بنزین آن شهر مقداری بنزین برای حمل بردارد. آیا می‌توان با انتخاب شهر مبدأ مناسب ۳۰ لیتر بنزین موجود در مخزن آن شهر را به‌وسیله‌ی ماشین طوری بین شهرها پخش کرد که پس از بازگشت ماشین به شهر مبدأ، در مخزن بنزین هر شهر حداقل یک لیتر بنزین مانده باشد؟

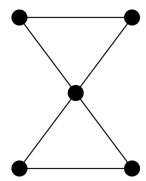


۴۲) جایگشت (۱, ۲, ۴, ۳, ۵, ۷, ۶) از اعداد ۱ تا ۷ را در نظر بگیرید. در هر مرحله می‌توانیم با داشتن یک جایگشت، تعداد دل‌خواهی از اعداد آخر آن را برداشته، به اول آن منتقل کنیم و به جایگشت جدیدی برسیم. مثلاً جایگشت فوق با برداشتن ۳ عدد آخر و انتقال آن‌ها، به جایگشت (۵, ۷, ۶, ۱, ۲, ۴, ۳) تبدیل می‌شود. آیا می‌توان جایگشت فوق را با انجام تعداد دل‌خواهی از تبدیل‌های مذکور، سرانجام به جایگشت (۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷) تبدیل کرد؟

۴۳) یک جدول $m \times n$ داریم ($m > ۲, n > ۲$) که به‌صورت دل‌خواه در خانه‌های آن اعداد ۰ یا ۱ قرار داده‌ایم. در هر حرکت می‌توانیم به هر یک از سه خانه‌ی این جدول که تشکیل یکی از اشکال روبه‌رو را می‌دهند یک واحد اضافه کنیم. آیا با حرکاتی از نوع بالا می‌توانیم اعداد نوشته شده در تمام خانه‌های جدول را زوج کنیم؟



۴۴) یک کشور دارای چند شهر و چند جاده‌ی بین شهری است. در برنامه‌ی توسعه، دولت تصمیم می‌گیرد بین هر دو شهری که قبلاً با استفاده از دقیقاً دو جاده می‌شد از یکی به دیگری رفت، یک جاده تأسیس کند. مثلاً اگر یک کشور شامل سه شهر A، B، و C و دو جاده‌ی $A-B$ و $B-C$ باشد، بعد از برنامه‌ی توسعه، بین شهرهای A و C هم جاده تأسیس می‌شود. فرض کنید کشوری دارای ۵ شهر باشد. آیا ممکن است بعد از برنامه‌ی توسعه، شکل شهرها و جاده‌های این کشور مطابق شکل مقابل باشد؟ (دایره‌های توپر نشان‌گر شهرها و خط‌های بین آن‌ها نشان‌گر جاده‌ها هستند.)



۴۵) ۹ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند: هر بازی‌کن در نوبت خود دو نقطه که قبلاً به هم وصل نشده باشد را به هم متصل می‌کند، به‌طوری‌که وتر رسم شده وترهای قبلی را در داخل دایره قطع نکند. آیا بازی‌کن دوم می‌تواند طوری بازی کند که حتماً برنده شود؟ (توجه کنید که از یک نقطه می‌توان چند وتر رسم کرد.)

۴۶) دنباله‌ی ۳, ۱, ۵, ۲, ۷, ۶, ۸, ۹, ۱۰ را در نظر بگیرید. در هر مرحله می‌توانیم چهار عنصر متوالی دنباله را در نظر بگیریم و مکان زوج اول را با زوج دوم این چهارتایی عوض کنیم، مثلاً از روی دنباله‌ی فوق و با در نظر گرفتن چهار عدد مجاور ۱, ۵, ۲, ۷، می‌توان دنباله‌ی ۳, ۲, ۷, ۱, ۵, ۶, ۸, ۹, ۱۰ را به‌دست آورد. آیا با انجام تعداد دل‌خواهی از اعمال فوق می‌توان از دنباله‌ی بالا به دنباله‌ی ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰ رسید؟

۴۷) دو نفر بازی زیر را با ظرفی که شامل ۱۳۷۸ عدد کشمش است انجام می‌دهند:
هر بازی‌کن در نوبت خود می‌تواند ۱ یا ۳ یا ۵ کشمش بردارد. بازی‌کنی که آخرین کشمش (یا کشمش‌ها) را بردارد بازنده است. آیا بازی‌کن اول می‌تواند برنده‌ی این بازی شود؟

۴۸) در یک چندضلعی ساده (نه لزوماً محدب) تمام قطرها را رسم کرده‌ایم و روی هر قطر تعداد اضلاعی که توسط آن قطر قطع می‌شود را نوشته‌ایم (یک قطر یک ضلع را وقتی قطع می‌کند که با آن نقطه‌ی مشترکی داشته باشد.) آیا همواره مجموع اعداد نوشته شده روی قطرها زوج است؟

۴۹) دنباله‌ی ۱, ۰, ۱, ۰, ۰, ۰, ۱, ۱, ۰ از اعداد صفر و یک را در نظر بگیرید. در هر مرحله یکی از دو عمل زیر را می‌توانیم انجام دهیم:

- جای دو عنصر مجاور را با یک‌دیگر عوض کنیم.
- سه عنصر متوالی را در نظر گرفته و مقدار هر سه را تغییر دهیم (از صفر به یک و از یک به صفر تبدیل کنیم).

می‌گوییم دنباله‌ی A از دنباله‌ی B کوچک‌تر است اگر به‌ازای هر رقم یک در A، رقم متناظر آن در B هم برابر یک باشد. آیا می‌توان با شروع از دنباله‌ی بالا و استفاده از اعمالی که گفته شد به دنباله‌ی ۰, ۱, ۰, ۰, ۰, ۱, ۱, ۰, ۱ رسید، به شرط این که دنباله‌هایی که در طول مسیر تولید می‌شوند، غیر قابل مقایسه باشند؟ (دو دنباله‌ی A و B قابل مقایسه‌اند اگر حداقل یکی از آن‌ها از دیگری کوچک‌تر باشد.)

۵۰) عدد $N = ۳۲۱۰۰۰\ldots۰۰$ را با تعداد ارقام ۱۳۷۸ در نظر بگیرید. بر روی N عمل زیر را تکرار می‌کنیم: هر بار یک رقم دل‌خواه با مقدار k ($k > ۰$) را انتخاب می‌کنیم، سپس آن رقم را صفر کرده و به k رقم بعدی از چپ به راست یک واحد اضافه می‌کنیم. آیا با کم‌تر از ۱۱ بار تکرارِ این عمل می‌توان تمام رقم‌های N را به صفر و یک تبدیل کرد؟

«موفق باشید»