سه‌شنبه، ۱۸ جولای ۲۰۱۷

سوال ۱. برای هر $a_0 > 1$ دنباله $a_0, a_1, a_2, \ldots$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\text{به ازای هر } n \geqslant 0 \qquad a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{اگر } \sqrt{a_n} \text{ یک عدد صحیح باشد} \\ a_n + 3 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تمام مقادیر a_0 را بیابید که برای آن عددی مثل A وجود داشته باشد که به ازای نامتناهی مقدار n داشته باشیم $a_n = A$.

سوال ۲. فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی است. تمام توابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که به ازای هر دو عدد حقیقی x و y:

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

سوال ۳. یک شکارچی و یک خرگوش نامرئی در صفحه اقلیدسی بازی می‌کنند. A_0، نقطه آغازین حرکت خرگوش و B_0، نقطه آغازین حرکت شکارچی یکسان هستند. پس از $n-1$ مرحله از بازی، خرگوش در نقطه A_{n-1} و شکارچی در نقطه B_{n-1} قرار دارد. در n-امین مرحله بازی، سه اتفاق به این ترتیب می‌افتد:

(i) خرگوش به صورت نامرئی به نقطه A_n می‌رود به طوری که فاصله بین A_{n-1} و A_n دقیقاً برابر ۱ است.

(ii) یک دستگاه ردیابی نقطه P_n را به شکارچی گزارش می‌دهد. تنها چیزی که توسط دستگاه ردیابی برای شکارچی تضمین می‌شود این است که فاصله بین P_n و A_n حداکثر ۱ است.

(iii) شکارچی به صورت مرئی به نقطه B_n می‌رود به طوری که فاصله بین B_{n-1} و B_n برابر ۱ است.

آیا همیشه ممکن است که هر طوری خرگوش حرکت کند، و هر طوری نقاط توسط دستگاه ردیابی گزارش شود، شکارچی بتواند حرکاتش را طوری انتخاب کند که پس از 10^9 مرحله مطمئن باشد که فاصله‌اش از خرگوش حداکثر ۱۰۰ است؟

چهارشنبه، ۱۹ جولای ۲۰۱۷

سوال ۴. فرض کنید که R و S دو نقطه متمایز روی دایره Ω هستند به طوری که RS قطر نیست. فرض کنید ℓ خط مماس بر دایره Ω در نقطه R است. نقطه T به گونه‌ای است که S وسط پاره‌خط RT است. نقطه J طوری روی کمان کوچک‌تر RS از دایره Ω انتخاب شده است که Γ، دایره محیطی JST، خط ℓ را در دو نقطه متمایز قطع می‌کند. فرض کنید A آن نقطه اشتراک Γ و ℓ باشد که به R نزدیک‌تر است. خط AJ دایره Ω را مجدداً در نقطه K قطع می‌کند. ثابت کنید خط KT بر دایره Γ مماس است.

سوال ۵. عدد صحیح $N \geqslant ۲$ داده شده است. مجموعه‌ای از $N(N+۱)$ بازیکن فوتبال، که هیچ دوتایی از آن‌ها هم‌قد نیستند، در یک صف ایستاده‌اند. کارلوس کی‌روش می‌خواهد $N(N-۱)$ تا از این بازیکنان را حذف کند به طوری که $۲N$ بازیکن باقیمانده در صف، این N شرط را برآورده کنند.

(۱) هیچ بازیکنی بین بلندقدترین بازیکن و دومین بازیکن بلندقد قرار نگیرد،

(۲) هیچ بازیکنی بین سومین و چهارمین بازیکن بلندقد قرار نگیرد،

$\vdots$

(N) هیچ بازیکنی بین کوتاه‌قدترین بازیکن و دومین بازیکن کوتاه‌قد قرار نگیرد.

ثابت کنید چنین کاری همیشه ممکن است.

سوال ۶. یک زوج مرتب (x,y) از اعداد صحیح را یک *نقطه اولیه* می‌گوییم، اگر بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک x و y برابر ۱ باشد. فرض کنید S یک مجموعه متناهی از نقاط اولیه باشد. ثابت کنید عدد صحیح مثبت n و اعداد صحیح $a_۰$، $a_۱$، …، a_n وجود دارند، به طوری که به ازای هر (x,y) در S:

$$a_۰x^n + a_۱x^{n-۱}y + a_۲x^{n-۲}y^۲ + \cdots + a_{n-۱}xy^{n-۱} + a_ny^n = ۱.$$