International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

Language: **Persian (Farsi)**

Day: **1**

دوشنبه ۲۷ تیر ۱۳۹۰

مسأله ۱. برای هر مجموعه $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ از چهار عدد صحیح مثبت متمایز، مجموع $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ را با s_A نمایش می دهیم. فرض کنید n_A نشان دهنده تعداد زوج های (i, j) باشد که $1 \leq i < j \leq 4$ به طوری که $a_i + a_j$ عدد s_A را عاد کند. تمام مجموعه های A از چهار عدد صحیح مثبت متمایز را بیابید که بیشترین مقدار ممکن n_A را به دست می دهند.

مسأله ۲. فرض کنید $\mathcal{S}$ مجموعه ای متناهی از حداقل دو نقطه در صفحه باشد. فرض کنید هیچ سه نقطه ای از $\mathcal{S}$ هم خط نباشند. منظور از یک روند ***آسیاب بادی*** روندی است که با یک خط ℓ گذرنده از تنها یک نقطه $P \in \mathcal{S}$ شروع می شود. این خط در جهت ساعتگرد حول مرکز P دوران می کند تا اولین باری که نقطه دیگری متعلق به $\mathcal{S}$ را ملاقات کند. این نقطه دیگر، Q، به عنوان مرکز دوران جدید جایگزین می شود و حال خط در جهت ساعتگرد حول Q دوران می کند، تا وقتی که نقطه بعدی $\mathcal{S}$ را ملاقات کند. این روند تا ابد ادامه پیدا می کند. نشان دهید که می توانیم نقطه P در $\mathcal{S}$ و خط ℓ گذرنده از P را چنان انتخاب کنیم که روند آسیاب بادی حاصل، هر نقطه از $\mathcal{S}$ را نامتناهی بار به عنوان مرکز دوران به کار ببرد.

مسأله ۳. فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع با مقادیر حقیقی، تعریف شده روی مجموعه اعداد حقیقی باشد به طوری که

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

برای هر x و y حقیقی برقرار باشد. ثابت کنید $f(x) = 0$ برای هر $x \leq 0$.

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

بارم هر سؤال ۷ نمره می باشد.

Language: Persian

سه شنبه ۲۸ تیر ۱۳۹۰

مسأله ٤. فرض کنید $n > ۰$ یک عدد صحیح باشد. یک ترازوی دو کفه ای و n وزنه با وزن های $۲^۰, ۲^۱, \ldots, ۲^{n-۱}$ داده شده است. می خواهیم هر کدام از n وزنه را، یکی پس از دیگری، روی ترازو چنان قرار دهیم که کفه راست هرگز سنگین تر از کفه چپ نشود. در هر مرحله یکی از وزنه هایی را که هنوز روی ترازو قرار داده نشده اند، انتخاب می کنیم، و آن را روی کفه چپ یا کفه راست قرار می دهیم، تا زمانی که همه وزنه ها قرار داده شوند.

تعداد روش هایی را به دست آورید که می توانیم این کار را انجام دهیم.

مسأله ٥. تابع f از مجموعه اعداد صحیح به مجموعه اعداد صحیح مثبت را در نظر بگیرید. فرض کنید برای هر دو عدد صحیح m و n، عبارت $f(m) - f(n)$ بر $f(m-n)$ بخش پذیر است. ثابت کنید برای همه اعداد صحیح m و n با $f(m) \leq f(n)$، عدد $f(n)$ بر $f(m)$ بخش پذیر است.

مسأله ٦. مثلث حادة الزاویه ABC با دایره محیطی Γ را در نظر بگیرید. فرض کنید ℓ خطی مماس بر Γ باشد، و فرض کنید ℓ_a، ℓ_b و ℓ_c به ترتیب خطوط قرینه ℓ نسبت به خطوط BC، CA و AB باشند. نشان دهید دایره محیطی مثلثی که با خطوط ℓ_a، ℓ_b و ℓ_c مشخص می شود، بر دایره Γ مماس است.

زمان: ٤ ساعت و ۳۰ دقیقه

بارم هر سؤال ۷ نمره می باشد.