به نام او

در ادامه، راه‌حل سؤال‌های آزمون مرحلهٔ دوم سی و پنجمین المپیاد ریاضی آمده است. در این مورد لازم است به چند نکته اشاره شود:

۱. از نظر کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی راه‌حل‌های این سؤالات محدود به این‌ها نیست و هر راه‌حل درستی مورد قبول قرار خواهد گرفت.
۲. کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی و تیم مصحح هر سؤال، تا قبل از شروع تصحیح برگه‌ها و در طول تصحیح تلاش خواهند کرد راه‌حل‌های دیگر را نیز شناسایی کنند و در بارم‌بندی به آن‌ها توجه داشته باشند.
۳. آن‌چه در ادامه می‌آید ممکن است در بیان برخی جزئیات کامل نباشد زیرا هدف این است که دبیران و دانش‌آموزان عزیز با کلیات راه‌حل‌ها آشنا شوند و اگر راه‌حل دیگری دارند آن را به اطلاع کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی برسانند.
۴. لطفاً اگر می‌خواهید راه‌حل جدیدی ارسال کنید، آن را بادقت و منظم بنویسید. حتماً راه‌حل‌های موجود را مطالعه فرمایید و از فرستادن راه‌حل تکراری اجتناب کنید.

با تشکر،
کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی
اردیبهشت ۱۳۹۶

۱. در این سؤال منظور از $\left(a,b\right)$، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b است.

الف) ثابت کنید دنبالهٔ a_1، a_2، a_3 و... از اعداد طبیعی وجود ندارد که برای هر $i,j \in \mathbb{N}$ که $i < j$

$$\left(a_i + j, a_j + i\right) = 1.$$

ب) گیریم p عددی اول و فرد باشد. ثابت کنید دنبالهٔ a_1، a_2، a_3 و... از اعداد طبیعی وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i,j \in \mathbb{N}$، که $i < j$، عبارت $\left(a_i + j, a_j + i\right)$ بر p بخش‌پذیر نباشد.

راه حل:

الف) اگر i، a_i، j و a_j همگی زوج یا همگی فرد باشند $(a_i + j, a_j + i)$ زوج می‌شود. پس به جز حداکثر دو مقدار i زوجیت i و a_i متفاوت است پس i و j وجود دارند که i فرد و j زوج باشد و a_i زوج و a_j فرد باشد که مجدداً $\left(a_i + j, a_j + i\right)$ زوج می‌شود.

ب) دنباله را چنین می سازیم:

$$a_n = pn - n + 1$$

اگر $p|pn - n + 1 + m$ و $p|pm - m + 1 + n$ با کم کردن دو رابطه داریم:

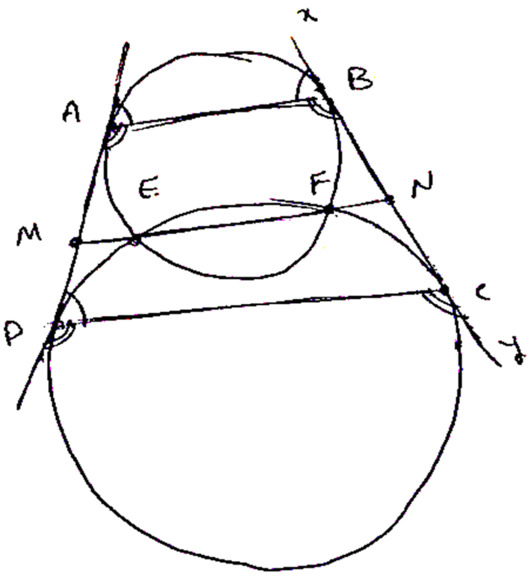
$$p|n - m$$

اگر با رابطه اول جمع کنیم $p|pn + 1$، که تناقض است.

نکته: راه‌های دیگری هم برای ساختن این دنباله وجود دارد.

۲. نقطهٔ P داخل ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$، که در آن $AB \parallel CD$، طوری انتخاب شده که $\widehat{APB} > \widehat{ADC}$ و $\widehat{DPC} > \widehat{ABC}$. ثابت کنید $AB + CD > AD + BC$.

راه‌حل:



در ذوزنقه متساوی‌الساقین می‌دانیم $\hat{ADC} = \hat{ABx}$ و $\hat{ABC} = \hat{DCy}$.

اگر دایره‌ای بکشیم که در A و B بر AD و BC مماس باشند، می‌دانیم که نقطه P درون این دایره است. چرا که $\hat{APB} > \hat{ABx}$. همچنین اگر دایره‌ای بکشیم که در C و D بر BC و AD مماس باشد به دلیل مشابه می‌دانیم که نقطه P درون این دایره است. پس این دو دایره همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. اگر این دو نقطه را E و F بنامیم و EF را رسم کنیم تا AD و BC را در M و N قطع کند. داریم:

$NF \cdot NE = NB^2 = NC^2$ $\Rightarrow$ طبق نامساوی حسابی هندسی $\Rightarrow$ $NF + NE > NB + NC$

$ME \cdot MF = MA^2 = MD^2$ $\qquad$ $ME + MF > MA + MD$

حال اگر دو نامساوی را با هم جمع کنیم داریم:

$2MN > AD + BC$

و چون M و N وسط دو ساق هستند داریم:

$2MN = AB + DC$

پس حکم مسئله ثابت می‌شود

$AB + DC > AD + BC$

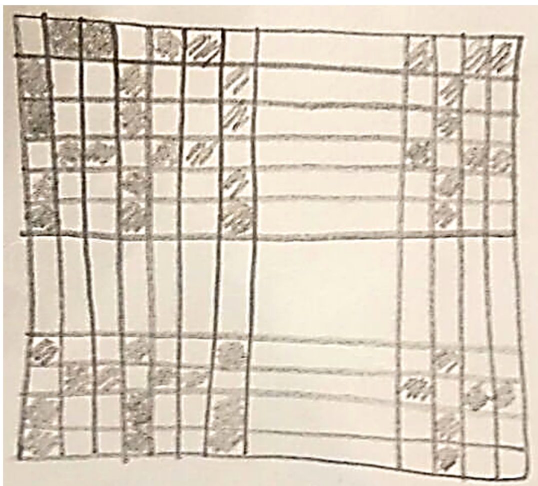
۳. جدولی $n \times n$ داریم که n بر ۳ بخش‌پذیر است. می‌خواهیم برخی از خانه‌های جدول را سیاه کنیم با این شرط که در هر زیرجدول $m \times m$ از آن، که $m > ۱$، تعداد خانه‌های سیاه از تعداد خانه‌های سفید بیش‌تر نباشد. حداکثر چند خانه را می‌توانیم سیاه کنیم؟

راه‌حل:

فرض کنید n برابر $۳k$ باشد. نشان می‌دهیم جواب مسأله برابر $۴k^۲$ است:

اگر جدول را به مربع‌های ۳×۳ افراز کنیم، به تعداد $k^۲$ مربع به وجود می‌آید که در هر یک حداکثر ۴ خانهٔ سیاه داریم، در نتیجه حداکثر $۴k^۲$ خانهٔ سیاه داریم. (۱)

شکل زیر مثالی با $۴k^۲$ خانهٔ سیاه را نشان می‌دهد، زیرا هر جدول ۳×۳ دقیقاً ۴ خانهٔ سیاه در آن دارد.



در این شکل رنگ‌آمیزی در راستاهای افقی و عمودی تناوب ۳ دارند.

یک زیرمربع $m \times m$ دل‌خواه را در نظر بگیرید. با استقرا روی m ثابت می‌کنیم مربع $m \times m$ روی این جدول ویژگی مسأله را دارد.

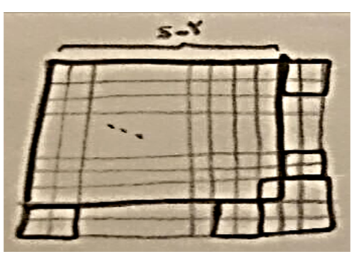
پایهٔ استقرا: $m = ۲,۳$ با بررسی ۹ حالت ۲×۲ و ۹ حالت ۳×۳ می‌بینیم که رنگ‌آمیزی ارائه‌شده این ویژگی را دارد.

حکم را برای $m = ۲,۳,\dots,s-۱$ فرض می‌کنیم و برای $m = s$ ثابت می‌کنیم.

در حالتی که s زوج است:

زیر مربع $s \times s$ را به مربع‌های ۲×۲ افراز می‌کنیم و طبق فرض استقرا هر مربع ۲×۲ در جدول حداکثر ۲ مربع سیاه دارد، پس مربع $s \times s$ نیز حداکثر نصف خانه‌هایش سیاه است.

در حالتی که s فرد است:



با توجه به فرض استقرا تعداد خانه‌های سیاه مربع $s \times s$ کوچک‌تر یا مساوی عبارت زیر است:

$$\frac{(s-۲)^۲-۱}{۲} + ۲ \times \left(۲ \times \frac{s-۳}{۲}\right) + \frac{۳^۲-۱}{۲}$$
$$= \frac{۱}{۲}(s^۲ - ۴s + ۴ - ۱ + ۴s - ۱۲ + ۹ - ۱)$$
$$= \frac{s^۲-۱}{۲}$$

۴. گیریم x و y دو عدد حقیقی مثبت و متمایز باشند که $x^۴ - y^۴ = x - y$. ثابت کنید:

$$\frac{x-y}{x^۶ - y^۶} \leq \frac{۴}{۳}\left(x+y\right).$$

راه‌حل:

می‌دانیم

$$x^۳ + x^۲y + xy^۲ + y^۳ = ۱ \Rightarrow (x^۲ + y^۲)(x+y) = ۱$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
&x^۶ - y^۶ \geq \frac{۳}{۴}\frac{(x-y)}{x+y} \\
&\Leftrightarrow x^۶ - y^۶ \geq \frac{۳}{۴}(x^۲ + y^۲)(x-y) \\
&\Leftrightarrow x^۶ - y^۶ \geq \frac{۳}{۴}(x^۲ + y^۲)(x^۴ - y^۴) \\
&\Leftrightarrow x^۶ - y^۶ \geq -۳x^۲y^۴ + ۳x^۴y^۲ \\
&\Leftrightarrow x^۶ - y^۶ \geq ۳x^۲y^۲(x^۲ - y^۲) \\
&\Leftrightarrow x^۴ + x^۲y^۲ + y^۴ \geq ۳x^۲y^۲ \\
&\Leftrightarrow x^۲ - y^۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

در نتیجه نابرابری مورد نظر برقرار است.

۵. پنج کودک باهوش دور میزی دایره‌ای نشسته‌اند. مربی تعدادی سیب را بین آن‌ها تقسیم می‌کند و می‌گوید: «من به برخی از شما تعدادی سیب داده‌ام و تعداد سیب هیچ دو نفری برابر نیست. هر کس علاوه بر این‌که تعداد سیب‌های خودش را می‌داند، سیب‌های دو نفری که در چپ و راستش هستند را هم می‌بیند.» سپس او تعداد کل سیب‌ها را اعلام می‌کند و از هر کس می‌خواهد که اختلاف تعداد سیب دو نفر روبه‌رویی خود را بگوید.

الف. ثابت کنید اگر تعداد سیب‌ها کم‌تر از ۱۶ باشد، دست‌کم یکی از کودکان می‌تواند با استدلال جواب درست را به‌دست آورد.

ب. نشان دهید اگر تعداد سیب‌ها ۱۶ باشد، مربی می‌تواند سیب‌ها را طوری تقسیم کند که هیچ کودکی نتواند جواب سؤال مربی را با اطمینان بفهمد.

راه‌حل:

الف) فرض می‌کنیم هیچ کودکی نتواند با استدلال جواب سؤال مذکور را بدهد و مجموع تعداد سیب‌ها دست‌کم ۱۶ است و به تناقض می‌رسیم.

لم) ثابت می‌کنیم جمع تعداد سیب‌های هر دو کودک مجاور دست‌کم ۵ است.

اولاً جمع تعداد سیب‌های دو کودک مجاور ۱ نیست چرا که تنها حالت ممکن ۰ سیب و ۱ سیب است و تفاضل یکتا مشخص می‌شود.

اگر جمع ۲ باشد نیز تنها حالت ۰ و ۲ ممکن است، زیرا تعداد سیب‌های هیچ دو کودکی برابر نیست.

اگر جمع تعداد سیب‌های دو کودک مجاور ۳ باشد با توجه به این‌که تنها دو حالت {۰,۳} یا {۱,۲} ممکن است رخ داده باشد، پس تعداد سیب‌های کودکان دیگر نباید از اعضای مجموعهٔ {۰,۱,۲,۳} باشد. پس جمع کل دست‌کم برابر با ۳ + ۴ + ۵ + ۶ یعنی ۱۸ است که از ۱۶ بیش‌تر می‌شود.

به طور مشابه اگر جمع تعداد سیب‌های دو کودک مجاور ۴ باشد دو حالت داریم. پس تعداد سیب بقیه از مجموعهٔ {۰,۱,۳,۴} نیست. پس جمع کل دست‌کم ۴ + ۲ + ۵ + ۶ = ۱۷ و از ۱۶ بیش‌تر است.

پس جمع تعداد سیب‌های هر دو کودک مجاور دست‌کم ۵ است. (لم اثبات شد.)

اگر ثابت کنیم یکی از کودکان دست‌کم ۶ سیب دارد مسأله حل می‌شود زیرا چهار نفر دیگر دو تا دو تا مجاورند پس طبق لم مجموعاً دست‌کم ۱۰ سیب دارند و تعداد کل سیب‌ها ۱۶ یا بیش‌تر خواهد شد.

اگر کودکی بدون سیب وجود داشته باشد طبق لم کودکان مجاورش باید ۵ و ۶ سیب داشته باشند که نتیجه مورد نظر ما را می‌دهد. لذا کافی است حالتی که تعداد سیب‌ها {۱,۲,۳,۴,۵} است را رد کنیم.

ابتدا توجه کنید در چینش این اعداد دور میز، ۱ باید مجاور ۴ و ۵ باشد که می‌دانیم ۱ + ۴ = ۵ و تنها حالات {۰,۵} و {۲,۳} می‌ماند که چون ۵ آمده {۲,۳} نمی‌توانند بیایند، پس تناقض است و در نتیجه حکم مسأله ثابت شد.

ب) مثال {۱,۴,۳,۲,۶} جواب است چرا که جمع مجاورها ۷، ۸، ۵، ۷ و ۵ است. هر کدام از دو عدد مجاور، از نظر کودک روبه‌رویی می‌توانست یکی صفر و دیگری جمعشان باشد. مثلاً {۴,۳} می‌توانست {۰,۷} باشد. (توجه کنید که {۰,۵,۷,۸} در مجموعهٔ اعداد روی دایره ظاهر نشده است.)

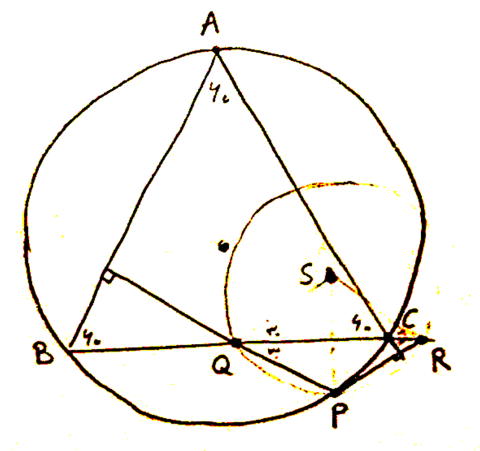
۶. X را نقطه‌ای متغیر روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گیریم. از X بر AB و AC دو عمود رسم می‌کنیم تا خط گذرنده از BC را به‌ترتیب در P و Q قطع کنند. مرکز دایرهٔ گذرنده از X، P و Q را Y می‌نامیم. (اگر X، P و Q بر هم منطبق باشند همان نقطه را Y می‌گیریم.)

الف. ثابت کنید اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، با تغییر X روی دایرهٔ محیطی، Y روی یک دایره حرکت می‌کند.

ب. عکس قسمت الف را ثابت کنید: اگر با تغییر X روی دایرهٔ محیطی، Y روی یک دایره حرکت کند، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

راه‌حل:

الف) چون مثلث متساوی‌الاضلاع است، Q و R هر دو ۳۰ درجه هستند و در نتیجه $PQ = PR$. فرض کنید S مرکز دایرهٔ محیطی مثلث PQR باشد.

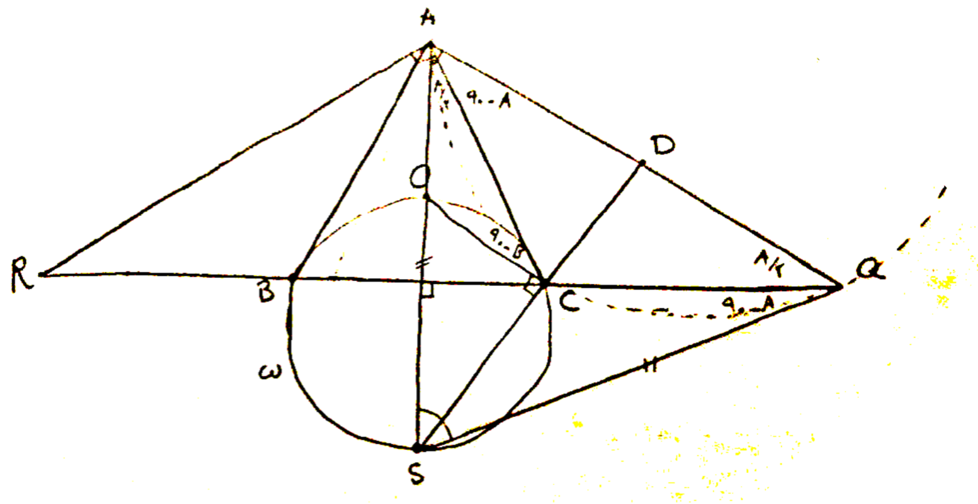


داریم $\widehat{QPR} = ۱۲۰ - ۲ \times ۳۰$ در نتیجه اندازهٔ کمان QR برابر ۱۲۰ درجه است و لذا $\widehat{QSR} = ۱۲۰$.

چون $SQ = SR$ پس SQR و SRQ هر دو ۳۰ درجه هستند. پس مثلث‌های PQR و SQR نسبت به BC قرینه‌اند پس S قرینهٔ P نسبت به BC است و حکم ثابت می‌شود.

ب) اگر P روی B یا C باشد به‌وضوح S مرکز دایرهٔ محیطی PQR روی B و C می‌افتد. اکنون اگر P روبه‌رو قطری A باشد S روی O قرار می‌گیرد. حال از روبه‌رو قطری A موازی BC رسم می‌کنیم و تقاطع آن با BC را P می‌گیریم. در این صورت مثلث PQR با حالت قبل متشابه بوده و انتقال‌یافتهٔ آن به موازات BC است در نتیجه مرکز این دایره نیز انتقال‌یافتهٔ O با بردار PP' است. اما واضح است که B و C و O و S روی یک دایره نیستند مگر این‌که PP' طول آن‌ها صفر داشت، که یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد. حال به دو روش نشان می‌دهیم اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ برابر ۶۰ درجه است.

روش اول: P را روی رأس A در نظر می‌گیریم.



چون مثلث متساوی‌الساقین است عمودمنصف RQ همان ارتفاع است. فرض می‌کنیم این عمودمنصف، دایرهٔ w، مکان هندسی را غیر از O در S قطع کند. O مرکز دایرهٔ AQR نیست چرا که در این صورت

$$OB = OA = OR$$

که ممکن نیست. پس S مرکز آن است. داریم:

$$SA = SQ \ \Rightarrow SAQ = SQA$$

$$\left.\begin{array}{r} CAQ = BAQ - BAC = ۹۰ - \hat{A} \\ SAC = \dfrac{\hat{A}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow SAQ = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

از عبارات بالا نتیجه می‌شود:

$$SQA = SAQ = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow ASQ = ۱۸۰ - ۲(۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲}) = \hat{A}$$

$$\Rightarrow CQA = ۹۰ - ASQ = ۹۰ - \hat{A}, AQS = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow AQC = \frac{\hat{A}}{۲}$$

هم‌چنین داریم:

$$ACD = ۱۸۰ - ۹۰ - (۹۰ - B) = \hat{B}$$

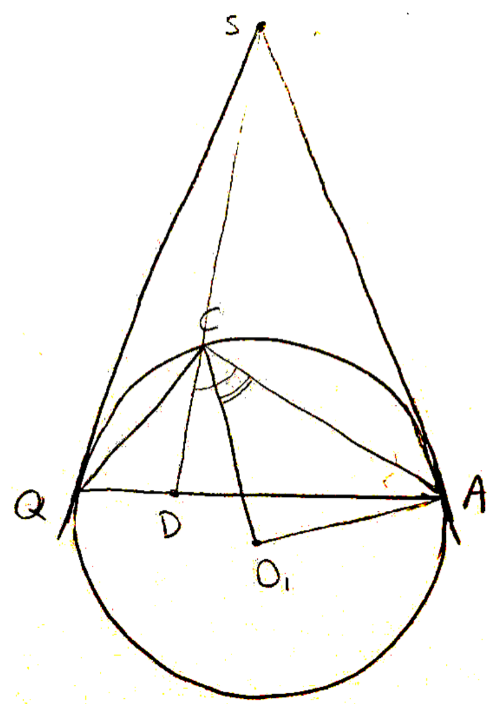
در دایرهٔ محیطی ACQ داریم:

$$CAS = \frac{\hat{A}}{۲} = AQC = \frac{\text{کمان } AC}{۲}$$

$$CQS = ۹۰ - \hat{A} = CAQ = \frac{\text{کمان } CQ}{۲}$$

در نتیجه AS و QS بر دایرهٔ محیطی ACQ مماس هستند.

اگر $O_۱$ را مرکز دایرهٔ محیطی ACQ بگیریم داریم:



$$CO_۱A = \text{کمان } AC = ۲CQA = \hat{A}$$

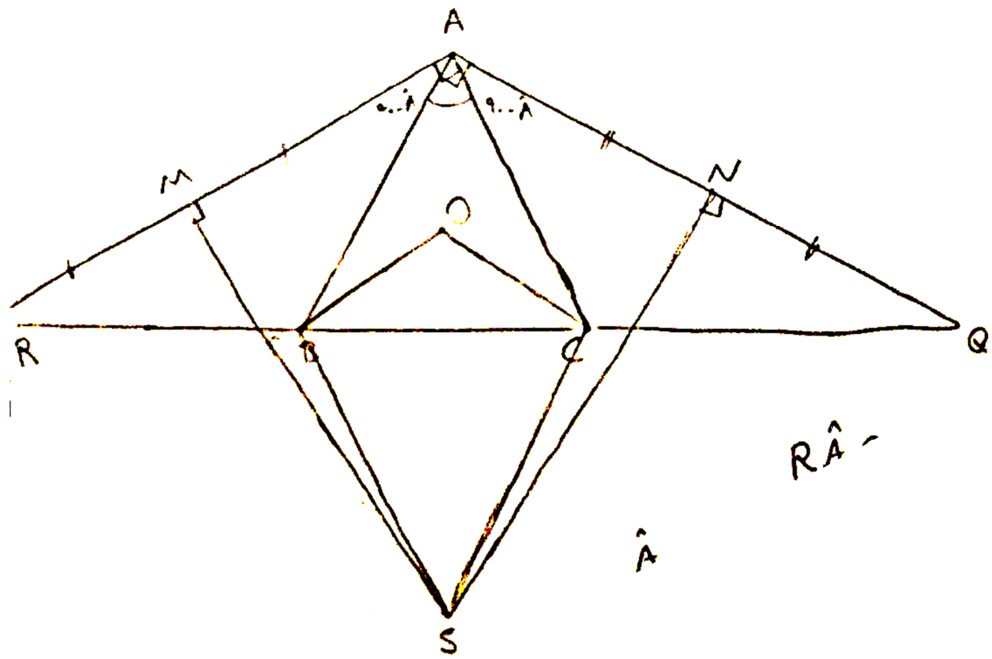
$$CAO_۱ = ACO_۱ = \frac{۱۸۰ - CO_۱A}{۲} = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

از طرفی داشتیم $ACD = \hat{B} = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲}$، پس $ACD = ACO_۱$. در نتیجه C روی $AO_۱$ است و

$$AC = CQ$$

و در نتیجه $CAQ = CQA$ و لذا $\frac{\hat{A}}{۲} = ۹۰ - \hat{A}$ پس $\frac{۳}{۲}\hat{A} = ۹۰$ و این یعنی $\hat{A} = ۶۰$.

روش دوم: از برهان خلف استفاده می‌کنیم، فرض کنید $\hat{A} < ۶۰$.



با توجه به این‌که $RAQ = ۱۸۰ - \hat{A}$ داریم $R = Q = \frac{\hat{A}}{۲}$.

$$\hat{A} < ۶۰ \Rightarrow ۹۰ - \hat{A} > \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow RB > AB\,, QC > AC$$

در نتیجه نقاط A و B در یک طرف عمودمنصف AR، و نقاط A و C در یک طرف عمودمنصف AQ هستند پس $MSN > BSC$ و از طرفی چون $MANS$ و $BOCS$ محاطی هستند داریم:

$$\left.\begin{array}{r} MSN = ۱۸۰ - MAN = \hat{A} \\ BSC = ۱۸۰ - BOC = ۱۸۰ - ۲\hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow ۱۸۰ - ۲\hat{A} < \hat{A} \Rightarrow \hat{A} > ۶۰$$

که با فرض $\hat{A} < ۶۰$ در تناقض است.

اگر هم فرض کنیم $\hat{A} > ۶۰$ این بار تمام نابرابری‌های فوق برعکس می‌شوند و نتیجه می‌شود $\hat{A} < ۶۰$ که باز تناقض است. فقط باید توجه شود که در مواقعی که S و A در یک سمت BC قرار دارند منظور از زاویهٔ BSC قسمت بزرگ آن است.