بسمه تعالی

اولین آزمون انتخاب تیم ۲۰۱۷

چهارشنبه ۹۶/۱/۱۵ | روز اول | زمان: ۲۷۰ دقیقه

مسئله ۱: برای اعداد حقیقی و نامنفی a, b, c, d با فرض $a+b+c+d=۲$ نشان دهید:

$$\frac{(a+c)^{۲}}{ad+bc}+\frac{(b+d)^{۲}}{ac+bd}+۴\geq ۴\left(\frac{a+b+۱}{c+d+۱}+\frac{c+d+۱}{a+b+۱}\right)$$

مسئله ۲: در کشور شکرستان ۱۳ نفر در دوره طلای المپیاد ریاضی حضور دارند. برای انتخاب تیم ۶ آزمون برگزار شده است و نمره‌های آنها اعلام شده است (فرض کنید نمره هیچ دو نفری در یک آزمون برابر نشده است). کمیته المپیاد ریاضی تصمیم می‌گیرد برای انتخاب تیم، جایگشتی از این ۶ آزمون را در نظر بگیرد و به ترتیب از آزمون اول، در هر آزمون نفر اول از بین افراد باقیمانده به تیم راه پیدا کند. جلسه کمیته برای انتخاب این جایگشت تشکیل شده است. آیا ممکن که هر ۱۳ نفر امیدوار باشند؟

مسئله ۳: در مثلث ABC، I_a مرکز نیمسازی خارجی متناظر با رأس A است. ω دایره‌ای دلخواه است که از A و I_a گذشته و امتداد اضلاع AB و AC (از طرف رأس B, C) را به ترتیب در X و Y قطع می‌کند. فرض کنید S و T نقاطی باشند که به ترتیب روی پاره‌خط I_aB و I_aC قرار دارند به طوری که $\angle AXI_a=\angle BTI_a$ و $\angle AYI_a=\angle CSI_a$. محل برخورد BT و CS را K می‌نامیم. اگر KI_a و TS یکدیگر را در Z قطع کنند، ثابت کنید X، Y و Z هم‌خط هستند.

بسمه تعالی

اولین آزمون انتخاب تیم ۲۰۱۷

پنجشنبه ۹۶/۱/۱۶ روز دوم زمان: ۲۷۰ دقیقه

مسئله ۴: فرض کنید همه اعداد اول را به ترتیب صعودی مرتب کرده‌ایم: $p_۱ = ۲ < p_۲ < p_۳ < \cdots$. هم‌چنین فرض کنید $n_۱ < n_۲ < n_۳ < \cdots$ دنباله‌ای از اعداد طبیعی باشد به‌طوری‌که برای هر i معادله $x^{n_i} = ۲(mod\ p_i)$ دارای جواب است. آیا همواره عدد x یافت می‌شود که در همه معادله‌ها صدق کند؟

مسئله ۵: در مثلث ABC، P و Q دو نقطه دلخواه روی ضلع BC هستند به طوری که $BP = CQ$ (نقطه P بین دو نقطه B و Q قرار دارد). فرض کنید دایره محیطی مثلث APQ اضلاع AB و AC را به ترتیب در E و F قطع نماید. محل برخورد EP و FQ را T می‌نامیم. دو خطی که از وسط ضلع BC گذشته و موازی با AB و AC هستند، به ترتیب EP و FQ را در X و Y قطع می‌کنند. ثابت کنید دایره‌های محیطی دو مثلث TXY و APQ بر یکدیگر مماس هستند.

مسئله ۶: روی خانه‌های یک نوار (شفاف) ۱۰۰×۱ اعداد ۱,۲, ... ,۱۰۰ را به ترتیب صعودی نوشته‌ایم. این نوار را روی خطوط شبکه‌ای به ترتیب دلخواه و در جهت دلخواه تا می‌زنیم تا در نهایت به یک مربع ۱×۱ برسیم که ۱۰۰-لایه است. روی این لایه‌ها جایگشتی از اعداد ۱,۲, ... ,۱۰۰ از بالا به پایین دیده می‌شود. ثابت کنید تعداد جایگشت‌هایی که ممکن است دیده شود بین $۲^{۱۰۰}, ۴^{۱۰۰}$ است. (مثلاً با یک نوار ۳×۱ می‌توان همه جایگشت‌های ۳-تایی را تولید کرد.)

بسمه تعالی

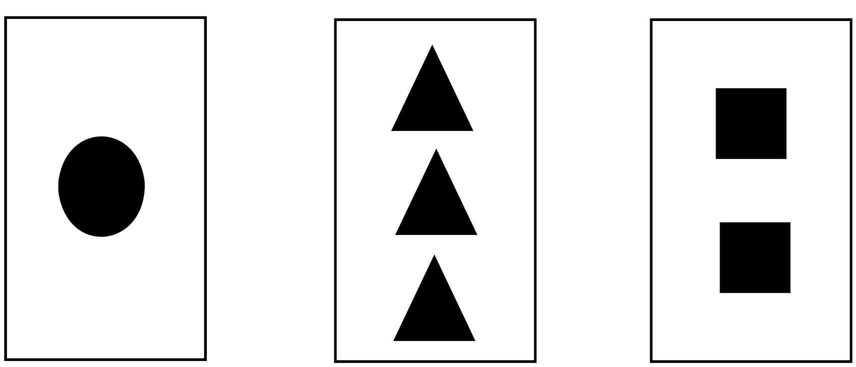
دومین آزمون انتخاب تیم ۲۰۱۷

۹۶/۲/۳ روز اول زمان: ۲۷۰ دقیقه

مسئله ۱: در ذوزنقه $ABCD$ ($AB||CD$)، نقطه P محل برخورد قطرها می‌باشد. ω_1 دایره‌ای است که از B گذشته و در A بر AC مماس است. ω_2 دایره‌ای است که از C گذشته و در D بر BD مماس است. فرض کنید ω_3 دایره محیطی مثلث BPC باشد. ثابت کنید وتر مشترک دو دایره ω_1 و ω_3 و وتر مشترک دو دایره ω_2 و ω_3 روی AD همرسند.

مسئله ۲: بزرگترین n طبیعی را بیابید به طوری که n عدد طبیعی وجود داشته باشند به نحوی که هیچ یک دیگری را عاد نکند ولی در بین هر سه تا از آنها، یکی مجموع دوتای دیگر را عاد کند.

مسئله ۳: ۲۷ کارت داریم که در هر یک از آنها یک شکل (دایره یا مربع یا مثلث) به تعدادی (یک یا دو یا سه) و با رنگی (سفید یا مشکی یا خاکستری) رسم شده است. سه کارت را جور می‌نامیم اگر شکل هر سه یا یکسان باشد و یا دوبدو متمایز، تعداد اشکال روی آنها یا یکسان باشد یا دوبدو متمایز، و رنگ آنها یا یکسان باشد یا دوبدو متمایز. مثلاً سه کارت زیر با هم جور هستند زیرا در رنگ یکسان هستند و در شکل و تعداد دوبدو متمایز هستند. حداکثر چند کارت می‌توانیم انتخاب کنیم که هیچ سه‌تایی از آنها جور نباشند؟



بسمه تعالی

دومین آزمون انتخاب تیم ۲۰۱۷

۹۶/۲/۴ روز دوم زمان: ۲۷۰ دقیقه

مسئله ۴: به $(n+1)$-تایی $(h_1, h_2, \dots, h_{n+1})$ که $h_i(x_1, \dots, x_n)$ ها چندجمله‌ای‌های n متغیره با ضرایب حقیقی هستند خوب می‌گوییم، هرگاه خاصیت زیر را داشته باشد:

برای هر n تابع $f_1, f_2, \dots, f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اگر برای هر $1 \le i \le n+1$،

$P_i(x) = h_i\big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\big)$ چندجمله‌ای بر حسب x باشد آنگاه $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ چندجمله‌ای باشند.

الف) ثابت کنید برای هر n طبیعی، $(n+1)$-تایی خوبی مثل $(h_1, h_2, \dots, h_{n+1})$ وجود دارد که درجه تمام h_iها بیشتر از یک است.

ب) ثابت کنید برای هیچ n طبیعی، $(n+1)$-تایی خوبی مثل $(h_1, h_2, \dots, h_{n+1})$ وجود ندارد که تمام h_iها چندجمله‌ای‌هایی متقارن باشند.

مسئله ۵: k, n اعداد طبیعی هستند. ثابت کنید حداقل $(k-1)(n-k+1)$ عدد طبیعی وجود دارند که با n تا عدد k و اعمال جمع و ضرب و تفریق و تقسیم و قرار دادن پرانتز قابل ساختن هستند ولی با $n-1$ تا k نمی‌توان آنها را ساخت.

مسئله ۶: فرض کنید $k > 1$ عددی طبیعی باشد. دنباله $a_1, a_2, \dots$ را به این شکل تعریف می‌کنیم:
$a_1 = 1, a_2 = k$ و برای هر $n > 1$ داریم $a_{n+1} - (k+1)a_n + a_{n-1} = 0$.
تمام n های طبیعی را بیابید که a_n توانی از k باشد.

بسمه تعالی

سومین آزمون انتخاب تیم ۲۰۱۷

۹۶/۲/۶ | روز اول | زمان: ۲۷۰ دقیقه

مسئله ۱: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی مثل $n > ۱$، عدد $m \geq \frac{n}{۲}$ وجود دارد به طوری‌که معادله زیر جوابی در اعداد صحیح نامنفی داشته باشد که $a_m > ۰$.

$$\frac{a_m}{m+۱} + \frac{a_{m+۱}}{m+۲} + \cdots + \frac{a_{n-۱}}{n} = \frac{۱}{[۱,۲,\ldots,n]}$$

(منظور از $[۱,۲,\ldots,n]$ کوچکترین مضرب مشترک اعداد $۱,۲,\ldots,n$ است.)

مسئله ۲: فرض کنید P نقطه‌ای درون چهارضلعی $ABCD$ باشد به طوری که داریم:

$$\angle PDA = \angle PAC \quad \text{و} \quad \angle PCA = \angle PAD \quad \text{و} \quad \angle BPC = 2\angle BAC$$

ثابت کنید:

$$\angle BCA - \angle PCA = \angle PBD$$

مسئله ۳: همه توابع $f:(R^+,R^+) \to R^+$ را بیابید به طوری که برای هر x,y,z مثبت داشته باشیم:

$$f(f(x,y),z) = x^۲y^۲f(x,z)$$

$$f\big(x,۱+f(x,y)\big) \geq x^۲ + xyf(x,x)$$

بسمه تعالی

سومین آزمون انتخاب تیم ۲۰۱۷

۹۶/۲/۷ روز دوم زمان: ۲۷۰ دقیقه

مسئله ۴: ۶ نقطه در صفحه داریم که هیچ سه‌تایی هم‌خط نیستند. می‌دانیم برای هر ۴ نقطه انتخابی، قوت یکی نسبت به دایره محیطی سه تای دیگر برابر با مقدار ثابت k است. ثابت کنید $k = 0$ و هر شش نقطه هم‌دایره‌اند (قوت نقاط داخل یک دایره منفی است).

مسئله ۵: درباره‌ی دنباله‌ی $\{c_i\}_{i=۰}^{\infty}$ از عددهای حقیقی نامنفی می‌دانیم $c_{۲۰۱۷} > ۰$. دنباله چندجمله‌ای‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_{-۱}(x) = ۰, P_{۰}(x) = ۱\ , P_{n+۱}(x) = xP_n(x) + c_nP_{n-۱}(x)$$

ثابت کنید عدد طبیعی $n > ۲۰۱۷$ و عدد حقیقی c وجود ندارد که: $P_{۲n}(x) = P_n(x^{۲} + c)$.

مسئله ۶: در مثلث ABC، O مرکز دایره محیطی و H مرکز ارتفاعی هستند. قرینه A نسبت به OH را P می‌نامیم. نقاط E و F به ترتیب روی اضلاع AB و AC قرار دارند به گونه ای که $BE = PC$ و $CF = PB$. اگر AP و OH یکدیگر را در K قطع کنند، نشان دهید: $\angle EKF = ۹۰^{\circ}$.