آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور ☺

۱. به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲،... و۶ را در یک ردیف نوشت به طوری که از بین هر دو عدد مجاور یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۶   ۴) ۸   ۵) ۱۰

۲. مثلث قائم‌الزاویه ABC با فرض $\angle BAC = ۹۰^\circ$ را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز A طوری رسم می‌کنیم که ضلع AB را در D، ضلع AC را در F و ضلع BC را در دو نقطهٔ E و M قطع کند که نقطهٔ E بین نقاط D و M است. می‌دانیم M وسط ضلع BC است و هم‌چنین نسبت طول کمان‌های $\widehat{DE}$ به $\widehat{EM}$ به $\widehat{MF}$ برابر با نسبت ۳ به ۲ به ۴ است. مقدار قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ حادهٔ مثلث ABC چه‌قدر است؟

۱) ۷۰° ۲) ۵۰° ۳) ۴۵° ۴) ۳۰° ۵) ۱۰°

۳. جناب‌خان می‌خواهد برای گاوصندوق خود رمز انتخاب کند و هر هفته رمز آن را تغییر دهد! رمز گاوصندوق یک عدد سه‌رقمی است و جناب‌خان مایل است ارقام رمز متمایز باشند و به‌علاوه ارقام رمز جدید، از ارقام متناظر در رمز قبلی کم‌تر نباشد. مثلاً اگر یک بار ۲۵۹ را انتخاب کرد رمز بعدی نباید ۱۵۹ باشد. اگر اولین رمز گاوصندوق ۱۴۰ باشد، او حداکثر بعد از چند هفته دیگر نمی‌تواند به این شکل رمز گاوصندوقش را تغییر دهد؟ (توجه کنید که هفتهٔ اول، رمز همان ۱۴۰ خواهد بود.)

۱) ۲۸   ۲) ۲۴   ۳) ۲۰   ۴) ۱۹   ۵) ۱۶

۴. تابع $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ مفروض است. برای هر $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ با شرط $(m,n) = ۱$:

$$f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n+۱}$$

که منظور از (m,n) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک m و n است. کدام‌یک از گزاره‌های زیر دربارهٔ تابع f درست است؟

۱) تابع f یک‌به‌یک است.

۲) تابع f یک‌نوا (صعودی یا نزولی) است.

۳) برد تابع f تمام اعداد گویا است.

۴) به ازای هر $x \in \mathbb{Q}$ داریم $f(x) \leq x$.

۵) همهٔ گزینه‌ها صحیح هستند.

۵. چند عدد سه رقمی $\overline{abc}$ وجود دارد که مربع کامل باشد و اگر یک واحد به رقم صدگان، دو واحد به رقم دهگان و سه واحد به رقم یکان آن اضافه شود، حاصل سه رقمی و مربع کامل باشد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه ۵) چهار

۶. با استفاده از همهٔ ارقام ۱ تا ۹، سه عدد سه رقمی با ارقام متمایز ساخته‌ایم و بزرگ‌ترین آن‌ها را A نامیده‌ایم. کم‌ترین مقدار ممکن برای A چند است؟

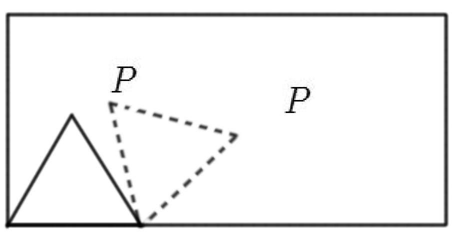
۱) ۳۴۵ ۲) ۱۹۸ ۳) ۹۱۲ ۴) ۳۹۸ ۵) ۳۱۲

۷. برای $A,B \subseteq \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم $A \otimes B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟ ($\mathbb{Q}'$ نماد مجموعهٔ اعداد گنگ است.)

- $\mathbb{Q}' \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$
- $\{\sqrt{۲}, ۵\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$
- $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$
- $\{\sqrt{۲}, \sqrt{۳}\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$

۱) چهار ۲) سه ۳) دو ۴) یک ۵) صفر

۸. مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد درون و روی محیط یک مستطیل ۴×۲، مانند شکل، می‌غلطد. رأس P، که در شکل مشخص شده، از ابتدای حرکت تا زمانی که برای اولین بار به مکان اولیه‌اش بازگردد، چه مسافتی را طی می‌کند؟



۱) $\frac{۱۰\pi}{۳}$ ۲) ۳π ۳) ۴π ۴) $\frac{۷\pi}{۳}$ ۵) ۲π

۹. چند سه‌تایی مرتب (x,y,z) وجود دارد که x,y,z ارقام ناصفر و متمایزی باشند و $x \times y$ بر z بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۵۲ ۵) ۱۵۶

آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور ☺

۱۰. اعداد ۱، ۲،... و ۱۳۹۵ روی تخته نوشته شده و ما به این شکل آن‌ها را خط می‌زنیم: هر بار بزرگ‌ترین عددی که تا قبل از آن خط نخورده را انتخاب و همهٔ مقسوم علیه‌های آن را به‌ترتیب از بزرگ به کوچک خط می‌زنیم و سپس مجدداً به سراغ بزرگ‌ترین عدد خط‌نخورده می‌رویم و همین کار را تکرار می‌کنیم تا همهٔ اعداد خط بخورند. آخرین عددی که خط می‌خورد کدام است؟

۱) ۳۷ ۲) ۴۱ ۳) ۶۹۸ ۴) ۷۰۱ ۵) ۷۰۳

۱۱. عمل $*$ را در مجموعهٔ اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x * y = \frac{x+y}{1-xy}$$

اگر a,b,c ریشه‌های $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$ باشند، مقدار $a*(b*c)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) -8 ۴) $\frac{8}{3}$ ۵) -2

۱۲. تعداد سه‌تایی‌های مرتب (a,b,c) از اعداد طبیعی را بیابید که در شرط زیر صدق کنند:

$$a(b,c) = b(c,a) = c(a,b) = 2^6 \times 3^8 \times 5^{10}$$

(منظور از (a,b) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b است.)

۱) ۳۲۴۰ ۲) ۲۰۸۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۱۶۲۰ ۵) ۷۲۰

۱۳. می‌خواهیم با چیدن ۱۲ آجر مکعبی به ضلع واحد، بر روی میز، مکعب مستطیلی به طول ۳، عرض ۲ و ارتفاع ۲ واحد، بسازیم. طبیعتاً یک مکعب بالایی را نمی‌توان قبل از مکعب زیری، سر جایش گذاشت. به چند روش متفاوت می‌توان این مکعب مستطیل را ساخت؟ (توجه داشته باشید که مکعب‌ها از نظر ما تفاوتی ندارند و مسأله ترتیب پر کردن ۱۲ محل مکعب مستطیل است.)

۱) ۳۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۳۲۴ ۴) ۹۲۴ ۵) ۷۴۸۴۴۰۰

۱۴. a,b,c اعدادی دو به دو متمایزند. می‌دانیم سه معادلهٔ درجه دوی زیر ریشه‌ای مشترک دارند.

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad bx^2 + cx + a = 0, \quad cx^2 + ax + b = 0$$

مقدار آن ریشهٔ مشترک چند است؟

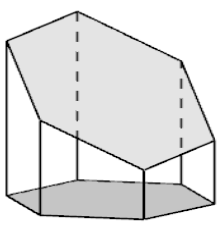
۱) ۰ ۲) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ۳) -1 ۴) ۱ ۵) به‌طور یک‌تا تعیین نمی‌شود.

۱۵. ۱۰۰۰ عدد سیب داریم که ۹۰۰ عدد آن‌ها سالم و مابقی لکه‌دار هستند. آن‌ها را در تعدادی جعبه پخش می‌کنیم به‌طوری که تعداد سیب‌ها در هر جعبه با جعبهٔ دیگر برابر باشد. در حداقل و حداکثر چند درصد جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است؟

۱) ۵۰ و ۹۰ ۲) ۵۰ و ۱۰۰ ۳) ۸۰ و ۹۰ ۴) ۸۰ و ۱۰۰ ۵) ۹۰ و ۱۰۰

۱۶. چند زوج مرتب (m,n) از اعداد طبیعی داریم که $[1,2,\ldots,m] = 1395 \times [1,2,\ldots,n]$.
(منظور از نماد $[1,2,\ldots,m]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک مثبت اعداد $1,2,\ldots,m$ است.)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه ۵) چهار



۱۷. یک منشور قائم با قاعدهٔ شش‌ضلعی منتظم به ضلع واحد را توسط یک صفحه برش زده‌ایم. اگر فاصلهٔ رئوس این سطح مقطع تا قاعدهٔ پایین به‌ترتیب برابر ۲، ۳، x، y، ۱۱ و z باشد $x+y+z$ چه‌قدر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰

۴) ۲۴ ۵) ۲۶

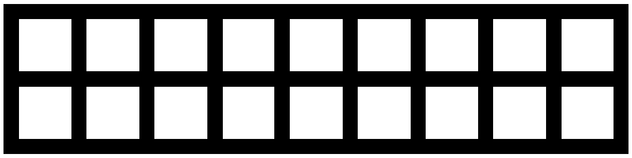
۱۸. در شهر ساده‌لوحان شایعه‌ها به‌سرعت پخش می‌شود؛ اگر آقای خالی‌بند، بخواهد شایعه‌ای را پخش کند ابتدا آن شایعه را به یک نفر دیگر منتقل می‌کند. در ادامه هر روز آقای خالی‌بند و هر کسی که شایعه را در یکی از روزهای گذشته شنیده آن را به فرد جدیدی منتقل می‌کند. پس از آن‌که تعداد افرادی که شایعه را شنیده‌اند از مرز یک میلیون نفر گذشت، چند نفر شایعه را مستقیماً یا با یک واسطه از آقای خالی‌بند شنیده‌اند؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۵۰۰۰۰۰ ۵) ۵۲۴۲۸۸

۱۹. چند زوج مرتب از اعداد حقیقی (x,y) وجود دارد که در دستگاه معادلات زیر صدق کند؟

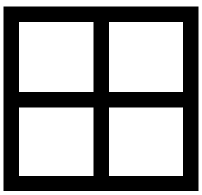
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 \\ 2x^2 - 2xy - 3y^2 - 2x + 5y = 0 \end{cases}$$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ ۵) ۶



۲۰. خیابان‌کشی محله‌ای به شکل روبه‌رو است: سه خیابان افقی و ده خیابان عمودی. پلیسی می‌خواهد به همهٔ تقاطع‌ها سرکشی کند به‌طوری که از تقاطع راست-بالا شروع کند، از هر تقاطع دقیقاً یک بار عبور کند و در انتها به تقاطع راست-بالا برگردد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟

۱) 2^5 ۲) 3^5 ۳) 2×3^4 ۴) 2^4 ۵) $3^6 - 3^5$



۲۱. خیابان‌های محله‌ای به نام پهران مانند شکل روبه‌رو شامل ۹ تقاطع و ۱۲ خیابان است. (مسیر بین هر دو تقاطع یک خیابان است.) هر شب در این محله ۹۰ خودرو پارک می‌شود که همگی داخل خیابان‌ها و نه در تقاطع‌ها قرار دارند. در هر تقاطع میانگین تعداد خودروهای موجود در خیابان‌های متصل به آن تقاطع را ظرفیت پارک آن تقاطع می‌نامیم. می‌دانیم که مجموع ظرفیت پارک ۹ تقاطع، برابر ۶۶ است. کدام یک از گزاره‌های زیر حتماً درست است؟

۱) ظرفیت پارک تقاطع مرکزی محله، بیش‌تر از تقاطع‌های دیگر است.
۲) در هر یک از خیابان‌هایی که در حاشیهٔ محله واقع است، دست‌کم ۶ خودرو پارک شده است.
۳) در یکی از خیابان‌هایی که در حاشیهٔ محله واقع است، دست‌کم ۸ خودرو پارک شده است.
۴) در یکی از خیابان‌های متصل به مرکز محله، دست‌کم ۹ خودرو پارک شده است.
۵) گزینه‌های ۱ و ۴.

۲۲. در مسابقهٔ قوی‌ترین مردان ایران ۱۰ خانه دور یک دایره قرار دارد که در هر خانه ۲۰۰ وزنه از همهٔ وزنه‌های ۱، ۲،... و ۲۰۰ کیلوگرمی وجود دارد. ابتدا مردی در خانه‌ای قرار دارد، با شروع مسابقه از آن خانه وزنهٔ ۱ کیلوگرمی را برداشته و در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کرده ۱ خانه به جلو می‌رود، وزنه را در آن‌جا قرار داده و از آن خانه وزنهٔ ۲ کیلوگرمی را برداشته و ۲ خانه به عقب (پادساعت‌گرد) آمده و وزنه را در آن قرار می‌دهد، سپس از آن‌جا وزنهٔ ۳ کیلوگرمی را برداشته ۳ خانه در جهت ساعت‌گرد می‌رود و همین روند ادامه می‌یابد. پس از آن‌که وزنهٔ ۲۰۰ کیلوگرمی را جابه‌جا کرد در خانه‌ای که کار خود را از آن‌جا شروع کرده بود مجموعاً چند کیلوگرم وزنه وجود دارد؟

۱) ۲۰۲۸۰ ۲) ۲۰۲۰۰ ۳) ۲۰۱۸۰ ۴) ۲۰۱۰۰ ۵) ۲۰۰۸۰

۲۳. مثلث ABC مفروض است. فرض کنید w_b و w_c به‌ترتیب دو دایرهٔ گذرنده از A باشند به طوری که به‌ترتیب در B و C بر BC مماس باشند و N و A محل برخورد دو دایرهٔ مذکور باشند. از هر کدام از نقاط B و C خطی موازی با ضلع روبه‌رویش رسم می‌کنیم و محل برخورد این دو خط را T نام‌گذاری می‌کنیم. گیریم خطوط TC و TB به‌ترتیب دایره‌های محیطی مثلث‌های ANC و ANB را برای بار دوم در E و F قطع کنند. اگر $BC = ۸$ و $AN = ۶$، حاصل $NF \times NE$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۸۱ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۵۰ ۵) ۲۰۰

۲۴. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم $\angle ABC = ۶۰^\circ$. E را نقطه‌ای روی AB بگیرید که $BE = ۲AE$، به‌علاوه F را هم قرینهٔ E نسبت به مرکز متوازی‌الاضلاع فرض کنید. اگر BF و CE بر هم عمود باشند، نسبت ضلع کوچک‌تر به ضلع بزرگ‌تر متوازی‌الاضلاع به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵ ۵) ۰/۶

۲۵. بزرگ‌ترین عدد حقیقی و ثابت k را بیابید به طوری که برای تمام اعداد حقیقی a, b, c, d, e:

$$(a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-d)^۲ + (d-e)^۲ + (e-a)^۲ \geq k(b-d)^۲$$

۱) ۱ ۲) ۰/۵ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) ۲ ۵) $\frac{۵}{۶}$

۲۶. برای زیرمجموعهٔ ناتهی A از نقاط صفحه و عدد حقیقی $r > ۰$، مجموعهٔ نقاطی که از دست‌کم یک نقطهٔ A فاصله‌ای کم‌تر یا مساوی r دارند را با A_r نمایش می‌دهیم. چند تا از گزاره‌های زیر درست هستند؟ (در همهٔ موارد r و s اعداد حقیقی مثبت و A و B زیرمجموعه‌هایی از صفحه هستند.)

- $(A_r)_s = (A_s)_r$.
- $A \subset B_r$ اگر و تنها اگر $B \subset A_r$.
- اگر برای هر $t > ۰$، $A_t \subset B_t$ آن‌گاه $A \subset B$.
- $(A \cup B)_r = A_r \cup B_r$.
- اگر $A \cap B$ ناتهی باشد داریم $(A \cap B)_r = A_r \cap B_r$.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار ۵) پنج

۲۷. در مثلث ABC داریم $\hat{B} = ۲\hat{C}$. عمودمنصف ضلع BC در نقطهٔ D با ضلع AC برخورد می‌کند و عمودمنصف BD در نقطهٔ F با ضلع AB تقاطع دارد. دایره‌ای که مرکز آن روی خط FD است را خارج از مثلث در نظر می‌گیریم که بر ضلع AC و امتداد ضلع BC مماس شود. اگر مساحت مثلث ABC نه برابر مساحت مثلث AFD باشد و $FO = ۴$، شعاع دایره چه‌قدر می‌شود؟

۱) $۳ - \sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $۳ - \sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$ ۵) $۲\sqrt{۶}$

۲۸. فرض کنید x, y, z اعداد حقیقی مثبت باشند به گونه‌ای که $x + y + z = ۲۲۲$ و $xy + yz + zx = ۱۲۳۲۱$. اگر $A = \min\{xy, yz, zx\}$ آن‌گاه بیش‌ترین مقدار ممکن برای A چند است؟

۱) ۵۴۷۶ ۲) ۴۱۰۷ ۳) ۲۴۱۲ ۴) ۱۶۰۲ ۵) ۱۳۶۹

۲۹. زیرمجموعه‌ای از $\{۰, ۱, ۲, \ldots, ۹۹\}$ مثل A را «تقریباً جمعی» می‌گوییم، هرگاه بیش از یک عضو داشته باشد و به‌علاوه برای هر دو عضو متمایز a و b از A، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a + b + ۱$ بر ۱۰۰ نیز عضوی از A باشد. چند زیرمجموعهٔ تقریباً جمعی وجود دارد؟

۱) ۴۹ ۲) ۹۹ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۵۵ ۵) ۲۰۰

۳۰. وترهای AB و CD از دایرهٔ W، در نقطهٔ P خارج از دایره متقاطع‌اند که A بین B و P است و C بین D و P است. می‌دانیم $AB = ۳AP$. عمودهای وارد از C و D بر AB را به‌ترتیب H و H' و وسط پاره‌خط PB را M می‌نامیم. اگر $\frac{CM}{\sqrt{CH}} = \sqrt{۳}$ باشد، مقدار $\frac{DM}{\sqrt{DH'}}$ چه‌قدر است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۶}$ ۵) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

قابل توجه دانش‌آموزان سال دهمی: کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی در تلاش است، به عنوان جایزه‌ای علمی، تعدادی مدرسهٔ کوتاه تابستانی برای رتبه‌های برتر دانش‌آموزان سال دهم برگزار کند که هم با ریاضیات زیبا و هم با هنر حل مسأله بیش‌تر آشنا شوند. جامعهٔ هدف اصلی این برنامه دانش‌آموزانی هستند که نمرات آن‌ها نزدیک مرز قبولی در مرحلهٔ دوم است ولی مدارس محل تحصیل آن‌ها در سال‌های گذشته موفقیت کم‌تری در المپیاد ریاضی داشته تا بدین‌وسیله المپیاد ریاضی گسترش یافته و اثرگذاری بیش‌تری در رشد ریاضیات کشور پیدا کند. امیدواریم در صورت فراهم شدن شرایط، بتوانیم اولین دورهٔ این مدارس کوتاه را در تابستان سال ۱۳۹۶ اجرا کنیم.