۱۲
آزمون

به نام او

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

یک‌شنبه، ۲۰ اردیبهشت ۹۴ | امتحان اول (روز اول) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱. تمام چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ با ضرایب گویا را بیابید، به گونه‌ای که

$$P(x)^{3} + Q(x)^{3} = x^{12} + 1$$

۲. نقطه‌ی I_b مرکز دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس B از مثلث ABC است. اگر M نقطه‌ی وسط کمان BC از دایره‌ی محیطی مثلث ABC باشد (کمانی که شامل A نیست) و به علاوه MI_b دایره‌ی محیطی را در نقطه‌ی T قطع کنند، ثابت کنید:

$$TI_b^{2} = TB.TC$$

۳. $b_1 < b_2 < \cdots$ دنباله‌ی همه‌ی اعداد طبیعی است که هر کدام را می‌توان به صورت مجموع مربع‌های دو عدد طبیعی نوشت. ثابت کنید بی‌نهایت n وجود دارد که $b_{n+1} - b_n = 2015$.

موفق باشید.

صفحه ۹

۱۳
آزمون

به نام او

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

دوشنبه، ۲۱ اردیبهشت ۹۴ امتحان اول (روز دوم) زمان: چهار ساعت و نیم

۴. n یک عدد طبیعی است. کوچک‌ترین مقدار طبیعی k را بیابید که در بین هر k عدد طبیعی بتوان تعداد زوجی از آن‌ها را انتخاب کرد که مجموعشان بر n بخش‌پذیر باشد.

۵. یک شبکه‌ی $n \times n$ از نقطه‌ها داریم. برای زیرمجموعه‌ی A از یال‌های این شبکه (منظور یال‌های شبکه‌ای است) مجموعه‌ی رئوس مربوط به A را با نماد $V(A)$ و مجموعه‌ی مؤلفه‌های همبندی A را با $J(A)$ نمایش می‌دهیم. برای هر عدد طبیعی l نشان دهید:

$$\frac{l}{۲} \leq \min_{|A| \geq l} \left(|V(A)| - |J(A)|\right) \leq \frac{l}{۲} + \frac{\sqrt{l}}{۲} + ۱$$

(برای مجموعه‌ی X، منظور از $|X|$ تعداد اعضای مجموعه‌ی X هست.)

۶. چهارضلعی محیطی و محاطی $ABCD$ مفروض است. محل تقاطع AD و BC را E، محل تقاطع AB و CD را F، محل تقاطع AC و BD را S و همچنین مرکز دایره‌ی محیطی چهارضلعی را O می‌نامیم. E' و F' به ترتیب روی AB و AD طوری هستند که $\angle AEE' = \angle BEE'$ و $\angle DFF' = \angle AFF'$. M را نقطه‌ی وسط کمان BAD از دایره‌ی محیطی و X را نقطه‌ای بگیرید که $\frac{XA}{XB} = \frac{EA}{EB}$ و X، O و E' هم‌خط باشند و Y هم طوری که $\frac{YA}{YD} = \frac{FA}{FD}$ و O، Y و F' هم‌خط باشند. ثابت کنید دایره‌ی به قطر OS و دایره محیطی مثلث OAM و دایره‌ی محیطی مثلث OXY هم‌محور هستند.

موفق باشید.

۱٤
آزمون

به نام او

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

چهارشنبه، ۲۳ اردیبهشت ۹۴ | امتحان دوم (روز اول) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱. برای اعداد حقیقی و مثبت a، b، c و d که $\sum_{\text{دوری}} \frac{1}{ab} = 1$ نشان دهید:

$$abcd + 16 \geq 8\sqrt{(a+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{c})} + 8\sqrt{(b+d)(\frac{1}{b}+\frac{1}{d})}$$

۲. نقطه‌های D و E به ترتیب پای نیم‌ساز داخلی رأس A و محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع BC از مثلث ABC هستند. A_1 هم نقطه‌ای روی دایره‌ی محیطی ABC است که $AA_1 \parallel BC$. اگر محل تقاطع دوم EA_1 با دایره‌ی محیطی مثلث AED را T و مرکز دایره‌ی محاطی داخلی ABC را I بنامیم، ثابت کنید $IT = IA$.

۳. حداکثر تعداد مستطیل‌های با طول ضلع ۱ و ۲ و اضلاع موازی محورهای مختصات در صفحه را بیابید که اشتراک هر دو تایی از آن‌ها مساحت یک داشته باشد.

موفق باشید.

۱۵
آزمون

به نام او

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

پنج‌شنبه، ۲۴ اردیبهشت ۹۴ | امتحان دوم (روز دوم) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴. ABC را یک مثلث حاده‌الزاویه بگیرید. نقطه‌ی Z روی ارتفاع رأس A و نقطه‌های X و Y به ترتیب روی امتداد ارتفاع‌های رئوس B و C به گونه‌ای هستند که:

$$\angle AYB = \angle BZC = \angle CXA = ۹۰^\circ$$

ثابت کنید X، Y و Z هم‌خط هستند، اگر و تنها اگر طول مماس رسم‌شده از A بر دایره‌ی نه‌نقطه‌ی مثلث برابر مجموع طول مماس‌های مرسوم از B و C بر این دایره باشد.

۵. جای‌گشت $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را "به‌هم‌ریخته" می‌گوییم، اگر برای هر سه تایی $i < j < k$، $a_i + a_k - ۲a_j$ بر n بخش‌پذیر نباشد. تمام اعداد طبیعی $n \geq ۳$ را بیابید که جای‌گشت به‌هم‌ریخته‌ای از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ موجود باشد.

۶. برای اعداد حقیقی و مثبت a، b و c که $a + b + c = abc$، ثابت کنید:

$$\sum_{\text{دوری}} \frac{a}{a^۲ + ۱} \leq \frac{\sqrt{abc}}{۳\sqrt{۲}} \sum_{\text{دوری}} \frac{\sqrt{a^۳ + b^۳}}{ab + ۱}$$

موفق باشید.

۱۲

به نام او

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

یک‌شنبه، ۲۷ اردیبهشت ۹۴	امتحان سوم (روز اول)	زمان: چهار ساعت و نیم

۱. از نقطه‌ی A خارج از دایره ω مماس‌های AS و AT را بر دایره رسم می‌کنیم. نقطه‌های X و Y اوساط AS و AT هستند. از نقطه‌ی X مماس XR را بر دایره رسم کرده و وسط های XT و XR را به ترتیب P و Q می‌نامیم. اگر XY و PQ یک‌دیگر را در K قطع کنند و هم چنین SX و TK در L برخورد کنند، ثابت کنید چهارضلعی $KRLQ$ محاطی است.

۲. فرض کنید مقادیر طبیعی a_1، a_2 و a_3 داده شده است. دنباله‌ی بازگشتی از اعداد صحیح به این صورت تعریف می‌شود که

$$a_{n+1} = [a_n, a_{n-1}] - [a_{n-1}, a_{n-2}] \quad n \geq 3$$

نشان دهید عدد طبیعی $k \leq a_3 + 4$ وجود دارد که $a_k = 0$. (با توجه به این که ک.م.م را برای اعداد ناصفر تعریف می‌کنیم، جملات این دنباله تا زمانی که هیچ جمله‌ای برابر صفر نشده است، قابل تعریف هستند.)

۳. $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$، $2n$ عدد مثبت هستند. می‌دانیم می‌توان هر کدام از a_iها و b_iها را به دو دسته با مجموع برابر افراز کرد. ثابت کنید یک $2n$ضلعی ساده با اضلاع موازی محورهای مختصات و طول ضلع‌های فوق وجود دارد، طوری که طول ضلع‌های افقی برابر a_i و طول ضلع‌های عمودی برابر b_i باشد. (چندضلعی ساده، چندضلعی هست که خودش را قطع نمی‌کند.)

موفق باشید.

۱۳

۱۷
آزمون

به نام او

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

دوشنبه، ۲۸ اردیبهشت ۹۴ | امتحان سوم (روز دوم) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴. A، ۵ نقطه روی صفحه قرار می‌دهد که هیچ سه‌تایی از آن‌ها هم‌خط نیستند. B نقطه‌ی ششم را به آن‌ها اضافه می‌کند به طوری که با هیچ دو نقطه‌ی A هم‌خط نباشد. A می‌خواهد در نهایت با شش نقطه‌ی حاصل دو مثلث بسازد طوری که یکی در دیگری جا شود. آیا A می‌تواند در ابتدا ۵ نقطه‌ی خود را طوری قرار دهد که در نهایت همواره بتواند دو مثلث را بسازد؟

۵. برای هر عدد طبیعی d ثابت کنید چندجمله‌ای تکین یک‌تایی از درجه‌ی d مثل P با این خاصیت وجود دارد که $P(1) \neq 0$ و به علاوه جملات هر دنباله مثل $a_1, a_2, \ldots$ از اعداد حقیقی که در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق کند، از جایی به بعد صفر است:

$$P(n)a_1 + P(n-1)a_2 + \cdots + P(1)a_n = 0 \qquad n > 1$$

۶. H پای ارتفاع نظیر رأس A از مثلث ABC و H' قرینه‌ی H نسبت به وسط BC است. اگر مماس‌های مرسوم بر دایره‌ی محیطی ABC، در نقطه‌های B و C یک‌دیگر را در X قطع کنند و عمود وارد بر XH' در H'، خط‌های AB و AC را به ترتیب در Y و Z قطع کند، ثابت کنید $\angle YXB = \angle ZXC$.

موفق باشید.