

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سوالات آزمون مرحله دوم سی و سومین دوره^۱

المپیاد ریاضی، ۱۳۹۴

آزمون مرحله دوم سی و سومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱۷ و ۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۴ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار گردید. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار ساعت و نیم به سه سؤال تشریحی پاسخ گفتند. در ادامه، سؤالات آزمون را می‌بینید.

۱. فرض کنید آرش و بهرام کیکی به شکل دایره را با چند برش نامنظم از وسط، به قطعاتی نابرابر تقسیم کرده‌اند. در ابتدا آرش می‌تواند یکی از قطعات را به دل‌خواه بردارد. سپس بهرام فقط حق دارد یکی از دو قطعه‌ای را بردارد که قطعه مجاورش برداشته شده باشد و به همین ترتیب، هر کس در نوبت خود فقط حق دارد قطعه‌ای را بردارد که در یکی از مراحل قبلی قطعه مجاورش برداشته شده باشد. ثابت کنید اگر در ابتدا کیک به هر شکل پنج قطعه شده باشد، آرش، با دانستن وزن قطعات، می‌تواند طوری عمل کند که دست‌کم نصف کیک به او برسد.

۲. کامپیوتری داریم که می‌تواند در حافظه خود عبارات جبری را ذخیره کند. حافظه کامپیوتر نامحدود است و در ابتدا فقط عبارت x در حافظه آن ذخیره شده است. با این کامپیوتر می‌توان اعمال زیر را انجام داد:

- هرگاه عبارت جبری f در حافظه کامپیوتر باشد، می‌توان $\frac{1}{f}$ را نیز در حافظه اش ذخیره کرد (به شرط این که f متحد با صفر نباشد).
- هرگاه عبارت‌های جبری f و g در حافظه کامپیوتر باشند، می‌توان $f + g$ و $f - g$ را نیز در حافظه اش ذخیره کرد. (f و g می‌توانند یکسان باشند).

به عنوان مثال می‌توان این عبارات را در حافظه ذخیره کرد: $\frac{1}{x}$ ، $x - \frac{1}{x}$ ، $\frac{1}{x - \frac{1}{x}}$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$ و ... همه اعداد طبیعی n را بیابید که بتوان عبارت x^n و یا عبارتی متحد با آن را در حافظه ذخیره کرد. (دو عبارت جبری با متغیر x را متحد می‌گوییم اگر برای هر مقدار x که در دامنه هر دو باشد، برابر باشند).

۳. دایره دلخواهی که از رئوس B و C مثلث ABC می‌گذرد، اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط D و E قطع می‌کند. اگر محل تقاطع BD و CE باشد و H پای عمود رسم شده از P بر AC باشد و M و N به ترتیب وسط‌های BC و AP باشند، ثابت کنید مثلث‌های MNH و CAE متشابه‌اند.

۴. در چهارضلعی $ABCD$ ، AC نیمساز زاویه A است و $\angle ADC = \angle ACB$. X و Y به ترتیب، پای عمودهای رسم شده از A بر BC و CD هستند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث AXY روی خط BD است. (مرکز ارتفاعی یک مثلث، محل برخورد ارتفاع‌های آن است).

۵. محیط یک دایره را با $2n$ نقطه به $2n$ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. $n + 1$ بازه به طول‌های $1, 2, \dots, n + 1$ روی این دایره به نحوی قرار دارند که سر و ته آنها روی این نقاط است. نشان دهید یکی از این بازه‌ها کاملاً درون دیگری است.

۶. $n \geq 50$ عددی طبیعی است. نشان دهید می‌توان n را به صورت جمع دو عدد طبیعی نوشت که عوامل اول هر کدام از آن دو عدد از \sqrt{n} بزرگ‌تر نباشند. برای مثال، 94 را می‌توان به صورت $14 + 80$ نوشت که هیچ یک از عوامل اول این دو عدد از $\sqrt{94}$ بزرگ‌تر نیستند.