

# سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

---

بسمه تعالی

آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۲۹ بهمن ۱۳۹۴ در سراسر کشور برگزار شد. دفترچه پیش رو مجموعه سؤالات و پاسخ‌های تشریحی این آزمون است که توسط وب‌گاه المپیاد ریاضی ایران تهیه و منتشر می‌گردد.

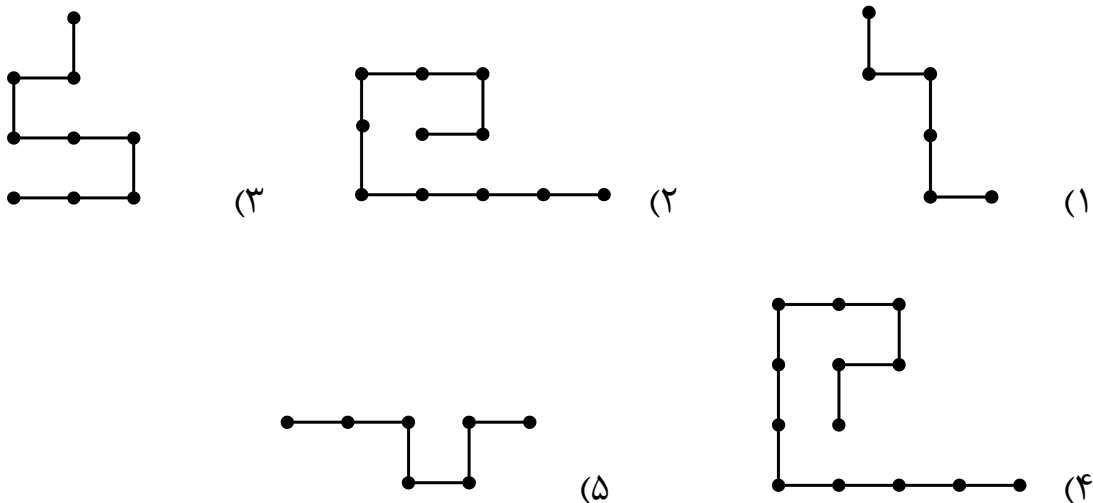
زمان: ۲۱۰ دقیقه

تعداد سؤالات: ۳۰

---

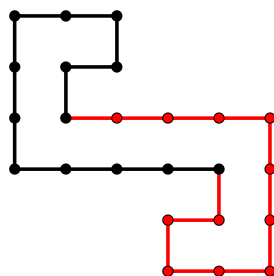
# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۱. با کنار هم قرار دادن دو نسخه مشابه از کدام نوع سیم، می‌توان یک چندضلعی بسته ساخت که خودش را قطع نکند و همه اضلاعش افقی و یا عمودی باشد؟



راه‌حل. گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به شکل زیر می‌توان با استفاده از دو نسخه مشابه از سیم گزینه ۴، یک چندضلعی بسته غیرمتقاطع ساخت:



به سادگی می‌توان دید که این کار برای دیگر گزینه‌ها غیرممکن است.

۲. در مثلث  $ABC$  زاویه  $\angle BAC = 60^\circ$  است. نقطه  $E$  درون ضلع  $AC$  و نقطه  $D$  روی امتداد ضلع  $BC$  از این مثلث به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که  $C$  بین  $B$  و  $D$  قرار دارد و به علاوه

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

$AB = DE$  اگر  $\angle DEC = 30^\circ$  باشد، نسبت  $\frac{BC}{CD}$  چند است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (۴)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$       (۵)  $\sqrt{3}$

راه‌حل. گزینه ۵ صحیح است.

در مثلث‌های  $ABC$  و  $CDE$  قانون سینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{BC}{\sin \angle BAC}, \quad (1)$$

$$\frac{DE}{\sin \angle ACD} = \frac{CD}{\sin \angle CED}. \quad (2)$$

از آن جا که  $\angle ACD = 180^\circ - \angle ACB$ ، پس  $\sin \angle ACB = \sin \angle ACD$  و از طرفی  $AB = DE$ . پس طرف‌های چپ دو عبارت (۱) و (۲) با هم برابرند.

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{CD}{\sin \angle CED},$$

و در نتیجه

$$\frac{BC}{CD} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

۳. اعداد حقیقی  $a, b, c$  و  $d$  در تساوی‌های  $ab = 2$ ,  $b + c = 3$ ,  $cd = 4$  و  $d + a = 5$  صدق می‌کنند. چند مقدار ممکن برای  $a$  وجود دارد؟

- (۱) صفر      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۴      (۵) بی‌نهایت

راه‌حل. گزینه ۳ صحیح است.

با استفاده از تساوی‌های دوم و چهارم می‌توانیم  $c$  و  $d$  را بر حسب  $a$  و  $b$  بنویسیم:  $c = 3 - b$  و  $d = 5 - a$ . با جایگذاری این روابط در دو معادله دیگر داریم:

$$ab = 2, \quad (3 - b)(5 - a) = 4 \implies 15 - (3a + 5b) + ab = 4.$$

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

با جایگذاری مقدار  $ab$  در رابطه دوم به دو رابطه معادل زیر می‌رسیم:

$$ab = 2, \quad 3a + 5b = 13 \iff b = \frac{13}{5} - \frac{3a}{5} \implies \left(\frac{13}{5} - \frac{3a}{5}\right)a = 2 \iff 3a^2 - 13a + 10 = 0.$$

در نتیجه  $a$  ریشه چندجمله‌ای  $3x^2 - 13x + 10$  است. دلتای این چندجمله‌ای برابر با ۴۹ و مثبت است، پس دو ریشه متمایز  $x_1, x_2$  دارد. حال مقادیر ممکن برای  $a$  برابر با  $x_1$  و  $x_2$  است و در نتیجه دو مقدار ممکن برای  $a$  وجود دارد.

۴. سه جفت پیچ و مهره کوچک، متوسط و بزرگ داریم که نمی‌دانیم کدام پیچ برای کدام مهره است. هر بار می‌توانیم یک پیچ و یک مهره را با هم امتحان کنیم. کم‌ترین تعداد امتحان‌های مورد نیاز برای این که در هر صورت مهره نظیر هر پیچ را بیابیم، برابر کدام گزینه است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      ۵ (۵)

**راه‌حل.** گزینه ۳ صحیح است.

روشی ارائه می‌دهیم که با حداکثر سه بار امتحان کردن می‌توان مهره نظیر هر پیچ را یافت. به این صورت که ابتدا یکی از مهره‌ها را بر می‌داریم و آن را با دو تا از پیچ‌ها امتحان می‌کنیم. حال یا این مهره نظیر یکی از این دو پیچ است که پیچ متناظر با آن را یافته‌ایم و یا این که متناظر با هیچ کدام از این دو پیچ نیست و بنابراین حتماً متناظر با پیچ سوم خواهد بود. پس با حداکثر دو بار امتحان کردن پیچ نظیر این مهره را یافته‌ایم. حال یکی دیگر از مهره‌ها را بر می‌داریم و آن را با یکی از دو پیچ باقی‌مانده امتحان می‌کنیم. اگر این دو نظیر هم بودند که پیچ و مهره باقی‌مانده هم متناظر با هم هستند و اگر این دو نظیر هم نبودند، این مهره با پیچ سوم متناظر است و پیچ و مهره باقی‌مانده هم نظیر هم هستند. پس در هر صورت با این روش در حداکثر سه حرکت می‌توان پیچ و مهره‌ها را متناظر کرد. از طرف دیگر ادعا می‌کنیم که با دو حرکت لزوماً نمی‌توان پیچ و مهره‌ها را متناظر کرد. اگر در این دو امتحان ما یک پیچ (به طور مشابه یک مهره) مشترک باشند، در مورد دو پیچ دیگر اطلاعاتی به دست نمی‌آوریم. اگر هم در این دو امتحان دو پیچ مختلف را با دو مهره مختلف مقایسه کنیم و برای مثال در یک امتحان مهره بزرگ‌تر و در دیگری پیچ بزرگ‌تر باشد، نمی‌توانیم مطمئن شویم که کدام مهره مربوط به کدام پیچ است. (می‌توان حالت‌های متفاوتی را مثال زد که همین نتیجه را در مقایسه کردن به دست دهند.)

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۵. به یک هفته در سال «جالب» می‌گوییم اگر دوشنبه آن هفته، روز دوم، دوازدهم یا بیست و دوم ماه باشد. در فصل پاییز چند هفته ممکن است جالب باشد؟

## بهمن ۹۴

۲۴	۱۷	۱۰	۳	شنبه	(۱) یک یا دو هفته
۲۵	۱۸	۱۱	۴	یکشنبه	(۲) یک یا سه هفته
۲۶	۱۹	۱۲	۵	دوشنبه	(۳) صفر یا سه هفته
۲۷	۲۰	۱۳	۶	سه‌شنبه	(۴) صفر، یک یا دو هفته
۲۸	۲۱	۱۴	۷	چهارشنبه	(۵) در هر حالتی دقیقاً دو هفته
۲۹	۲۲	۱۵	۸	پنجشنبه	
۳۰	۲۳	۱۶	۹	جمعه	

راه‌حل. گزینه ۱ صحیح است.

هر یک از ماه‌های پاییز ۳۰ روز دارند، بنابراین اگر روزهای پاییز را به ترتیب از ۱ تا ۹۰ شماره‌گذاری کنیم، روزهای دوم، دوازدهم و بیست‌ودوم ماه‌ها، روزهای

$$۲, ۱۲, ۲۲, ۳۲, ۴۲, ۵۲, ۶۲, ۷۲, ۸۲$$

هستند که باقیمانده این اعداد بر ۷ به صورت زیر است:

$$۲, ۵, ۱, ۴, ۰, ۳, ۶, ۲, ۵$$

حال این که یک روز پاییز چه روزی از هفته باشد، به باقیمانده شماره آن روز بر ۷ و اینکه روز اول پاییز چه روزی از هفته است، وابسته است. یعنی اگر روز اول پاییز روز  $n$ -ام هفته باشد (شنبه روز اول هفته است)، روز  $k$ -ام پاییز روز باقیمانده  $(n+k-1)$ -ام هفته است. (اگر باقیمانده ۰ باشد، یعنی جمعه) پس روز  $k$ -ام دوشنبه است اگر باقیمانده  $n+k-1$  بر ۷ برابر ۳ باشد و یا به عبارت دیگر باقیمانده  $k$  و  $n-4$  بر ۷ یکسان باشد. حال توجه کنید که باقیمانده روزهای دوم، دوازدهم و بیست‌ودوم ماه‌های پاییز هر عدد ۰ تا ۶ را یک یا ۲ بار می‌گیرد، پس بسته به این که باقیمانده  $n-4$  بر ۷ چه عددی باشد، تعداد هفته‌های جالب ۱ یا ۲ است.

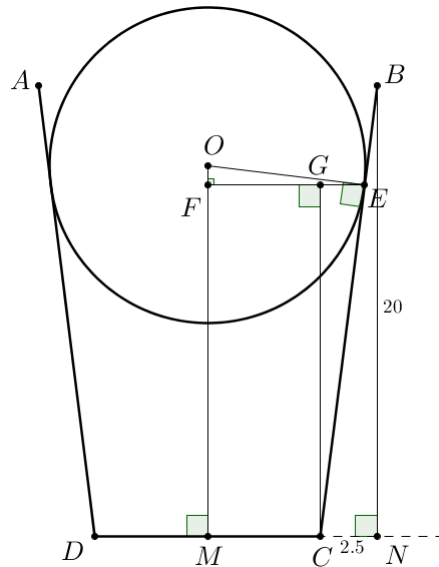
## سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور



۶. گلدانی به شکل مخروطی ناقصی با ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر و قطر دهانه و کف به ترتیب ۱۵ و ۱۰ سانتی‌متر روی زمین قرار گرفته است. تویی به شعاع ۷ سانتی‌متر را در این گلدان می‌اندازیم. ارتفاع بالاترین نقطه توب از سطح زمین (بر حسب سانتی‌متر) به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟  
 ۲۱ (۱)    ۲۳ (۲)    ۲۵ (۳)    ۲۷ (۴)    ۲۹ (۵)

راه‌حل. گزینه ۲ صحیح است.

از آنجا که قطر توب از قطر دهانه گلدان کوچک‌تر است، پس حتماً توب با سطح داخلی گلدان تماس پیدا می‌کند. شکل زیر، تصویر جانبی گلدان و توب را نشان می‌دهد.



$O$  را مرکز توب و  $M$  را وسط  $CD$  بگیرید و  $N$  را پای عمود از  $B$  بر امتداد  $CD$  بگیرید. داریم

$$\sin \angle BCN = \frac{BN}{BC} = \frac{20}{\sqrt{20^2 + 2.5^2}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

چون چهارضلعی  $OMCE$  محاطی است، داریم

$$\angle FOE = \angle BCN$$

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

پس

$$FE = \gamma \sin \angle FOE = \gamma \sin \angle BCN = \gamma \frac{BN}{CN} = \frac{56}{\sqrt{65}}$$

و مشابهاً

$$OF = \gamma \cos \angle FOE = \gamma \cos \angle BCN = \frac{\gamma}{\sqrt{65}} \quad (3)$$

اکنون از  $C$  بر  $FE$  عمود می‌کنیم تا آن را در  $G$  قطع کند. داریم

$$GE = FE - FG = FE - MC = \frac{56}{\sqrt{65} - 5}$$

اکنون با توجه به تشابه مثلث‌های  $BCN$  و  $GEC$  داریم

$$\frac{GC}{GE} = \frac{20}{2.5} = 8$$

بنابراین

$$GC = 8 \left( \frac{56}{\sqrt{65}} - 5 \right) \quad (4)$$

پس ارتفاع بالاترین نقطه توپ برابر است با

$$PM = \gamma + OM = \gamma + OF + FM = \gamma + OF + GC$$

که بنابر روابط (3) و (4) به دست می‌آوریم:

$$PM = \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{65}} + 8 \left( \frac{56}{\sqrt{65}} - 5 \right) = \frac{455}{\sqrt{65}} - 33$$

که حاصل آن عددی بین 22 و 23 است.

7.  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی هستند که  $a^2 + b^2 = 8$ . حداکثر مقدار  $2(a+b) - ab$  چند است؟

- ۴ (۱)       $2\sqrt{6}$  (۲)       $2\sqrt{8}$  (۳)      ۶ (۴)      ۸ (۵)

راه‌حل. گزینه ۴ صحیح است.

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 8 + 2ab \implies ab = \frac{1}{2}(a+b)^2 - 4.$$

حال اگر  $a+b$  را با  $x$  نشان دهیم، داریم:

$$2(a+b) - ab = 2x - \frac{x^2}{2} + 4.$$

اما توجه کنید که  $a^2 + b^2 = 8$  معادله نقاط یک دایره به شعاع  $2\sqrt{2}$  به مرکز مبدأ است، بنابراین با توجه به شکل دایره، ماکزیمم و مینیمم  $a+b$  روی آن برابر با  $2 \pm 2\sqrt{2}$  است. در نتیجه جواب مسأله برابر با ماکزیمم چندجمله‌ای  $4 + 2x - \frac{1}{2}x^2$  روی بازه  $[-4, 4]$  است. اما نمودار این چندجمله‌ای، یک سهمی رو به پایین است که ماکزیمم آن در نقطه  $x=2$  رخ می‌دهد که در بازه  $[-4, 4]$  هم قرار دارد. (ماکزیمم چندجمله‌ای  $cx^2 + dx + e$  در صورتی که  $c$  منفی باشد، در  $x = -\frac{d}{2c}$  است) بنابراین برای به دست آوردن جواب، باید  $4 + 2x - \frac{1}{2}x^2$  را در  $x=2$  حساب کنیم که حاصل عدد ۶ است.

۸. در یک هتل ۱۳ اتاق وجود دارد که شماره اتاق‌ها از ۱ تا ۱۳ روی درب اتاق و روی کلید هر اتاق درج شده است، ولی کلید هر اتاق یکتا نیست و همه کلیدهایی که تفاضل شماره نوشته شده روی آن‌ها و شماره اتاق بر ۳ بخش‌پذیر باشد، درب اتاق را باز می‌کنند. به چند طریق می‌توان کلیدها را به اتاق‌ها نسبت داد تا درب همه اتاق‌ها قابل باز شدن باشند؟

$$(1) \quad 5! \times (4!)^2 \quad (2) \quad 4! \times (5!)^2 \quad (3) \quad \frac{5! \times (4!)^2}{3!} \quad (4) \quad \frac{4! \times (5!)^2}{3!} \quad (5) \quad 13!$$

راه‌حل. گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا توجه کنید که تفاضل دو عدد در صورتی بر ۳ بخش‌پذیر است که آن دو باقیمانده یکسانی بر ۳ داشته باشند. در میان اعداد ۱ تا ۱۳ هم ۴ عدد باقیمانده ۰، ۵ عدد باقیمانده ۱ و ۴ عدد باقیمانده ۲ بر ۳ دارند.

در نتیجه اگر بخواهیم به هر اتاق کلیدی نسبت دهیم که در اتاق را باز کند، به اتاق‌هایی که باقیمانده ۰ بر ۳ دارند، جایگشتی از کلیدهای با باقیمانده ۳ را باید متناظر کنیم (۴! حالت)، به اتاق‌هایی با باقیمانده ۱، کلیدهای با باقیمانده ۱ (۵! حالت) و به اتاق‌هایی



# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

با باقیمانده ۲، کلیدهای با باقیمانده ۲ (۴! حالت). پس با توجه به مستقل بودن این انتخاب‌ها و اصل ضرب، تعداد کل حالات برابر با حاصل ضرب این اعداد یعنی  $۵! \times ۴!$  است.

۹. مقدار سینوس زاویه  $۱۱۱^\circ$  درجه به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

- (۱) -۱      (۲)  $-\frac{۱}{۵}$       (۳) صفر      (۴)  $\frac{۱}{۵}$       (۵) ۱

راه‌حل. گزینه ۱ صحیح است.

می‌دانیم که اگر  $x \equiv y \pmod{360}$ ، آن‌گاه  $\sin x = \sin y$ . اکنون داریم

$$۱۱۱^\circ \equiv ۱۱^\circ \pmod{360} \Rightarrow ۱۱ \times (۱۱^۳)^{۳۳} = ۱۱ \times (۱۳۳۱)^{۳۳}$$

$$\equiv ۱۱^\circ \pmod{360} \Rightarrow ۱۱ \times (۲۵۱)^{۳۳} = ۱۱ \times ۲۵۱ \times (۲۵۱)^{۳۲}$$

$$= ۲۷۶۱ \times (۶۳۰۰۱)^{۱۶} \equiv ۲۴۰ \times ۱۱^۶ = ۲۴۰,$$

پس

$$\sin(۱۱۱^\circ) = \sin(۲۴^\circ) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \approx -۰٫۸۶.$$

۱۰. در دوزنقه  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) نقطه‌های  $P, Q, R, S$  را به ترتیب وسط‌های  $AB, BC, CD, AC$  و  $BD$  هستند. می‌دانیم نسبت مساحت مثلث  $PQR$  به مساحت مثلث  $PST$  برابر  $\frac{۱۳۹۵}{۱۳۹۴}$  است. نسبت دو قاعده این دوزنقه کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{۱۳۹۴}$       (۲)  $\sqrt{۱۳۹۵}$       (۳) ۶۹۷      (۴) ۱۳۹۵      (۵) ۲۷۸۹

راه‌حل. گزینه ۵ صحیح است.

ابتدا سعی می‌کنیم که مساحت هر کدام از دو مثلث  $PQR$  و  $PST$  را بر حسب اجزای دوزنقه  $ABCD$  محاسبه کنیم. برای این منظور ارتفاع دوزنقه را با  $h$  نمایش می‌دهیم.

در مورد مثلث  $PQR$  داریم:

$$S_{PQR} = S_{PBCR} - S_{PQB} - S_{QCR}$$

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

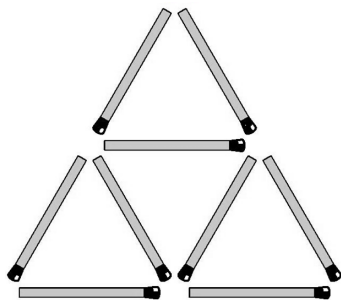
حال چون مثلث  $BPQ$  و  $BAC$  با نسبت  $\frac{1}{4}$  متشابه هستند،  $S_{BPQ} = \frac{1}{4}S_{BAC} = \frac{1}{4}AB \cdot h$  و به طریق مشابه  $S_{QRC} = \frac{1}{4}CD \cdot h$ . در مورد دوزنقه  $PBCR$  هم داریم  $S_{PBCR} = \frac{1}{4}(PB+CR)h = \frac{1}{4}(AB+CD)h$  پس:

$$S_{PQR} = \frac{1}{4}(AB+CD)h - \frac{1}{4}AB \cdot h - \frac{1}{4}CD \cdot h = \frac{1}{4}(AB+CD)h$$

در مورد مثلث  $PST$  می‌دانیم که ارتفاع آن برابر  $\frac{h}{2}$  است و قاعده آن  $ST = QS - QT$ . با استفاده از قضیه تالس نتیجه می‌گیریم که  $QS = \frac{1}{4}CD$  و  $QT = \frac{1}{4}AB$ . پس:

$$S_{PST} = \frac{1}{2} \left( \frac{CD}{2} - \frac{AB}{2} \right) \frac{h}{2} = \frac{1}{8}(CD-AB)h$$

پس نسبت مساحت این دو مثلث برابر  $\frac{CD+AB}{CD-AB}$  است که طبق فرض مسئله برابر  $\frac{1395}{1394}$  شده است. این فرض با یک محاسبه سراسر نتیجه می‌دهد که نسبت  $\frac{CD}{AB}$  برابر ۲۷۸۹ خواهد بود.



۱۱. به چند طریق می‌توان ۳ چوب کبریت از ۹ چوب کبریت موجود در شکل روبه‌رو را حذف کرد که هیچ مثلثی در شکل باقی نماند؟

۶ (۱)      ۹ (۲)      ۱۸ (۳)      ۲۷ (۴)      ۸۰ (۵)

**راه‌حل.** گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا توجه کنید که در شکل ۵ مثلث وجود دارد: یک مثلث بزرگ که شامل چوب کبریت‌های دور شکل است و چهار مثلث کوچک متشکل از ۳ چوب کبریت که یکی در بالا، دیگری در پایین و راست، دیگری در پایین و چپ (مثلث‌های کناری) و آخری در وسط شکل قرار دارد. حال ۳ مثلث کناری هیچ چوب کبریت مشترکی ندارند و اگر بخواهیم بعد از حذف ۳ چوب کبریت مثلثی باقی نماند، باید از هر کدام از آنها یک چوب کبریت حذف کنیم. کبریتی که برای حذف کردن از هر کدام از این مثلث‌ها انتخاب می‌کنیم، ۳ حالت دارد و بنابراین به ۲۷ طریق می‌توانیم ۳ چوب کبریت از شکل حذف کنیم که این مثلث‌ها باقی نمانند.

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

اما توجه کنید که در بعضی از این حالت‌ها مثلث بزرگ و مثلث وسط باقی می‌مانند: اگر بعد از حذف ۳ چوب کبریت مثلث بزرگ باقی بماند، باید هر سه چوب کبریت از مثلث وسط انتخاب شده باشند که فقط یک حالت دارد. همین‌طور اگر از بعد از حذف ۳ چوب کبریت به روش بالا، مثلث وسط باقی مانده باشد، باید از هر یک از مثلث‌های کناری چوب کبریتی را حذف کرده باشیم که دور شکل قرار دارد. (که برای هر کدام دقیقاً ۲ تاست) پس تعداد حالاتی که این اتفاق رخ می‌دهد، ۸ حالت است. پس باید در کل ۹ حالت را از ۲۷ حالت قبل حذف کنیم و جواب نهایی برابر ۱۸ است.

۱۲. یک مستطیل با اضلاع ۳۰ و ۴۰ را با رسم خطوطی موازی اضلاع به شبکه‌ای  $۴۰ \times ۳۰$  از مربع‌های واحد تبدیل کرده‌ایم. یکی از قطرهای مستطیل اولیه را در نظر بگیرید. دایره‌ی محاطی چند تا از مربع‌های واحد شبکه‌بندی به این قطر مماس هستند؟

(۱) ۱۰      (۲) ۲۰      (۳) ۳۰      (۴) ۳۸      (۵) ۴۰

راه‌حل. گزینه ۲ صحیح است.

فرض کنید مستطیل را به گونه‌ای در صفحه قرار داده‌ایم که رأس پایین چپ آن بر مبدأ مختصات منطبق شده، اضلاع آن موازی محورهای بوده و ضلع بزرگ‌تر آن روی محور  $x$  باشد. حال معادله خط شامل قطری که مبدأ را به ضلع روبه‌رویش متصل می‌کند به صورت  $y = \frac{3}{4}x$  است. اگر دایره‌ای به شعاع  $\frac{1}{4}$  (شعاع همه دایره‌های محاطی برابر  $\frac{1}{4}$  است) بر این خط مماس باشند، مرکز دایره در فاصله  $\frac{1}{4}$  از این خط قرار دارد. یعنی مرکز همه دایره‌های مماس به این قطر (با شعاع  $\frac{1}{4}$ ) روی دو خط موازی با فاصله  $\frac{1}{4}$  از این قطر قرار دارند. معادله این دو خط به صورت  $y = \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{8}$  است.

مرکز دایره‌های محیطی مربع‌های شبکه‌بندی، همان مرکز مربع‌ها هستند. به این نقطه‌ها در ادامه راه‌حل نقطه‌های مرکزی می‌گوییم. به دلیل تقارن شکل نسبت به وسط قطر، تعداد نقطه‌های مرکزی روی این دو خط با هم برابر است و بنابراین کافی است تنها تعداد نقطه‌های روی یکی از خط‌ها را محاسبه کنیم. نقطه‌های مرکزی به شکل  $(m + \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$  هستند که  $0 \leq m < 40$  و  $0 \leq n < 30$ .

نقطه  $(m + \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$  روی خط  $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{8}$  قرار دارد، اگر و تنها اگر  $m = \frac{2n+2}{4}$  پس  $4 \mid 3n+2$  و این یعنی  $n$  به فرم  $4k+2$  است که  $0 \leq k \leq 9$ . از آن‌جا که در همه موارد  $m = \frac{2n+2}{4} = 3k+2$

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

بین  $0$  و  $30$  قرار دارد، تعداد نقطه‌های مطلوب روی این خط برابر  $10$  و بنابراین تعداد کل نقطه‌های مرکزی که از قطر فاصله  $\frac{1}{3}$  دارند، برابر  $20$  است.

۱۳. طول جهش‌های یک قورباغه می‌تواند هر یک از اعداد  $1, 5, 5^2, 5^3, \dots$  باشد. این قورباغه روی نقطه صفر از محور اعداد صحیح نشسته و در هر مرحله می‌تواند به سمت راست یا چپ جهش کند. اگر این قورباغه نتواند دو جهش با طول مساوی انجام دهد، به چند تا از اعداد  $\{1, 2, \dots, 1394\}$  می‌تواند برود؟

۶۳ (۱)      ۶۴ (۲)      ۸۱ (۳)      ۱۲۱ (۴)      ۲۴۳ (۵)

راه‌حل. گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا توجه کنید برای هر  $k$ ، حاصل جمع توان‌های  $5$  کمتر از  $5^k$  برابر است با:

$$1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{k-1} = \frac{5^k - 1}{4} < 5^k,$$

و در نتیجه اگر قورباغه تعدادی پرش داشته باشد و طول بزرگترین پرش  $5^k$  باشد، اگر این پرش به سمت راست باشد، مکان نهایی قورباغه در اعداد مثبت است و اگر این پرش به سمت چپ باشد، مکان نهایی قورباغه در اعداد منفی است. علت آن هم این است که جمع طول همه پرش‌های دیگر از طول بزرگترین پرش کمتر است.

از طرف دیگر توجه کنید که:

$$1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 = 781 < 1394 < 2344 = 5^5 - (1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4),$$

پس اگر قورباغه نهایتاً در یک عدد مثبت کمتر یا مساوی  $1394$  باشد، طول بزرگترین پرش حداکثر  $5^4$  است و این پرش هم به سمت راست است. پس مکان نهایی قورباغه به صورت:

$$5^a + (0 \text{ یا } 1 \text{ یا } -1)5^{a-1} + \dots + (0 \text{ یا } 1 \text{ یا } -1)5 + (0 \text{ یا } 1 \text{ یا } -1),$$

است که  $a$  حداکثر برابر  $4$  است. به راحتی می‌توان دید که یک عدد حداکثر یک نمایش به صورت بالا دارد. (مثلاً با در نظر گرفتن باقیمانده بر  $5$  می‌توان فهمید که ضریب  $1$  کدام یک از  $0$  یا  $1$  یا  $-1$  بوده و بعد با کم کردن مقدار این جمله از عدد و تقسیم بر  $5$ ، ضریب  $5$  در نمایش بالا را به دست آورد و ...)

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

تعداد اعدادی که نمایشی به صورت بالا دارند، برای هر مقدار  $a$  برابر با  $3^a$  است (تعداد حالات انتخاب  $0$  یا  $1$  یا  $-1$  از هر پرانتز) و در نتیجه اگر این مقدار را برای هر  $a \leq 4$  (و  $a = 0$ ) جمع بزنیم،  $121 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81$  به دست می‌آید.

۱۴. چند چهارتایی مرتب  $(a, b, c, d)$  از اعداد حقیقی یافت می‌شود که در دستگاه معادلات روبه‌رو صدق کند؟

$$\begin{cases} a^3 + bc = d^3 \\ b^3 + cd = a^3 \\ c^3 + da = b^3 \\ d^3 + ab = c^3 \end{cases}$$

۲۵	(۳)	۵	(۲)	۱	(۱)
		(۵)	بی‌نهایت	۴۹	(۴)

راه‌حل. گزینه ۱ صحیح است.

اگر همه معادلات را با هم جمع بزنیم، خواهیم داشت:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + ab + bc + cd + da = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \implies (a+c)(b+d) = 0.$$

بنابراین یکی از  $a+c$  و  $b+d$  برابر صفر است.

در حالت اول  $c = -a$  و اگر این رابطه را در معادلات اول و چهارم جایگذاری کنیم، داریم:

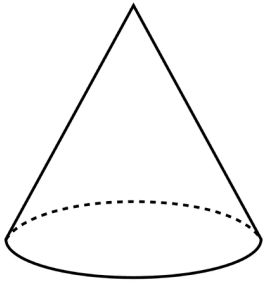
$$\begin{cases} a^3 - ab = d^3 \\ d^3 + ab = -a^3 \end{cases} \implies d^3 + ab = a^3 = -a^3 \implies a = 0, c = 0.$$

بعد از جایگذاری صفر به جای  $a$  و  $c$  در معادلات اول و دوم هم خواهیم داشت،  $b = d = 0$ .

حالت دوم  $b + d = 0$  هم تنها به جواب  $a = b = c = d = 0$  منجر می‌شود. پس این دستگاه معادلات فقط یک جواب دارد.

۱۵. نقطه  $P$  در جسم  $A$  را «خاص» گوئیم، اگر نقطه‌های متمایز  $X$  و  $Y$  در  $A$  وجود نداشته باشند که  $P$  نقطه وسط پاره‌خط  $XY$  باشد. کدام گزینه در مورد نقاط خاص یک مخروط توپر با قاعده دایره صحیح است؟

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور



- (۱) مخروط تنها یک نقطه خاص دارد.
- (۲) هر خطی که وجه دایره‌ای مخروط را قطع کند، حتماً شامل یک نقطه خاص مخروط است.
- (۳) هر صفحه‌ای که مخروط را قطع کند، حتماً شامل نقطه‌ای خاص از مخروط است.
- (۴) همه نقطه‌های سطح جانبی مخروط، خاص هستند.
- (۵) یک و فقط یک کره در فضا وجود دارد که همه نقاط خاص مخروط روی سطح آن قرار بگیرند.

**راه‌حل.** گزینه ۵ صحیح است.

با توجه این که مخروط جسمی محدب است (اگر دو نقطه در مخروط باشند، پاره خطی که آن‌ها را به هم وصل کند در مخروط قرار دارد) اشتراک هر خط با مخروط یک پاره خطی است. با توجه به این نکته ادعا می‌کنیم که نقطه‌های خاص دقیقاً نقطه‌هایی مثل  $P$  هستند که بتوان برای آن‌ها خطی مثل  $l$  یافت که نقطه  $P$  نقطه مرزی پاره خط اشتراک  $l$  با مخروط نباشد. زیرا اگر چنین خطی پیدا شد می‌توان روی همان پاره خط (اشتراک خط و مخروط) دو نقطه متمایز یافت که  $P$  وسط آن‌ها باشد. بالعکس، اگر دو نقطه متمایز یافت شد که  $P$  نقطه میانی آن‌ها باشد، نقطه  $P$  نقطه مرزی اشتراک خط گذرا از این دو نقطه و مخروط نیست.

حال ادعا می‌کنیم نقطه‌های خاص مخروط دقیقاً نقطه رأس به علاوه همه نقطه‌های مرزی وجه دایره‌ای مخروط هستند.

در مورد هر کدام از نقطه‌های این مجموعه مثل  $P$  می‌توان صفحه‌ای به نام  $\pi(P)$  یافت که مخروط در یک طرف صفحه نقطه‌ای ندارد و به علاوه اشتراک  $\pi(P)$  با مخروط در یک پاره خط یا یک نقطه است که  $P$  نقطه مرزی این پاره خط اشتراک است (در مورد رأس مخروط صفحه‌ای موازی قاعده و در مورد نقطه‌های مرزی وجه دایره‌ای صفحه‌ای را بگیرید که از آن نقطه و رأس مخروط می‌گذرد و دایره را تنها در  $P$  قطع می‌کند).

حال خطی گذرا از  $P$  مانند  $l$  را در نظر بگیرید. اگر این خط به تمامی در  $\pi(P)$  قرار دارد، یا تنها در تک نقطه  $P$  با مخروط اشتراک دارد و یا شامل پاره خطی که  $P$  و رأس

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

مخروط است که  $P$  نقطهٔ مرزی آن است. اگر هم  $l$  از  $\pi(P)$  عبور کند، چون مخروط در یک طرف صفحه نقطه‌ای ندارد، مجدداً نقطهٔ  $P$  نقطهٔ مرزی پاره‌خط اشتراک خواهد شد. پس همهٔ این نقطه‌ها خاص هستند. ادعا می‌کنیم که هیچ یک از نقطه‌های دیگر نمی‌توانند خاص باشند.

• اگر  $P$  رأس مخروط یا در وجه دایره‌ای نباشد، خط واصل بین رأس مخروط و  $P$ ، مخروط را در یک پاره‌خط قطع می‌کند که یک سر آن نقطهٔ رأس و سر دیگر آن نقطه‌ای از دایرهٔ قاعده است، پس  $P$  نمی‌تواند نقطهٔ مرزی این پاره‌خط باشد و لذا عادی است! (خاص نیست).

• اگر  $P$  نقطه‌ای درون (و نه روی مرز) دایرهٔ قاعده باشد، خط دل‌خواهی در صفحهٔ شامل دایره در نظر بگیرید که از  $P$  عبور کند. به وضوح این خط مخروط را در یک وتر از دایره قطع می‌کند که نقطه‌های مرزی آن روی مرز دایره هستند و لذا در این حالت هم  $P$  نمی‌تواند نقطهٔ مرزی باشد و بنابراین نقطه‌ای خاص نیست.

حال با توجه به آن چه که در مورد نقطه‌های خاص فهمیدیم به سراغ گزینه‌ها می‌رویم.

- گزینهٔ ۱. دیدیم که نقطه‌های خاص بیش از یکی است. پس این گزینه غلط است.
- گزینهٔ ۲. خطی عمود بر وجه دایره‌ای بگیرید که از رأس مخروط عبور نکند. به وضوح چنین خطی نمی‌تواند از نقطه‌های مرزی دایره که سایر نقاط خاص ما بودند بگذرد، پس شامل نقطه‌ای خاص نیست. بنابراین این گزینه هم غلط است.
- گزینهٔ ۳. صفحه‌ای موازی وجه دایره‌ای مخروط بگیرید که از رأس عبور نکند. به وضوح این صفحه هم شامل هیچ یک از نقطه‌های خاص نیست و بنابراین این گزینه نمی‌تواند درست باشد.
- گزینهٔ ۴. دیدیم که همهٔ نقطه‌های سطح جانبی خاص نیستند و بنابراین این گزینه هم نمی‌تواند درست باشد.
- گزینهٔ ۵. مرکز چنین کره‌ای باید روی خط عمود بر وجه دایره‌ای در مرکز دایره باشد،

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

چون باید از همه نقطه‌های دایره به یک فاصله باشد. از طرف دیگر اگر یکی از نقطه‌های دایره را به دل خواه در نظر گرفته و صفحه عمود منصف این نقطه و رأس مخروط را در نظر بگیریم، چون رأس مخروط خارج از صفحه وجه دایره‌ای است، این صفحه عمود منصف موازی خط عمود بر دایره نیست و بنابراین با آن دقیقاً در یک نقطه اشتراک دارد. این نقطه اشتراک مرکز کره‌ای است که از وجه دایره‌ای و رأس مخروط می‌گذرد. پس چنین کره‌ای وجود دارد و چون مرکز و در نتیجه شعاع آن به طور یک‌تا تعیین می‌شود، چنین کره‌ای یک‌تا است. پس گزینه ۵، گزینه درست است.

۱۶. علی فرمولی برای چندجمله‌ای‌های درجه ۲ کشف کرده است که با کمک آن می‌تواند مقدار چندجمله‌ای درجه دویی را در نقطه ۳ بر حسب مقدار آن در نقاط صفر و ۱ و ۲ به دست آورد. فرمول علی برای چندجمله‌ای  $P$  به شکل زیر است:

$$P(3) = aP(0) + bP(1) + cP(2),$$

که در آن  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه عدد ثابت هستند. این سه عدد را پیدا کنید و مشخص کنید که مقدار  $a - b + c$  چند است؟

۳ (۱)      ۴ (۲)      ۵ (۳)      ۶ (۴)      ۷ (۵)

راه‌حل. گزینه ۵ صحیح است.

فرض کنید  $P(x) = px^2 + qx + r$  باشد. پس علی  $a$ ،  $b$  و  $c$  را به گونه‌ای یافته است که برای هر  $p$ ،  $q$  و  $r$

$$\begin{aligned} \underbrace{9p + 3q + r}_{P(3)} &= a \underbrace{(r)}_{P(0)} + b \underbrace{(p + q + r)}_{P(1)} + c \underbrace{(4p + 2q + r)}_{P(2)} \\ \Rightarrow 9p + 3q + r &= p(b + 4c) + q(b + 2c) + r(a + b + c) \end{aligned}$$

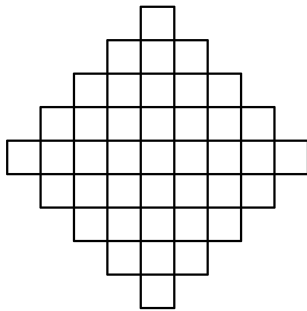
و چون  $p$  و  $q$  و  $r$  دل خواه هستند، باید ضرایب آن‌ها در دو طرف تساوی برابر باشند:

$$\begin{cases} b + 4c = 9, \\ b + 2c = 3, \\ a + b + c = 1, \end{cases}$$



# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

با استفاده از دو رابطه اول و دوم نتیجه می‌شود که  $c=3$  و  $b=-3$  و با قرار دادن این دو در رابطه سوم  $a=1$  به دست می‌آید. پس  $a-b+c=7$  و گزینه (۵) صحیح است.

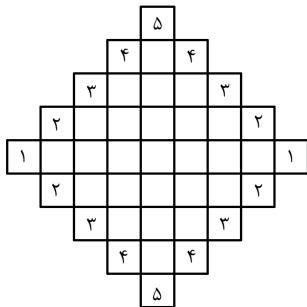


۱۷. به چند طریق می‌توان در شکل روبه‌رو ۸ خانه را انتخاب کرد که هیچ دو تایی از آن‌ها هم‌سطر و یا هم‌ستون نباشند؟

۱۵ (۱)      ۲۰ (۲)      ۲۸ (۳)      ۳۲ (۴)      ۶۴ (۵)

**راه‌حل.** گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا توجه کنید که چون می‌خواهیم ۸ خانه با خاصیت مورد نظر انتخاب کنیم و ۹ ستون داریم. دقیقاً باید یکی از ستون‌ها خالی باشند.



حال به دو خانه با شماره ۱ در شکل روبه‌رو توجه کنید، چون هر کدام از این خانه‌ها یک ستون هستند، با توجه به نکته بالا باید حداقل یکی از این دو خانه انتخاب شوند و از سوی دیگر چون هم‌سطر هستند، حداکثر یکی از این دو خانه می‌توانند انتخاب شوند. بنابراین دقیقاً یک خانه از بین دو خانه ۱ انتخاب می‌شود و هیچ از خانه‌های سطر

میانی غیر از این خانه انتخاب نمی‌شود و ضمناً همه ستون‌های دیگر خانه انتخاب شده دارند. توجه کنید که برای انتخاب این یک خانه دو حالت داریم.

حال به خانه‌های با شماره ۲ توجه کنید. چون این خانه‌ها، تنها خانه‌های مجاز دو ستون را شامل هستند باید دقیقاً دو تا از این چهار خانه انتخاب شوند. که برای انتخاب دو خانه که هم‌سطر و هم‌ستون نباشند، دو حالت داریم. با انتخاب این دو خانه دیگر هیچ خانه‌ای از سه سطر میانی انتخاب نخواهد شد.

مشابه بالا باید از بین خانه‌های با شماره ۳ و ۴، هر کدام دو خانه انتخاب کرد که هم‌سطر و هم‌ستون نباشند که برای هر شماره انتخاب به دو طریق امکان‌پذیر است.

در نهایت باید از بین دو خانه با شماره ۵، یکی را انتخاب کرد که این هم به دو طریق

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

امکان دارد.

پس در کل برای انتخاب ۸ خانه با خاصیت مطلوب،  $2^5 = 32$  طریق ممکن وجود دارد.

۱۸. حداکثر چند عدد از میان اعداد  $\{1, 2, \dots, 1394\}$  می‌توان انتخاب کرد که حاصل ضرب هر ۵ تا از آن‌ها مضرب ۱۴ باشد؟

۹۹ (۱)      ۱۰۳ (۲)      ۱۰۷ (۳)      ۱۱۱ (۴)      ۱۱۴ (۵)

راه‌حل. گزینه ۳ صحیح است.

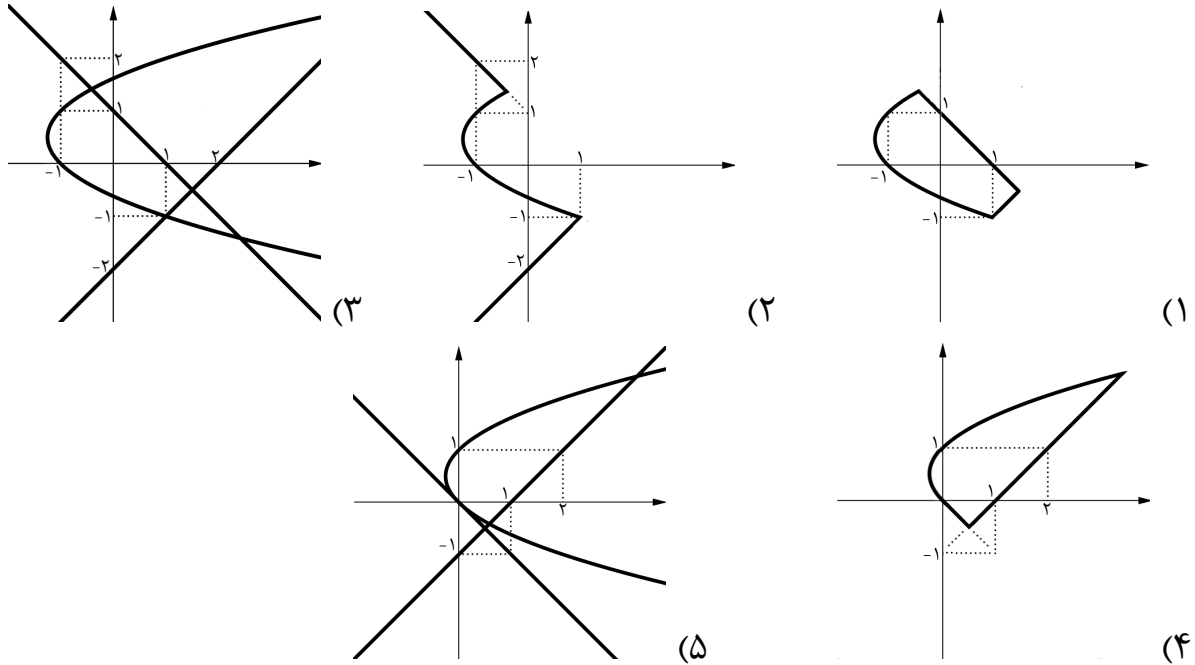
فرض کنید  $A$  زیرمجموعه‌ای از اعداد ۱ تا ۱۳۹۴ باشد که حاصل ضرب اعضای هر زیرمجموعه ۵ تایی از آن بر ۱۴ بخش‌پذیر است. همچنین فرض کنید تعداد اعضای  $A$  که بر ۱۴ بخش‌پذیرند،  $a$  تا، تعداد اعضای  $A$  که بر ۷ بخش‌پذیرند،  $b$  تا، تعداد اعضای  $A$  که بر ۲ بخش‌پذیرند،  $c$  تا و باقی اعضا  $d$  تا باشند. حال خاصیت  $A$  ایجاب می‌کند که در هر زیرمجموعه ۵ عضوی از آن، یک عضو موجود باشد که بر ۲ بخش‌پذیر است و همچنین یک عضو که بر ۷ بخش‌پذیر است. در نتیجه تعداد اعضای  $A$  که بر ۲ بخش‌پذیر نیستند، (یعنی  $c+d$ ) حداکثر ۴ است و همین‌طور تعداد اعضای  $A$  که بر ۷ بخش‌پذیر نیستند (یعنی  $b+d$ ) هم حداکثر ۴ است. پس:

$$A \text{ تعداد اعضای } = a + b + c + d \leq a + (b + d) + (c + d) \leq a + 8.$$

از طرف دیگر در اعداد ۱ تا ۱۳۹۴، ۹۹ عدد بر ۱۴ بخش‌پذیرند و در نتیجه  $a \leq 99$ . پس تعداد اعضای  $A$  حداکثر برابر ۱۰۷ است. برای ساختن یک مثال ۱۰۷ عضوی که در شرط مسأله صدق کند، می‌توان مجموعه همه اعداد بخش‌پذیر بر ۱۴ را به همراه ۴ عدد دیگر بخش‌پذیر بر ۲ و ۴ عدد دیگر بخش‌پذیر بر ۷ در  $\{1, 2, \dots, 1394\}$  را در نظر گرفت.

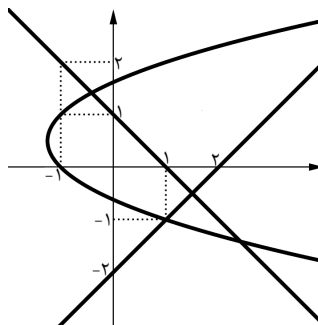
۱۹. کدام گزینه مجموعه نقطه‌هایی مانند  $(x, y)$  در صفحه را با این خاصیت نمایش می‌دهد که بیش‌ترین مقدار در بین سه عبارت  $x - y - 1$ ،  $x + y$  و  $y^2 - x - y$  برابر یک است؟

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور



راه‌حل. گزینه ۱ صحیح است.

شکل جواب مسئله بخشی از اجتماع سه منحنی  $x+y=1$ ،  $x-y=1$  و  $y^2-x-y=1$  است. یعنی قسمتی از منحنی شکل زیر:



حال باید بررسی کنیم که در نقاط این شکل کدامیک از سه عبارت  $x+y$ ،  $x-y=1$  و  $y^2-x-y$  بیشینه است.

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

- نقطه‌هایی که در آن‌ها  $x + y = 1$  و این عبارت در بین سه عبارت بیشینه است.

$$\left. \begin{array}{l} y^2 - x - y \leq 1 \Leftrightarrow y^2 \leq 2 \Leftrightarrow y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ x - y - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \sqrt{2}$$

پس قسمتی از خط  $x + y = 1$  که  $-\frac{1}{2} \leq y \leq \sqrt{2}$  جزئی از ناحیه مورد نظر هست.

- نقطه‌هایی که در آن‌ها  $y^2 - x - y = 1$  و این عبارت در بین سه عبارت بیشینه است.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 1 \Leftrightarrow y^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ x - y - 1 \leq 1 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 \leq 0 \Leftrightarrow y \in [-1, 3] \end{array} \right\} \Rightarrow -1 \leq y \leq \sqrt{2}$$

پس قسمتی از سهمی  $y^2 - x - y = 1$  که  $-1 \leq y \leq \sqrt{2}$  قسمتی از ناحیه مورد نظر ماست.

- نقطه‌هایی که در آن‌ها  $x - y - 1 = 1$  و این عبارت در بین سه عبارت بیشینه است.

$$\left. \begin{array}{l} y^2 - x - y \leq 1 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 \leq 0 \Leftrightarrow y \in [-1, 3] \\ x + y \leq 1 \Leftrightarrow x + y \geq x - y - 1 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow -1 \leq y \leq -\frac{1}{2}$$

پس قسمتی از خط  $x - y - 1 = 1$  که در آن  $-1 \leq y \leq -\frac{1}{2}$ ، قسمتی از این ناحیه است.

و در کل ناحیه مورد نظر اجتماع این سه قسمت است که متناظر با نمودار موجود در گزینه (۱) است.

۲۰. در ابتدای روز اول یک ویروس موذی وارد بدن شده است. در انتهای هر روز، هر ویروس موذی که  $k$  روز عمر کرده باشد،  $k$  ویروس موذی جدید تولید می‌کند و خودش نیز به زندگی ادامه می‌دهد. در انتهای روز ششم چند ویروس موذی متولد می‌شود؟
- |         |         |         |         |        |
|---------|---------|---------|---------|--------|
| ۲۴۳ (۵) | ۱۴۴ (۴) | ۱۲۸ (۳) | ۱۱۲ (۲) | ۸۹ (۱) |
|---------|---------|---------|---------|--------|

راه‌حل. گزینه ۴ صحیح است.

فرض کنید  $a_n$  تعداد ویروس‌هایی باشد که در انتهای روز  $n$ -ام متولد می‌شوند. در این صورت دنباله  $(a_n)$  در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + \dots + (n-1)a_1 + n.$$

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

زیرا تعداد ویروس‌هایی که در انتهای روز  $n$ -ام متولد می‌شوند، برابر با تعداد ویروس‌هایی است که یک روز عمر کرده‌اند (یعنی  $a_{n-1}$ ) به اضافه دو برابر ویروس‌هایی که دو روز عمر کرده‌اند (یعنی  $2a_{n-2}$ ) و همین‌طور تا  $n-1$  برابر ویروس‌هایی که  $n-1$  روز عمر کرده‌اند، (یعنی  $a_1(n-1)$ ) به اضافه  $n$  ویروسی که از ویروس اولیه متولد می‌شوند. پس با نوشتن جملات ابتدایی  $a_n$  ها به دست می‌آید:

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 1 + 2 = 3,$$

$$a_3 = 3 + 2 \times 1 + 3 = 8,$$

$$a_4 = 8 + 2 \times 3 + 3 \times 1 + 4 = 21,$$

$$a_5 = 21 + 2 \times 8 + 3 \times 3 + 4 \times 1 + 5 = 55,$$

$$a_6 = 55 + 2 \times 21 + 3 \times 8 + 4 \times 3 + 5 \times 1 + 6 = 144.$$

که پاسخ ۱۴۴ را به دست می‌آورد.

البته می‌توان رابطه بازگشتی ساده‌تری هم برای دنباله  $(a_n)$  به دست آورد که محاسبه مقادیر آن را سریع‌تر می‌کند. روش کار به این صورت است: اگر رابطه بازگشتی را برای  $n$  و  $n-1$  بنویسیم و از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود: ( $n > 1$ )

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + 1, \implies$$

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + 1.$$

حال اگر  $n > 2$  و رابطه بالا را هم برای  $n-1$  بنویسیم و از رابطه متناظر برای  $n$  کم کنیم، داریم: ( $n > 2$ )

$$a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1} - a_{n-2} \implies a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}.$$

رابطه بالا به همراه دو مقدار اولیه  $a_1 = 1, a_2 = 3$  توصیفی ساده‌تر از دنباله بازگشتی  $(a_n)$  است.

۲۱. به چند طریق می‌توان عدد  $15^7$  را به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی (بیش از یک عدد) نوشت که در آن ترتیب اعداد مهم نباشد؟

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

(۱) صفر (۲) ۵۹ (۳) ۱۱۹ (۴) ۱۷۹ (۵) ۲۳۹

راه‌حل. گزینه ۳ صحیح است.

فرض کنیم  $۱۵^۷$  را به صورت حاصل‌جمعی از اعداد  $m$  تا  $m+n$  نوشته باشیم که  $m, n \geq ۱$  در این صورت:

$$۱۵^۷ = m + (m+1) + \dots + (m+n) = \frac{(2m+n)(n+1)}{2} \implies$$

$$۲^۸ \times ۳^۷ \times ۵^{۱۴} = (n+1)(2m+n).$$

بنابراین اگر بنویسیم  $a = n+1$  و  $b = 2m+n$ ،  $a$  و  $b$  زوجیت متفاوت دارند و  $b > a > ۱$  و برای شمارش تعداد حالات  $a, b$  کفایت تعداد مقسوم‌علیه‌های فرد  $۲^۸ \times ۳^۷ \times ۵^{۱۴}$  (غیر از ۱) را بشماریم، زیرا هر مقسوم‌علیه فرد در مقسوم‌علیه زوج مکملش برابر  $۲^۸ \times ۳^۷ \times ۵^{۱۴}$  است و هر کدام که بزرگتر بود را می‌توان  $b$  و دیگری را  $a$  در نظر گرفت، البته باید حالت  $a=1$  را هم حذف کنیم. علاوه بر این واضح است که برای هر زوج  $a, b$  با شرایط ذکر شده، دقیقاً یک زوج  $m, n$  به صورت بالا وجود دارد.

تعداد مقسوم‌علیه‌های فرد  $۲^۸ \times ۳^۷ \times ۵^{۱۴}$  برابر با تعداد مقسوم‌علیه‌های  $۳^۷ \times ۵^{۱۴}$  است، یعنی  $۱۲۰ = (۱۴+۱)(۷+۱)$ . پس جواب مسأله  $۱۱۹ = ۱۲۰ - ۱$  است.

۲۲. به چند طریق می‌توان یک جدول  $۱ \times ۷$  را با کاشی‌های  $۱ \times ۲$  پر کرد، طوری که هر خانه توسط حداقل یک کاشی و حداکثر دو کاشی پر شده باشد؟

(۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸ (۵) ۱۹

راه‌حل. گزینه ۵ صحیح است.

فرض کنیم  $a_n$  تعداد راه‌های پر کردن یک جدول  $۱ \times n$  با دومینوها (کاشی‌های  $۱ \times ۲$ ) باشد که در هر خانه حداقل یک کاشی و حداکثر دو کاشی قرار داشته باشد. علاوه بر این  $b_n$  را تعداد راه‌های پر کردن یک جدول  $۱ \times n$  با دومینوها در نظر بگیرید که در هر خانه غیر از خانه اول، حداقل یک کاشی و حداکثر دو کاشی باشد و در خانه اول حداقل صفر و حداکثر یک کاشی باشد.

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

حال برای  $n > 1$  رابطه زیر را برای  $a_n$  داریم:

$$a_n = a_{n-2} + b_{n-1},$$

زیرا اگر یکی از حالاتی که در شمارش  $a_n$  ظاهر می‌شود در نظر بگیرد، یا در خانه اول دو دومینو قرار دارد که در این صورت این دومینوها با خانه دوم مشترکند و هیچ دومینوی دیگر در این دو خانه قرار ندارد. پس تعداد حالات برابر با تعداد حالات پر کردن بقیه خانه‌ها یعنی یک جدول  $(n-2) \times 1$  با شرط مسأله است. اما اگر در خانه اول فقط یک دومینو باشد، پس از حذف این دومینو و خانه اول، در جدول  $(n-1) \times 1$  باقیمانده، در هر خانه غیر از خانه اول، بین ۱ تا دو دومینو قرار دارد و در خانه اول، بین ۰ تا ۱ دومینو. پس تعداد حالاتی که در خانه اول جدول اصلی دقیقاً یک دومینو قرار داشته باشد، برابر  $b_{n-1}$  است. با استدلالی کاملاً مشابه و حالت‌بندی روی تعداد دومینوهای خانه اول جدول، می‌توان رابطه بازگشتی زیر را برای  $b_n$  به دست آورد:

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1}.$$

بنابراین با استفاده از رابطه بازگشتی اول برای هر  $n > 1$  داریم:

$$b_n = a_{n+1} - a_{n-1},$$

و اگر این رابطه را برای  $n$  و  $n-1$  در رابطه بازگشتی دوم جایگذاری کنیم، به دست می‌آید:

$$a_{n+1} - a_{n-1} = a_{n-1} + a_n - a_{n-2} \implies a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} - a_{n-2}.$$

پس برای محاسبه مقادیر دنباله  $(a_n)$  کفایت سه مقدار اولیه آن را بدانیم که با توجه به صورت سؤال به سادگی به دست می‌آیند:

$$a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 1.$$

حال با استفاده از رابطه بازگشتی  $(a_n)$  داریم:

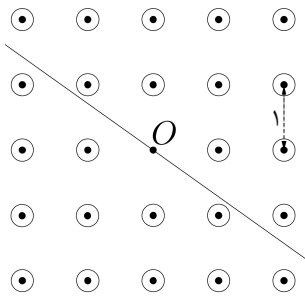
$$a_4 = 1 + 2 - 0 = 5,$$

$$a_5 = 5 + 2 - 2 = 5,$$

$$a_6 = 5 + 10 - 1 = 14,$$

$$a_7 = 14 + 10 - 5 = 19.$$

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور



۲۳. می‌خواهیم در تمام نقاط یک شبکه منظم  $5 \times 5$ ، غیر از نقطه مرکزی، ستون‌هایی استوانه‌ای و برابر نصب کنیم، به نحوی که نقطه مرکزی از بیرون دیده نشود؛ یعنی در نقشه مسطحی که می‌بینید، هر خط گذرنده از نقطه مرکزی دست‌کم یکی از دایره‌ها را قطع کند. در صورتی که فاصله بین نقاط مجاور یک متر باشد، کم‌ترین مقدار لازم برای شعاع مقطع ستون‌ها چند متر است؟

$$(1) \sqrt{\frac{1}{13}} \quad (2) \sqrt{\frac{1}{10}} \quad (3) \sqrt{\frac{1}{5}} \quad (4) \sqrt{\frac{4}{17}} \quad (5) \sqrt{\frac{2}{5}}$$

راه‌حل. گزینه ۲ صحیح است.

برای هر خط  $l$  که از نقطه مرکزی  $(O)$  می‌گذرد،  $m(l)$  را فاصله خط  $l$  تا نقطه ۲۴ دیگر می‌گیریم. در این صورت جواب مسئله باید بزرگ‌ترین عدد در بین  $m(l)$ ها باشد. زیرا اگر این بزرگ‌ترین مقدار را با  $R$  نمایش دهیم، برای هر  $r \geq R$  می‌توان خطی مثل  $l$  یافت که فاصله یکی از نقطه‌های غیر مرکزی تا خط  $l$  کم‌تر از  $r$  باشد و بنابراین دایره به مرکز آن نقطه و شعاع  $r$  حتماً با  $l$  اشتراک دارد. از طرف دیگر اگر  $r < R$  می‌توان خط  $l$  یافت که  $m(l) > r$  یعنی فاصله همه نقطه‌های غیر مرکزی از  $l$  کم‌تر از  $r$  است و بنابراین دایره به مرکز هر یک از این نقاط و شعاع  $r$  با  $l$  اشتراک ندارد.

برای راحتی فرض می‌کنیم که نقطه‌ها به گونه‌ای در صفحه مختصات قرار گرفتند که همه دارای مختصات صحیح هستند، نقطه مرکزی در مبدأ قرار دارد و فاصله بین نقاط مجاور یک است. هم‌چنین برای نمایش فاصله نقطه  $X$  و خط  $l$  از نماد  $d(X, l)$  استفاده می‌کنیم.

با توجه به تقارن‌های شکل می‌توان برای محاسبه  $m(l)$  برای خطوط مختلف، خود را محدود به خطوط  $l$  کنیم که شیب آن‌ها بین صفر و یک است و تنها فاصله پنج نقطه  $(1, 0)$ ،  $(2, 0)$ ،  $(1, 1)$ ،  $(2, 1)$  و  $(2, 2)$  را با  $l$  در نظر بگیریم.

به سادگی دیده می‌شود که برای خط  $l$  که از مبدأ می‌گذرد، فاصله نقطه  $(1, 0)$  از خط



# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

$l$  کم‌تر از فاصله نقطه  $(2, 0)$  از  $l$  است. پس می‌توانیم در محاسباتمان نقطه  $(2, 0)$  را در نظر نگیریم. به دلیل مشابه و با مقایسه فاصله نقطه‌های  $(1, 1)$  و  $(2, 2)$  با هر خط  $l$  می‌بینیم که می‌توانیم نقطه  $(2, 2)$  را نیز در نظر نگیریم و تنها فاصله سه نقطه  $A = (1, 0)$ ،  $B = (1, 1)$  و  $C = (2, 1)$  را با خط  $l$  برای یافتن  $m(l)$  محاسبه کنیم. نقطه  $(0, 0)$  را نیز مطابق شکل با  $O$  نمایش می‌دهیم.

با یک محاسبه ساده مشخص می‌شود که اگر شیب خط  $l$  (که از  $O$  می‌گذرد) برابر  $a$  باشد، فاصله سه نقطه  $A$ ،  $B$  و  $C$  از  $l$  به ترتیب برابر  $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ ،  $\frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}}$  و  $\frac{|1-2a|}{\sqrt{1+a^2}}$  است. حال لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید  $M$  نقطه وسط ضلع  $YZ$  از مثلث  $XYZ$  باشد و  $T$  نقطه‌ای روی پاره‌خط  $MY$  باشد. در این صورت فاصله نقطه  $Y$  از خط  $XT$ ، کم‌تر از فاصله  $Z$  از این خط است و اگر  $T$  بر  $M$  منطبق شود. این دو مقدار با هم مساوی خواهند شد.

اثبات. اگر  $Y_1$  و  $Z_1$  را به ترتیب پای عمودهای وارد از  $Y$  و  $Z$  بر خط  $XM$  بگیریم، دو مثلث قائم‌الزاویه  $YY_1T$  و  $ZZ_1T$  متشابه هستند و لذا  $\frac{YT}{ZT} = \frac{YY_1}{ZZ_1}$ . بنابراین اگر  $T$  بین  $M$  و  $Y$  باشد،  $YY_1 < ZZ_1$  و لذا  $YT < ZT$ ،  $T = M$  اگر  $YY_1 = ZZ_1$  و  $YT = ZT$  و  $T = M$  اگر  $YY_1 > ZZ_1$  و  $YT > ZT$ .

حال با استفاده از این لم به ادامه مسئله می‌پردازیم. اگر شیب خط  $l$  کم‌تر از  $\frac{1}{2}$  باشد،

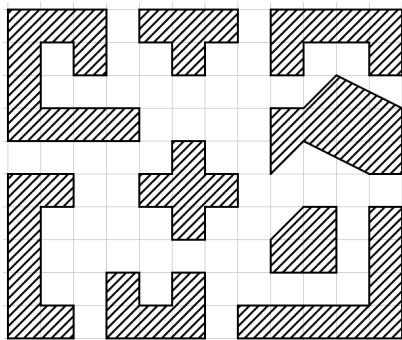
$$d(C, l) = \frac{1-2a}{\sqrt{1+a^2}} < \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}} = d(B, l)$$

پس  $m(l)$  برابر عدد کم‌تر در بین دو عدد  $d(A, l)$  و  $d(C, l)$  است. حال طبق لم بالا، اگر خط  $l$  زیر میانه وارد بر ضلع  $AC$  در مثلث  $AOC$  باشد،  $m(l) = d(A, l)$  و اگر بالای این میانه باشد،  $m(l) = d(C, l)$ . حال چون زاویه  $\angle AOC < 90^\circ$  حاده است،  $d(A, l)$  با افزایش شیب  $l$  افزایش و  $d(C, l)$  با افزایش شیب  $l$  کاهش می‌یابد. بنابراین بیش‌ترین مقدار  $m(l)$  وقتی شیب  $l$  بین  $0^\circ$  و  $\frac{1}{2}$  تغییر می‌کند زمانی است که  $l$  میانه ضلع  $AC$  از مثلث  $AOC$  باشد که چون شیب این خط برابر  $\frac{1}{2}$  است، با استفاده از محاسبه‌های بالا حداکثر مقدار  $m(l)$  در این بازه برابر  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  می‌شود. با استدلال مشابه در مورد وقتی که شیب  $l$  بین  $\frac{1}{2}$  و یک تغییر می‌کند، می‌بینیم که بیشینه  $m(l)$  مربوط به میانه ضلع  $BC$  از مثلث  $OBC$  است و چون شیب این میانه برابر  $\frac{2}{3}$  است، بیشینه  $m(l)$  در این بازه برابر  $\frac{1}{\sqrt{13}}$  می‌شود. پس در کل

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

بیشینه مقدار  $am(l)$  خواهد بود و جواب مسئله همین  $\frac{1}{\sqrt{13}}$  هست.

۲۴. می‌گوییم با یک چندضلعی می‌توان صفحه را کاشی کاری کرد، هرگاه بتوان نامتناهی شکل هم‌نهشت با آن چندضلعی را در صفحه کنار هم قرار داد به گونه‌ای که کل صفحه را

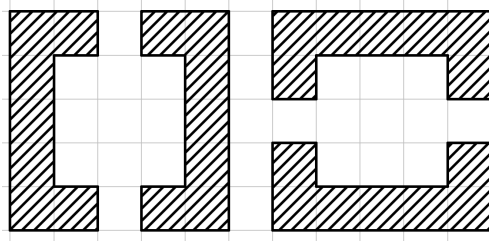


پوشانند و ضمناً به جز احتمالاً در اضلاع هم‌پوشانی نداشته باشند. با چند تا از اشکال روبه‌رو نمی‌توان صفحه را کاشی کاری کرد؟

۲ (۳)	۱ (۲)	صفر (۱)
	۴ (۵)	۳ (۴)

راه‌حل. گزینه ۲ صحیح است.

ادعا می‌کنیم تنها کاشی کاری با شکل زیر امکان‌پذیر نیست و برای بقیه امکان‌پذیر است.

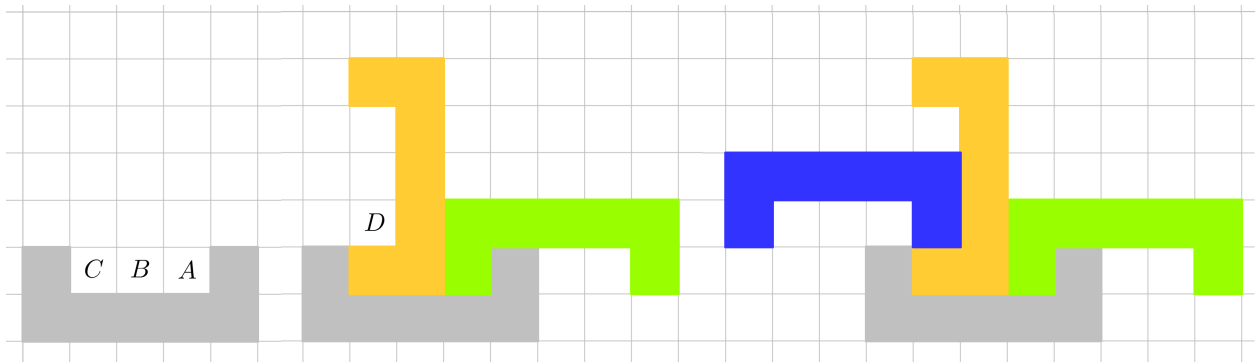


فرض کنید که کاشی کاری با این کاشی ممکن باشد. به وضوح می‌توان فرض کرد که در این کاشی کاری رئوس نسخه‌های مختلف چندضلعی روی نقطه‌های شبکه‌ای قرار می‌گیرد و اضلاع آن‌ها موازی محورهای مختصات می‌شوند. بنابراین تنها چهار نسخه بالا از این کاشی ظاهر می‌شوند که به دو نسخه سمت چپ در شکل کاشی‌های عمودی و به دو نسخه سمت راست کاشی‌های افقی می‌گوییم.

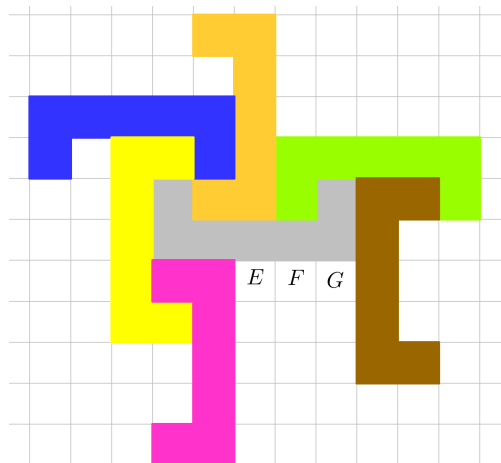
حال یک کاشی افقی از کاشی کاری مطابق شکل سمت چپ زیر در نظر بگیرید (با قرینه کردن و دوران فرض کنید چنین نسخه‌ای در کاشی کاری وجود دارد). به سادگی می‌توان چک کرد که برای پر کردن سه خانه  $A$ ،  $B$  و  $C$  از شکل به یک کاشی افقی و یک کاشی

# سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

عمودی نیاز داریم که مطابق شکل دوم قرار گرفته باشند (یا قرینه شکل نسبت به خط عمودی). با استدلال مشابه در مورد کاشی عمودی جدید می‌فهمیم که برای پوشاندن خانه  $D$  باید یک کاشی افقی مطابق شکل قرار دهیم.



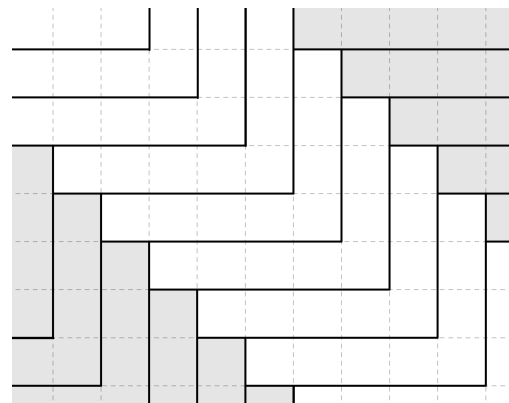
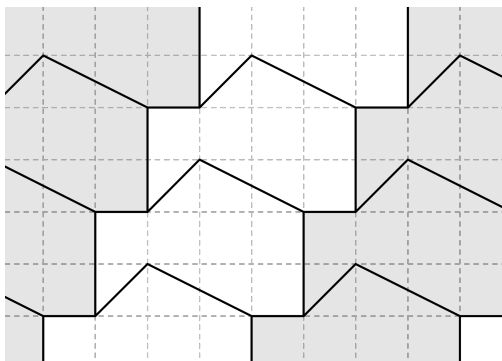
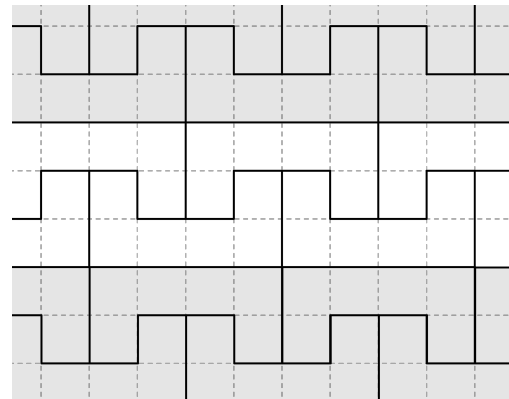
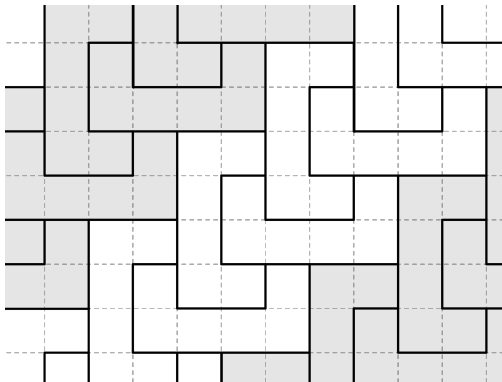
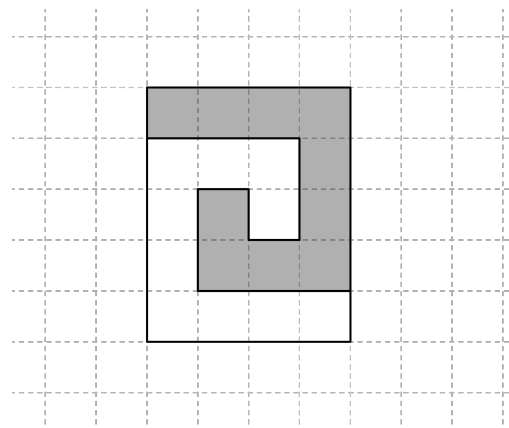
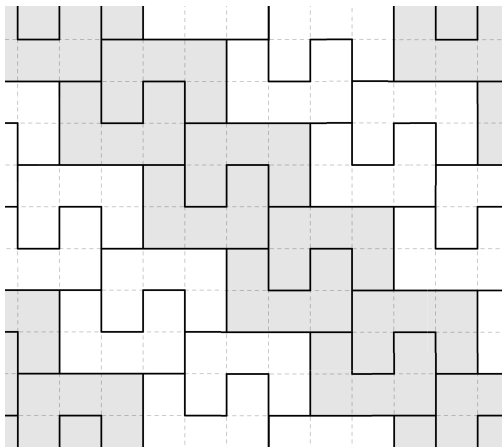
به همین ترتیب با قرار دادن کاشی‌های مختلف به شکل زیر می‌رسیم. در این حالت با کمی بررسی دیده می‌شود که نمی‌توان سه خانه  $E$ ،  $F$  و  $G$  را به هیچ شکلی پوشاند. پس کاشی‌کاری با این چندضلعی امکان‌پذیر نیست.



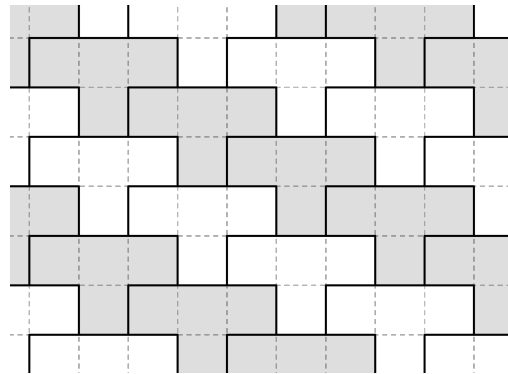
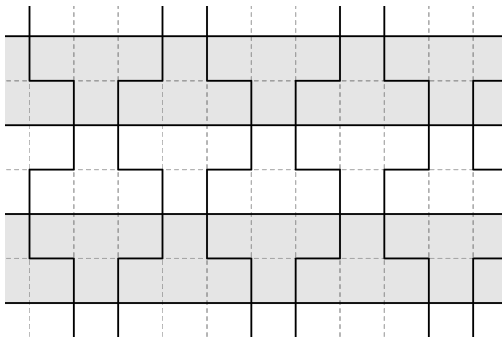
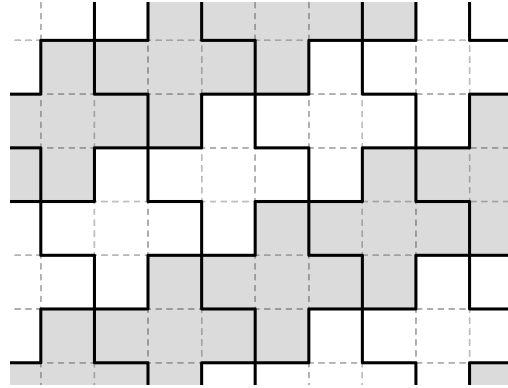
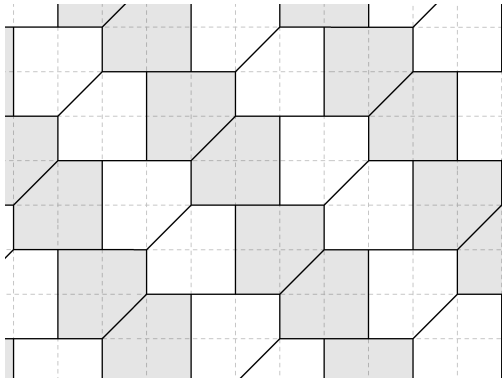
در مورد بقیه کاشی‌ها، کاشی‌کاری امکان‌پذیر است که در ادامه (در مورد بعضی کاشی‌ها به دو شکل متفاوت) می‌بینید. در اکثر موارد روش کار این است که با استفاده از کاشی‌ها، ابتدا شکلی نواری یا پلکان‌مانند را بیوشانیم و سپس با کنار هم قرار دادن نوارها و یا پلکان‌ها

# سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

کل صفحه را بپوشانیم. مثلاً در مورد کاشی مربوط به شکل سمت راست زیر با کنار هم قرار دادن دو نسخه یک مستطیل ساخته‌ایم و با کنار هم قرار دادن این مستطیل‌ها صفحه را کاشی‌کاری می‌کنیم.



# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور



۲۵. اعداد  $\sqrt{7}^{\sqrt{3}}$ ،  $\sqrt{5}^{\sqrt{5}}$  و  $\sqrt{3}^{\sqrt{7}}$  را به ترتیب با  $A$ ،  $B$  و  $C$  نمایش می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $A < B < C$     (۲)  $B < C < A$     (۳)  $C < B < A$     (۴)  $A < C < B$     (۵)  $C < A < B$

راه‌حل. گزینه ۵ صحیح است.

اول نشان می‌دهیم  $\sqrt{5}^{\sqrt{5}} > \sqrt{7}^{\sqrt{3}}$ . دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم، کافی است نشان دهیم  $5^{\sqrt{5}} > 7^{\sqrt{3}}$ . اکنون دو طرف را به توان  $\sqrt{5}$  می‌رسانیم. کافی است نشان دهیم  $5 > 7^{\sqrt{15}}$ ، یعنی  $5^5 > 7^{\sqrt{15}}$ . اما داریم  $\sqrt{15} < 4$ ، پس  $7^{\sqrt{15}} < 7^4 = 2401 < 5^5$ . پس حکم ثابت شد.

حال نشان می‌دهیم  $\sqrt{7}^{\sqrt{3}} > \sqrt{3}^{\sqrt{7}}$ . مجدداً دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم، کافی است نشان دهیم  $7^{\sqrt{3}} > 3^{\sqrt{7}}$ . اکنون دو طرف را به توان  $\sqrt{7}$  می‌رسانیم. کافی است نشان دهیم  $7^{\sqrt{21}} > 3^7$ ، یعنی  $7^{\sqrt{21}} > 2187$ . اما داریم  $\sqrt{21} > 4$ ، پس  $7^{\sqrt{21}} > 7^4 = 2401 > 2187$ . پس حکم ثابت شد.

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۲۶. چند دنباله  $a_1, a_2, \dots, a_{15}$  از اعداد مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$  داریم به گونه‌ای که برای هر  $1 \leq i, j \leq 15$  که  $i+j \leq 15$  داشته باشیم:  $a_{i+j} > a_i + a_j$ ؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۹ (۵) ۱۵

راه‌حل. گزینه ۴ صحیح است.

طبق فرض مسأله داریم:

$$a_{15} \geq a_{14} + a_1 + 1 \geq a_{13} + 2a_1 + 2 \geq \dots \geq a_2 + 13a_1 + 13 \geq 15a_1 + 14.$$

از طرف دیگر،  $a_{15} \leq 30$  نتیجه می‌دهد  $15a_1 + 14 \leq 30$  پس  $a_1 = 1$  و برای هر  $j > 1$ ،  
 $a_j \geq a_{j-1} + 2$

حال داریم،  $29 = a_1 + 28$  و در نتیجه:

$$29 \leq a_2 + 26 \leq a_3 + 24 \leq \dots \leq a_{13} + 4 \leq a_{14} + 2 \leq a_{15} \leq 30.$$

حال اگر در میان ۱۴ عدد بالا،  $k$  عدد برابر ۲۹ و  $14-k$  عدد برابر ۳۰ شود، داریم:

$$a_i = \begin{cases} 2i-1 & i \leq k+1 \\ 2i & i > k+1 \end{cases}$$

اگر  $k$  کمتر از ۶ باشد، شرط سؤال نقض می‌شود، چون که:

$$k < 6 \implies k+1 < 7, 14 \implies a_7 = 14, a_{14} = 28,$$

و این با شرط  $a_{14} > a_7 + a_7$  در تناقض است.

از طرف دیگر، ثابت می‌کنیم  $6 \leq k \leq 14$  شرط  $a_{i+j} > a_i + a_j$  را برآورده می‌کند: چون اگر  $k$  حداقل ۶ باشد و  $i+j$  حداکثر ۱۵، هر دوی  $i$  و  $j$  نمی‌توانند از  $k+1$  بیشتر باشند، چون در غیر این صورت:

$$i, j \geq k+2 \geq 8 \implies i+j \geq 16.$$

پس حداقل یکی از  $i$  و  $j$  مثلاً  $i$  از  $k+1$  بیشتر نیست و در نتیجه  $a_i = 2i-1$ . حال با توجه به حالت بندی بالا یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

$$\begin{cases} j \leq k+1 \implies a_j = 2j-1, a_{i+j} \geq 2(i+j)-1 & \implies a_{i+j} > a_i + a_j \\ j > k+1 \implies i+j > k+1 \implies a_j = 2j, a_{i+j} = 2(i+j) & \implies a_{i+j} > a_i + a_j \end{cases}$$

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

پس در همه حالات  $6 \leq k \leq 14$  شرط مسأله برقرار است و تعداد دنباله‌های ممکن برابر با تعداد حالات  $k$ ، یعنی ۹ حالت است.

۲۷. حاصل ضرب اعضای مجموعه  $A$  را با  $f(A)$  نشان می‌دهیم. اگر  $A_1, A_2, \dots, A_{1023}$  تمام زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه  $\{1, 2, \dots, 10\}$  باشد، باقی‌مانده

$$f(A_1) + f(A_2) + \dots + f(A_{1023})$$

بر ۱۳ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۵ (۴) ۶ (۵) ۱۲

راه‌حل. گزینه ۱ صحیح است.

با بسط کامل عبارت

$$(1+1)(1+2)(1+3)\dots(1+10)$$

متوجه می‌شویم که هر یک از جملات به صورت حاصل ضربی به این صورت است که از هر یک از پرانتزهای به صورت  $(1+i)$  یکی از دو عدد ۱ و  $i$  را انتخاب کنیم و همه اعداد انتخاب شده را در هم ضرب کنیم. اما توجه کنید که ۱ در ضرب به صورت خنثی عمل می‌کند و در نتیجه حاصل ضرب نهایی برابر با حاصل ضرب همه اعداد غیر از ۱ هستند که از پرانتزها انتخاب شده‌اند. پس حاصل ضرب نهایی را می‌توانیم این‌طور توصیف کنیم که برای همه زیرمجموعه‌های  $\{1, \dots, 10\}$ ، حاصل ضرب اعضای آن را محاسبه می‌کنیم و همه این اعداد را با هم جمع می‌زنیم. حال با توجه به اینکه یکی از این مجموعه‌ها تهی است، داریم:

$$11! = (1+1)(1+2)\dots(1+10) = f(A_1) + \dots + f(A_{1023}) + 1.$$

در نتیجه جواب مسأله باقیمانده  $1 - 11!$  بر ۱۳ است. حال بنا بر قضیه ویلسون (برای هر عدد اول  $p$ ، باقیمانده  $(p-1)!$  بر  $p$  برابر  $p-1$  است) داریم:

$$12! \equiv 12 \pmod{13} \implies 11! \times 12 \equiv 12 \pmod{13} \implies 11! \equiv 1 \pmod{13},$$

پس باقیمانده  $1 - 11!$  بر ۱۳ برابر با صفر است.

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۲۸. دنباله‌های  $\{x_n\}$  و  $\{y_n\}$  از اعداد حقیقی برای هر  $n \geq 0$  در رابطه‌های بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$x_{n+1} = x_n^2 + x_n y_n + y_n^2, \quad y_{n+1} = x_n^2 - x_n y_n + y_n^2.$$

اگر  $x_0$  و  $y_0$  اعدادی مثبت باشند و  $x_0 + y_0 = 2$ ، در مورد  $S = x_8 + y_8$  کدام درست است؟  
(۱)  $S < 250$  (۲)  $250 \leq S < 2200$  (۳)  $2200 \leq S < 2800$  (۴)  $2800 \leq S < 22000$  (۵)  $22000 \leq S$

راه‌حل. گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا دقت کنید که برای هر  $n \geq 0$

$$x_n^2 \pm x_n y_n + y_n^2 = \frac{1}{2}((x_n \pm y_n)^2 + x_n^2 + y_n^2) \geq 0$$

پس برای هر  $n \geq 1$   $x_n$  و  $y_n$  نامنفی هستند. حال اگر  $x_n + y_n$  را با  $s_n$  نمایش دهیم، داریم:

$$s_n^2 = (x_n + y_n)^2 \leq 2(x_n^2 + y_n^2) = s_{n+1} \leq 2(x_n + y_n)^2 = 2s_n^2$$

که نابرابری سمت راست نتیجه نامنفی بودن  $x_n$  و  $y_n$  و نابرابری سمت چپ نتیجه نابرابری حسابی-هندسی است. حال با توجه به این نابرابری‌ها برای  $n = 0, 1, \dots, 7$  نتیجه می‌گیریم:

$$2^{256} = s_0^{2^8} \leq s_8 \leq s_0^{2^8 \cdot 2^{1+2+\dots+7}} = 2^{511}$$

پس گزینه (۳) صحیح است.

۲۹. نقطه  $D$  روی خط  $BC$  از مثلث  $ABC$  با  $\angle BAC = 40^\circ$  مفروض است. از  $B$  و  $D$  به ترتیب بر  $BC$  و  $AB$  عمود می‌کنیم تا یک‌دیگر را در  $E$  قطع کنند. به طور مشابه از  $C$  و  $D$  به ترتیب عمودهایی بر  $BC$  و  $AC$  رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را در  $F$  قطع کنند. پای عمود وارد از  $D$  بر  $EF$  را  $K$  می‌نامیم. می‌دانیم  $K$  روی خط  $AB$  قرار دارد و منطبق بر  $B$  نیست. زاویه  $\angle ACK$  چند درجه است؟

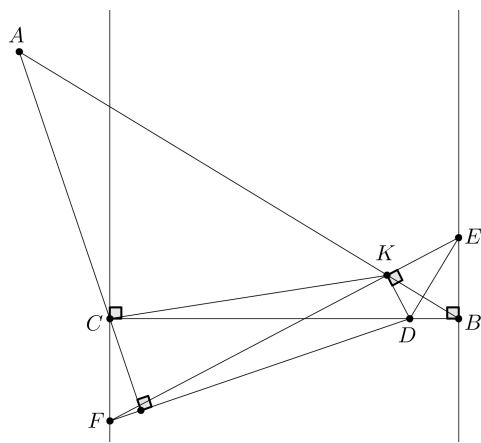
(۱) ۴۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴) ۱۰۰ (۵) ۱۴۰

راه‌حل. گزینه ۴ صحیح است.



# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

ما در این جا تنها حالتی را در نظر می‌گیریم که نقطه  $K$  روی ضلع  $AB$  و نه امتداد آن قرار دارد. جواب در حالت دیگر هم کاملاً مشابه است. در این حالت  $\angle ACK = \angle CKB - 40^\circ$ . پس سعی می‌کنیم مقدار زاویه  $\angle CKB = \angle CKD + \angle BKD$  را بیابیم.



از آن جا که  $\angle DKE + \angle DKF = \angle DCF = 90^\circ$  و  $\angle DBF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$  دو چهارضلعی  $CKDF$  و  $DKEB$  محاطی هستند. پس:

$$\angle CKD = 180^\circ - \angle CFD = 90^\circ + (\angle ACB - 90^\circ) = \angle ACB$$

$$\angle BKD = \angle BED = \angle ABC$$

در تساوی‌های بالا از اینکه  $AB \perp DE$  و  $AC \perp DF$  استفاده شد. پس در نهایت داریم

$$\angle CKB = \angle CKD + \angle BKD = \angle ACB + \angle ABC$$

$$= 180^\circ - \angle BAC = 140^\circ \Rightarrow \angle ACK = 100^\circ$$

اگر نقطه  $K$  در امتداد پاره‌خط  $AB$  می‌بود، زاویه  $\angle ACK$  برابر  $\angle BAC = 40^\circ$  به دست می‌آمد و در این حالت چون  $\angle ACK = 180^\circ - \angle BAC - \angle CKB$  جواب مجدداً برابر  $100^\circ$  بود.

توضیح. اگر فرآیند مسئله را با شروع از نقطه‌های مختلف  $D$  روی  $BC$  انجام دهیم، مکان هندسی نقطه  $K$  قرینه دایره محیطی مثلث نسبت به  $BC$  خواهد بود. اثبات این مطلب کاملاً شبیه بالاست. در واقع دقت در استدلال فوق نشان می‌دهد که در پیدا کردن ارتباط  $\angle CKB$  و  $\angle BAC$  از این که  $K$  روی  $AB$  قرار دارد استفاده نکرده‌ایم.

۳۰. یک فرمول سه‌متغیره با متغیرهای  $x, y, z$  را «جالب» می‌گوییم، هرگاه در آن فقط از ترکیب توابع مینیمم و ماکسیمم استفاده شده باشد. مثل سه فرمول زیر:

$$\min(\max(x, z), y), \min(x, x), \max(x, \min(x, y)).$$

دو فرمول را متفاوت می‌گوییم، اگر یک مقداردهی برای متغیرهای  $x, y, z$  وجود داشته باشد که دو فرمول مقادیر مختلفی را برای آن‌ها محاسبه کنند. مثلاً دو فرمول  $\min(x, x)$

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

و  $\max(x, \min(x, y))$  متفاوت نیستند. چند فرمول متفاوت داریم؟

(۱) ۱۱ (۲) ۱۸ (۳) ۶۴ (۴) ۲۵۶ (۵) بی‌نهایت

راه‌حل. گزینه ۲ صحیح است.

نکته اساسی راه‌حل، این است که برای هر سه عدد دلخواه  $a, b, c$ ,

$$\min(\max(a, b), c) = \max(\min(a, c), \min(b, c)).$$

(این اتحاد را می‌توانید به راحتی با در نظر گرفتن همه ترتیب‌های ممکن  $a, b, c$  ثابت کنید.)  
این اتحاد یادآور خاصیت پخشی ضرب روی جمع است:

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c.$$

به عبارت دیگر، دو عمل  $\max$  و  $\min$  در تمامی خواص جابجایی (مثل  $\min(a, b) = \min(b, a)$ ) و پخشی نسبت به هم، که برای دو عمل ضرب و جمع برقرار است، صدق می‌کنند.

این دو خاصیت جمع و ضرب به ما کمک می‌کردند تا هر فرمول پیچیده بر حسب جمع و ضرب تعدادی متغیر را، بدون اینکه مقدارش تغییر کند، «بسط» دهیم: یعنی به صورت حاصل‌جمعی از تعدادی حاصل‌ضرب بنویسیم. پس با توجه به وجود خواص مشابه برای توابع مینیمم و ماکزیمم، هر فرمولی (مانند  $F(x, y, z)$ ) را که با استفاده از این دو تابع از سه متغیر  $x, y, z$  ساخته شده باشد، می‌توان ساده‌سازی کرد تا نهایتاً به صورت زیر درآید:

$$F(x, y, z) = \max(\min(-, -, \dots, -), \dots, \min(-, -, \dots, -)),$$

که در هر یک از جاهای خالی، یکی از متغیرها قرار دارد.

حال به دو نکته اساسی دیگر در مورد توابع مینیمم و ماکزیمم توجه کنید:

اول اینکه، اگر در جاهای خالی  $\min(-, -, \dots, -)$  یک متغیر بیش از یک بار آمده باشد، می‌توان بدون اینکه فرمول تغییری کند، تکرارهای آن را حذف کرد. بنابراین فقط مجموعه متغیرهایی که در داخل مینیمم ظاهر می‌شوند، مهم است. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$F(x, y, z) = \max(\min(A_1), \dots, \min(A_k)),$$

# سوالات و راه‌حل‌های آزمون مرحله اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

که هر یک از  $A_i$ ها زیرمجموعه‌ای از  $\{x, y, z\}$  است.

نکته دوم این است که اگر در فرمول بالا  $A_i$  شامل  $A_j$  باشد ( $i \neq j$ )، به وضوح مینیمم اعضای  $A_i$  کمتر یا مساوی مینیمم اعضای  $A_j$  است و در نتیجه مقدار آن در محاسبه ماکزیمم بی‌تأثیر است. پس می‌توان  $\min(A_i)$  را از فرمول حذف کرد. اگر این کار را برای هر دو مجموعه شامل یکدیگر در فرمول انجام دهیم، نهایتاً به جایی می‌رسیم که هیچ کدام از مجموعه‌ها شامل یکدیگر نیستند.

پس اگر عبارت نهایی به صورت زیر باشد:

$$F(x, y, z) = \max(\min(B_1), \dots, \min(B_n)),$$

هر یک از  $B_i$ ها زیرمجموعه‌های ناتهی از  $\{x, y, z\}$  هستند و هیچ کدام شامل دیگری نیست. البته در این نمایش ترتیب  $B_i$ ها اهمیتی ندارد، اما می‌توان نشان داد که اگر دو فرمول به صورت بالا (و دارای شرایط ذکر شده برای  $B_i$ ها) متحد باشند، مجموعه‌های  $B_i$  در آن دو یکسان است و در نتیجه هر فرمول نمایش یکتایی به صورت بالا (در حد جایگشتی روی  $B_i$ ها) دارد. (این نکته را می‌توانید با مقدارگذاری‌های متغیرهای  $x, y, z$  از مجموعه  $\{0, 1\}$  نشان دهید.)

حال برای یک خانواده مانند  $\{B_1, \dots, B_n\}$  از زیرمجموعه‌های ناتهی  $\{x, y, z\}$  که هیچ کدام شامل دیگری نباشد، به راحتی می‌توان دید که  $n \leq 3$  برای شمارش همه این خانواده‌ها هم روی  $n$  حالت بندی کنید:

- $n = 1$ ، در این صورت  $B_1$  یک زیرمجموعه ناتهی از یک مجموعه ۳ عضوی است که ۷ حالت دارد.
- $n = 2$ ، در این صورت یا  $B_1$  و  $B_2$  هر دو تک‌عضوی هستند (۳ حالت) یا هر دو، دو‌عضوی (۳ حالت) و یا یکی تک‌عضوی و دیگری مجموعه مکملش (۳ حالت).
- $n = 3$ ، در این صورت یا هر سه  $B_i$ ها تک‌عضوی هستند، (یک حالت) و یا هر سه دو‌عضوی (یک حالت).

پس تعداد کل فرمول‌های جالب برابر با تعداد خانواده‌های با خاصیت بالاست که بنابر شمارش بالا برابر  $1 + 1 + 3 \times 3 + 7$  مساوی ۱۸ حالت است.