

## به نام او

### روز اول

۱. فروش گاهی مسئول پخش ۱۰۰ سبد کالا است. هر سبد باید شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم مرغ باشد. می دانیم که مجموعاً ۱۰۰۰ کیلوگرم برنج و ۳۰۰۰ عدد تخم مرغ در سبدها وجود دارد ولی در برخی سبدها مقدار این دو کالا کمتر یا بیش تر از مقدار یادشده است. کارمندان فروش گاه می توانند در هر مرحله دو سبد را انتخاب و هر مقدار دل خواه برنج و هر تعداد تخم مرغ آن دو سبد را جابه جا کنند. دست کم در چند مرحله می توان، با شروع از هر وضعیت اولیه ای، برنج و تخم مرغ همه سبدها را با هم برابر کرد؟

۲. مربع  $ABCD$  مفروض است. دو نقطه  $N$  و  $P$ ، به ترتیب، روی اضلاع  $AB$  و  $AD$  به شکلی انتخاب شده اند که  $PN = NC$  و نقطه  $Q$  روی پاره خط  $AN$  طوری انتخاب شده که  $\widehat{NCB} = \widehat{QPN}$ . ثابت کنید

$$\widehat{BCQ} = \frac{1}{2} \widehat{PQA}.$$

۳. اعداد حقیقی و نامنفی  $x$ ،  $y$  و  $z$  مفروض هستند. می دانیم

$$2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2.$$

ثابت کنید

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{2xyz}.$$

موفق باشید

## به نام او

روز دوم

۴. تمام جواب‌های طبیعی معادله زیر را بیابید.

$$n^{n^n} = m^m$$

۵. زیرمجموعه ناتهی از اعداد حقیقی مثبت مانند  $S$  را «توانا» گوییم در صورتی که هرگاه  $a$  و  $b$  دو عضو متمایز آن باشند آن‌گاه دست‌کم یکی از اعداد  $a^b$  یا  $b^a$  عضو  $S$  باشند.  
الف. یک مجموعه توانای چهار عضوی مثال بنید.  
ب. ثابت کنید یک مجموعه توانای متناهی بیش از چهار عضو ندارد.

۶. در انجمن «معمابازان حرفه‌ای»، اعضا به تعدادی گروه تقسیم شده‌اند و در پایان هر هفته گروه‌بندی‌ها به شکل خاصی تغییر می‌کند؛ در هر گروه یکی از اعضا به عنوان بهترین عضو مشخص می‌شود و همه بهترین‌های گروه‌ها از گروه خود جدا شده و یک گروه جدید را تشکیل می‌دهند. اگر گروهی فقط یک عضو داشته باشد همان عضو به گروه جدید می‌رود و گروه قبلی منحل می‌شود. فرض کنید انجمن  $n$  عضو دارد و در ابتدا همه اعضا در یک گروه بوده باشند. ثابت کنید هفته‌ای فرا می‌رسد که از آن به بعد تعداد اعضای تمام گروه‌ها حداکثر  $1 + \sqrt{2n}$  است.

موفق باشید