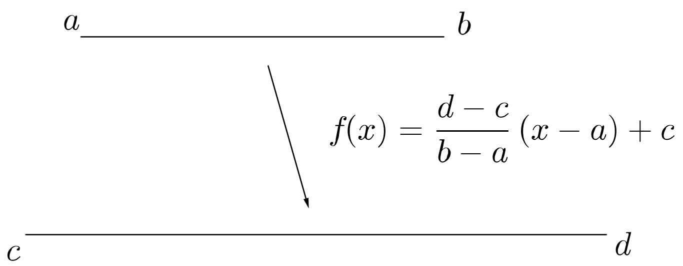
بسم الله الرحمن الرحیم

راه‌حل آزمون خلاقیت ۱۳۹۳

سؤال شماره ۱. تابع صعودی از چی به چی؟!

الف. بله، وجود دارد.

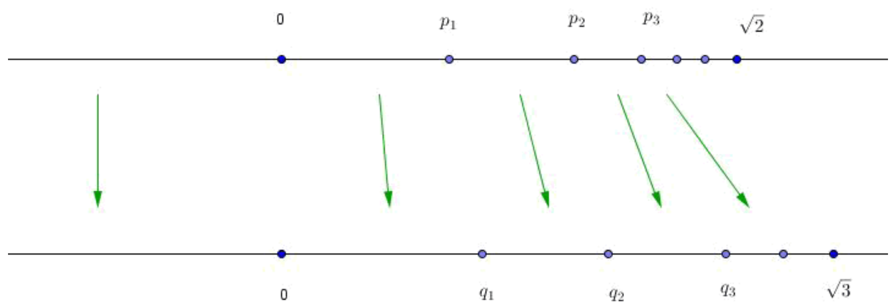
ابتدا توجه کنید که اگر a، b، c و d اعدادی گویا باشند نگاشتی یک‌به‌یک، پوشا و صعودی از بازه (a,b) به بازه (c,d) وجود دارد. کافی است تابع $\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ را در نظر بگیریم.



اکنون فرض کنید p_n دنباله‌ای صعودی از اعداد گویا باشد که به $\sqrt{2}$ میل می‌کند و q_n دنباله‌ای صعودی از اعداد گویا باشد که به $\sqrt{3}$ میل می‌کند. هم‌چنین فرض می‌کنیم $p_0=0$ و $q_0=0$. در این صورت تابع $f:A\to B$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\le 0 \quad \text{اگر} \\ \frac{q_{i+1}-q_i}{p_{i+1}-p_i}(x-p_i)+q_i & x\in[p_i,p_{i+1}] \quad \text{اگر} \end{cases}$$

شکل زیر، نحوه تعریف f را نشان می‌دهد. واضح است که f یک به یک، پوشا و صعودی است.



ب. بله، وجود دارد.

هر دو مجموعه‌ی A و B شمارا هستند. پس می‌توان اعضای آن‌ها را شماره‌گذاری کرد:

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\dots\}$$

$$B=\{b_1,b_2,b_3,\dots\}$$

هم‌چنین دقت کنید که هر دو مجموعه A و B این خاصیت را دارند که بین هر دو عددی، بی‌نهایت عضو از A و بی‌نهایت عضو از B وجود دارد.
اکنون تابع f را در به طور استقرایی تعریف می‌کنیم. ابتدا تعریف می‌کنیم $f(a_1) = b_1$. فرض کنید در مرحله nام، تابع f را روی تعداد متناهی از اعضای A تعریف کرده‌ایم به طوری که صعودی و یک‌به‌یک است. اکنون دو عمل روی تابع f انجام می‌دهیم.

- **عمل الف.** فرض کنید k کوچک‌ترین اندیسی باشد که تا کنون $f(a_k)$ را تعریف نکرده‌ایم. و فرض کنید i هایی که $f(a_i)$ ها را تعریف کرده‌ایم عبارت باشند از i_1، i_2 و ... و i_r. اعداد a_{i_1}، a_{i_2}، ...، a_{i_r} را به ترتیب صعودی مرتب کنید و ببینید که a_k بین کدام دو تا از آن‌ها قرار می‌گیرد. فرض کنید مثلاً بین a_r و a_s قرار بگیرد. اکنون $f(a_r)$ و $f(a_s)$ را در نظر بگیرید. بنابر خاصیتی که گفته شد، بین این دو عدد، بی‌نهایت عضو از B وجود دارد. پس حتماً عضوی از B در این بین هست که تا کنون در برد f قرار نگرفته است. آن را q بنامید و تعریف کنید $f(a_k) = q$. اکنون به اعضای دامنه‌ی f یک عضو اضافه شد و توجه کنید که با توجه به نحوه‌ی تعریف $f(a_k)$، تابع f هم‌چنان صعودی است.

- **عمل ب.** اکنون عمل مشابهی برای وارون f انجام می‌دهیم. در واقع فرض کنید l کوچک‌ترین اندیسی باشد که تا کنون b_lدر برد f قرار نگرفته است. و فرض کنید i هایی که b_i ها در برد f هستند عبارت باشند از i_1، i_2 و ... و i_r. اعداد b_{i_1}، b_{i_2}، ...، b_{i_r} را به ترتیب صعودی مرتب کنید و ببینید که b_k بین کدام دو تا از آن‌ها قرار می‌گیرد. فرض کنید مثلاً بین b_r و b_s قرار بگیرد. اکنون $f^{-1}(b_r)$ و $f^{-1}(b_s)$ را در نظر بگیرید. بنابر خاصیتی که گفته شد، بین این دو عدد، بی‌نهایت عضو از A وجود دارد. پس حتماً عضوی از A در این بین هست که تا کنون f آن تعریف نشده است. آن را q بنامید و تعریف کنید $f(q) = b_k$. اکنون به تعداد اعضای دامنه‌ی f یک واحد اضافه شد و توجه کنید که با توجه به نحوه‌ی تعریف $f(q)$، تابع f هم‌چنان صعودی است.

پس دیدیم که با انجام عمل الف و عمل ب، دامنه تابع و برد تابع دو عضو بیش‌تر شد. مهم‌تر از آن این که با توجه به نحوه انتخاب اندیس k و اندیس l، هر بار اولین a_i ای که در دامنه نیست به دامنه اضافه می‌شود و نیز اولین b_i ای که در برد نیست به برد اضافه می‌شود. بنابر این اگر انجام عمل‌های الف و ب را تا بی‌نهایت ادامه دهیم، دامنه f کل A و برد f کل B خواهد شد و چون در تمام مراحل تابع یک‌به‌یک و صعودی باقی می‌ماند پس حکم ثابت می‌شود.

پ. خیر، وجود ندارد.
فرض کنید چنین تابعی وجود داشته باشد. زیرمجموعه‌ی C از B را به صورت $C = \{0\} \times \mathbb{R}$ در نظر بگیرید. C دارای این خاصیت است که اگر x و y عضو آن باشند آن‌گاه هر zای عضو B که بین x و y باشد نیز عضو آن است. اکنون تعریف کنید

$$D = f^{-1}(C)$$

دقت کنید که D زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است. از آنجا که f صعودی، یک‌به‌یک و پوشا است پس D نیز باید همان خاصیت C را داشته باشد. یعنی اگر x و y عضو آن باشند آن‌گاه هر zای عضو $\mathbb{R}$ که بین x و y باشد نیز عضو آن است. چنین زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باید یک بازه باشد. ادعا می‌کنیم دو سر این بازه باید باز باشند. چون اگر یکی از سرهای بازه، بسته باشد آن‌گاه D عضو ماکزیمم یا مینیمم دارد در حالیکه C عضو ماکزیمم یا مینیمم ندارد. پس مجموعه‌ی D بازه‌ای به شکل (a, b) است. اکنون $x = f^{-1}(b)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $x = (x_1, x_2)$. از آنجا که b از همه اعضای D بزرگ‌تر است پس x نیز از همه اعضای C بزرگ‌تر است. پس باید $x_1 > 0$. ولی در این صورت $y = (x_1/2, 0)$ عضوی

از B است که از همه اعضای C بزرگ‌تر و از x کوچک‌تر است. پس $f^{-۱}(y)$ نیز عضوی از $\mathbb{R}$ است که از همه اعضای D بزرگ‌تر و از b کوچک‌تر است، ولی چنین عددی وجود ندارد. این تناقض نشان می‌دهد که تابع f وجود ندارد.

ت. خیر، وجود ندارد.

اگر x و y دو عضو از یک مجموعه مرتب باشند، گوییم y عضو بعد از x است اگر $y > x$ و هیچ عضوی بین x و y نباشد.
عضو x از یک مجموعه مرتب A را «بن‌بست» می‌نامیم اگر هیچ عضو بعدی نداشته باشد.
فرض کنید تابع یک‌به‌یک، پوشا و صعودی f از A به B موجود باشد. در این صورت x یک عضو بن‌بست از A است اگر و تنها اگر $f(x)$ یک عضو بن‌بست از B باشد.
اکنون دقت کنید که اعضای بن‌بست A عبارتند از

$$\{(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}),(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲}),(\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۲}),\dots\}$$

و اعضای بن‌بست B عبارتند از

$$\{(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}),(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲}),(\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۲}),\dots,(۰,\frac{۱}{۲})\}$$

بنابراین $(۰,\frac{۱}{۲})$ یک عضو مینیمم در بین اعضای بن‌بست B است پس باید $f^{-۱}((۰,\frac{۱}{۲}))$ نیز یک عضو مینیمم در بین اعضای بن‌بست A باشد حال‌آنکه اعضای بن‌بست A دارای عضو مینیمم نیستند. این تناقض نشان می‌دهد که تابع f وجود ندارد.

ث. مجموعه‌ی $Y = \{۲^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{۰\}$ را در نظر بگیرید و تعریف کنید

$$A = Y \cup (۱+Y) \cup (۲+Y) \cup \cdots$$

$$B = A \cup \{-۱\}$$

ابتدا نشان می‌دهیم تابعی پوشا و صعودی از A به B و هم‌چنین از B به A وجود دارد.
تابع $f : A \to B$ را به این صورت تعریف کنید:

$$f(x) = \begin{cases} -۱ & \text{اگر } x < ۱ \\ x-۱ & \text{اگر } x \geq ۱ \end{cases}$$

به راحتی مشاهده می‌شود که f صعودی و پوشا است.
هم‌چنین تابع $g : B \to A$ را به این صورت تعریف کنید:

$$g(x) = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } x = -۱ \\ x & \text{اگر } x \neq -۱ \end{cases}$$

به راحتی مشاهده می‌شود که g نیز صعودی و پوشا است.
اکنون نشان می‌دهیم تابعی یک‌به‌یک، پوشا و صعودی از A به B وجود ندارد. فرض کنید چنین تابعی وجود داشته باشد. از آنجا که ۰ عضو مینیمم A است پس باید $f(x)$ نیز عضو مینیمم B باشد که ۱− است. اما در B، ۰ عضو بعد از ۱− است پس باید $f^{-۱}(۰)$ نیز عضو بعد از ۰ در A باشد حال آن‌که در A، ۰ دارای عضو بعدی نیست. این تناقض نشان می‌دهد که f وجود ندارد.

سؤال شماره ۲. چالش چاله!

ادعا می‌کنیم می‌توان چندوجهی را به هر اندازه‌ی دل‌خواه در هر جهت دل‌خواه حرکت داد.
برای به حرکت در آوردن چندوجهی ابتدا یک خط راست از نقطه‌ای درون آن به نقطه‌ی مقصد بکشید. چون چندوجهی محدب است، این پاره‌خط حتماً یک وجه را قطع می‌کند. در جهت این پاره‌خط و به سمت مورد نظر چندوجهی را بغلتانید. حال اگر فاصله‌ی نزدیک‌ترین محل تماس چندوجهی با زمین تا نقطه‌ی مقصد را اندازه بگیریم از حالت اولیه کم‌تر شده است.
تنها باید نشان دهیم مقدار مثبت ثابتی وجود دارد که هر بار حداقل به آن اندازه به نقطه‌ی مقصد نزدیک می‌شویم، یعنی در واقع مقدار نزدیک شدن‌های ما یک دنباله‌ی هم‌گرا به صفر را تشکیل نمی‌دهد. اگر چنین اتفاقی بیفتد، در این صورت چندوجهی حول یک راس غلتیده است (یعنی وجه‌های متصل به یک راس را مرتباً طی کرده‌است) زیرا اگر در دو غلتیدن متوالی، ضلع‌های چندوجهی را طوری طی شود که رأس زاویه‌ی بین اضلاع اول و دوم و رأس زاویه بین اضلاع دوم و سوم متفاوت باشد حداقل مسیر طی شده در این دو غلتیدن به اندازه‌ی فاصله‌ی بین این دو راس است، در نتیجه دنباله‌ی مقادیر غلتیدن به صفر هم‌گرا نمی‌شود.
لم. ادعا می‌کنیم غلتیدن حول یک راس تنها به اندازه‌ی تعداد وجوه متصل به آن امکان‌پذیر است.

اثبات. چندوجهی را حول یک راس باز کنید. در هر بار غلتاندن چندوجهی حول خط، مسیری را که این خط روی آن وجه‌ها را قطع می‌کند علامت گذاری کنید. چون چندوجهی در مسیر یک خط می‌غلتد بعد از باز کردن آن باید یک خط راست روی وجوه ببینیم. می‌دانیم در یک صفحه یک خط هر چندضلعی محدب را حداکثر یک بار قطع می‌کند. بنابراین چندوجهی در غلتیدن حول یک رأس حداکثر یک بار روی یک وجه فرود آمده است. □

با استفاده از این لم و شرطی که برای هم‌گرا بودن مسیر غلتیدن به دست آوردیم نتیجه می‌گیریم که طول طی شده توسط غلتیدن چندوجهی به این شکل هیچ‌گاه هم‌گرا نمی‌شود. سپس چندوجهی را به هر اندازه و در هر جهت که بخواهیم می‌توانیم حرکت دهیم.

برای کامل کردن حل مسئله‌ی اصلی، پاره‌خطی شکسته در صفحه در نظر می‌گیریم، که نقطه‌ی شروع حرکت را به نقطه‌ی ابتدایی پل، سپس نقطه‌ی ابتدایی پل را به نقطه‌ی انتهایی آن و در نهایت نقطه‌ی انتهایی پل را به نقطه‌ی وسط چاله متصل کند. طبق بالا می‌توان چندوجهی را روی این مسیر حرکت داد و چون همواره یک نقطه از چندوجهی با این پاره‌خط‌ها اشتراک دارد، چندوجهی به درون دره نمی‌افتد و از پل جان سالم به در می‌برد. وقتی که چندوجهی به نقطه‌ی نهایی برسد چون شعاع چاله به اندازه‌ی قطر چندوجهی است، حتماً دورترین نقطه از چندوجهی به مرکز چاله، درون آن قرار گرفته و در نتیجه چندوجهی به داخل چاله خواهد افتاد و چالش چاله را به سلامت پشت سر گذاشته‌ایم!

سؤال شماره ۳. باقی‌نمانده‌ی ایرانی!

توجه. باید این فرض به صورت سؤال اضافه شود که d_iها همه بزرگ‌تر از یک هستند.

الف. با توجه به اینکه d_iها بزرگ‌تر از ۱ و نسبت به هم اول هستند، از یک‌دیگر متمایزند. بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت سؤال می‌توان فرض کرد $1 < d_1 < \cdots < d_n$. ابتدا مسأله را در حالت $d_1 > 2$ حل می‌کنیم و بعد حالات دیگر را از آن نتیجه می‌گیریم.
برای هر زیرمجموعه‌ی $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ از اعداد ۱ تا n، d_I را به صورت $d_{i_1}\cdots d_{i_k}$ تعریف می‌کنیم. از قضیه‌ی باقی‌مانده‌ی چینی می‌دانیم که معادلات هم‌نهشتی

$$x \overset{d_{i_1}}{\equiv} r_{i_1}, \ \ldots x \overset{d_{i_k}}{\equiv} r_{i_k}$$

تنها یک جواب به پیمانه‌ی d_I دارد. یکی از این جواب‌ها را با r_I نمایش می‌دهیم. (وقتی I تهی باشد، هیچ معادله‌ای نداریم و بنابراین همه‌ی اعداد صحیح جواب هستند. در این حالت می‌توان d_I و r_I را برابر ۱ تعریف کرد.) پس $x \overset{d_I}{\equiv} r_I$ معادل با دستگاه‌های هم‌نهشتی ذکرشده است.
حال فرض کنید M یک عدد مثبت دل‌خواه باشد. بنابر اصل شمول و عدم شمول تعداد جواب‌های طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی M برای دستگاه نامعادلات هم‌نهشتی

$$x \overset{d_1}{\not\equiv} r_1, \ \ldots \ , x \overset{d_n}{\not\equiv} r_n$$

برابر است با:

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} |\{1 \le x \le M | x \overset{d_I}{\equiv} r_I\}|.$$

با یک استدلال ساده می‌توان نشان داد که تعداد جواب‌های هر معادله‌ی هم‌نهشتی به صورت $x \overset{d}{\equiv} r$ در بازه‌ی $[1, M]$ برابر با یکی از اعداد $\lfloor \frac{M}{d} \rfloor$ و یا $\lceil \frac{M}{d} \rceil$ است و در هر دو صورت اختلافش با $\frac{M}{d}$ کم‌تر از ۱ است. با توجه به این نکته عبارت بالا از مقدار زیر بیش‌تر است:

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \frac{M}{d_I}\Big) - 2^n &= M\Big(1 - \frac{1}{d_1} - \cdots - \frac{1}{d_n} + \frac{1}{d_1 d_2} + \cdots\Big) - 2^n \\ &= M\Big(1 - \frac{1}{d_1}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{1}{d_n}\Big) - 2^n. \end{aligned}$$

حال اگر $M = 3^n$ و همه‌ی d_iها حداقل برابر ۳ باشند، این عبارت حداقل برابر است با:

$$3^n\Big(1 - \frac{1}{3}\Big)^n - 2^n = 0.$$

پس در این حالت نتیجه می‌شود که تعداد جواب‌های نامعادلات مسأله عددی مثبت است.
اما برای حالت $d_1 = 2$، بسته به زوجیت r_1، نامعادله‌ی اول زوجیت x را تعیین می‌کند. در هر دو صورت می‌توان از یکی از تغییر متغیرهای صحیح $x = 2y$ و یا $x = 2y - 1$ استفاده کرد. حال در بقیه‌ی نامعادلات به جای x عبارت معادل بر حسب y را جای‌گذاری کنید و با استفاده از وارون ضربی ۲ در هر یک از پیمانه‌ها، نامعادلات را بر حسب y بازنویسی کنید تا به مجموعه‌ی جدیدی از نامعادلات به صورت

$$y \overset{d_2}{\not\equiv} s_2, \ \ldots \ , y \overset{d_n}{\not\equiv} s_n$$

برسید. با توجه به این‌که $۳ \leq d_۲ < \cdots < d_n$، بنابر قسمت قبل این نامعادلات جوابی طبیعی و کم‌تر یا مساوی $۳^{n-۱}$ دارند و در نتیجه با در نظر گرفتن رابطه‌ی بین x و y یک جواب کم‌تر یا مساوی $۲ \times ۳^{n-۱}$ برای همه‌ی نامعادلات اصلی بر حسب x به دست می‌آید و $۲ \times ۳^{n-۱} < ۳^n$!

ب. مانند قسمت قبل فرض می‌کنیم که d_iها به صورت صعودی مرتب شده‌اند. در نتیجه برای هر i، d_i از i بیش‌تر است. همین‌طور فرض کنید ϵ یک عدد مثبت داده شده است. عدد a را در بازه‌ی $(\frac{۲}{۲+\epsilon}, ۱)$ انتخاب می‌کنیم. به وضوح عدد طبیعی $N_۱$ وجود دارد که $a < ۱ - \frac{۱}{N_۱}$. از طرف دیگر با توجه به اینکه $۱ < \frac{(۲+\epsilon)a}{۲}$، عدد طبیعی $N_۲$ وجود دارد که

$$\left(\frac{(۲+\epsilon)a}{۲}\right)^{N_۲} > ۲^{N_۱}.$$

N را برابر با $N_۱ + N_۲$ تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم برای هر $n > N$ دستگاه نامعادلات هم‌نهشتی مسأله جوابی حداکثر برابر $(۲+\epsilon)^n$ دارد.

با توجه به قسمت قبل می‌دانیم که تعداد جواب‌های این نامعادلات در بازه‌ی $[۱, (۲+\epsilon)^n]$ بیش‌تر از عبارت زیر است:

$$(۲+\epsilon)^n(۱-\frac{۱}{d_۱})\cdots(۱-\frac{۱}{d_n}) - ۲^n.$$

اما برای $n > N$ داریم:

$$\begin{aligned}
(۲+\epsilon)^n(۱-\frac{۱}{d_۱})\cdots(۱-\frac{۱}{d_n}) &\geq (۲+\epsilon)^n(۱-\frac{۱}{۲})\cdots(۱-\frac{۱}{n+۱}) \\
&\geq (۲+\epsilon)^n(۱-\frac{۱}{۲})^{N_۱}(۱-\frac{۱}{N_۱})^{n-N_۱} \\
&> (۲+\epsilon)^n ۲^{-N_۱} a^{n-N_۱} \\
&= (۲+\epsilon)^n ۲^{-N_۱}\left(\frac{۲}{۲+\epsilon}\right)^{n-N_۱}\left(\frac{(۲+\epsilon)a}{۲}\right)^{n-N_۱}.
\end{aligned}$$

توجه کنید که $\frac{۲}{۲+\epsilon} < ۱$، پس با بیش‌تر کردن توانش کم‌تر می‌شود و از طرف دیگر $۱ < \frac{(۲+\epsilon)a}{۲}$، پس با کم‌تر کردن توانش کم‌تر می‌شود. پس با استفاده از این نکات و $n - N_۱ > N_۲$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}
(۲+\epsilon)^n ۲^{-N_۱}\left(\frac{۲}{۲+\epsilon}\right)^{n-N_۱}\left(\frac{(۲+\epsilon)a}{۲}\right)^{n-N_۱} &> (۲+\epsilon)^n ۲^{-N_۱}\left(\frac{۲}{۲+\epsilon}\right)^{n}\left(\frac{(۲+\epsilon)a}{۲}\right)^{N_۲} \\
&> (۲+\epsilon)^n ۲^{-N_۱}\left(\frac{۲}{۲+\epsilon}\right)^{n} ۲^{N_۱} \\
&= ۲^n.
\end{aligned}$$

پس در نهایت نتیجه می‌گیریم که:

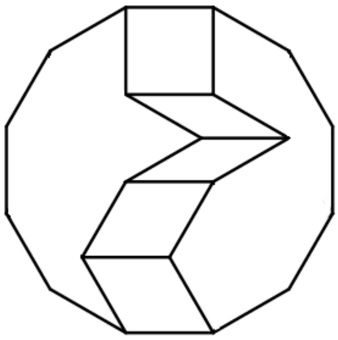
$$(۲+\epsilon)^n(۱-\frac{۱}{d_۱})\cdots(۱-\frac{۱}{d_n}) - ۲^n > ۰$$

و ادعای ما ثابت می‌شود.

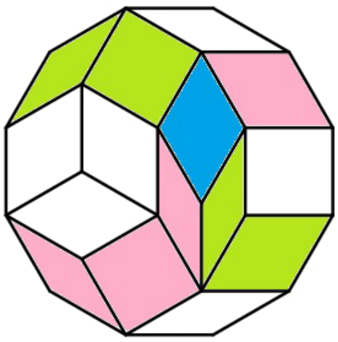
سؤال شماره ۴. چهار لوزا!

مسئله را برای یک $2n$ ضلعی محدب P که اضلاعش برابر و اضلاع روبه‌رویش موازی باشند اثبات می‌کنیم. این تعمیم برای استفاده از استقرا در قسمت سوم مسئله مهم است.

۱. یک لوزی‌بندی دل‌خواه از P و یک لوزی دل‌خواه از این لوزی‌بندی را در نظر بگیرید. فرض کنید که دو ضلع موازی از این لوزی با محور x موازی باشند. در این صورت می‌توان این لوزی را از بالا و پایین با لوزی‌هایی که دو ضلع موازی محور x دارند، ادامه داد تا در نهایت از هر دو سمت به یک از اضلاع P برخورد کنیم. با توجه به این فرض که رأس‌های لوزی‌های لوزی‌بندی نمی‌توانند شامل هیچ نقطه‌ی درونی از اضلاع P باشند، نتیجه می‌گیریم که هر ضلع لوزی موازی و مساوی با یکی از اضلاع P است.



حال اگر دو ضلع موازی از P مانند a و a' را در نظر بگیریم، شبیه به استدلال بالا می‌توان مسیرهایی از لوزی‌هایی با اضلاع موازی این دو ضلع یافت که آن‌ها را به هم متصل کنند. به علاوه از آن‌جا که هر لوزی در این مسیر را تنها توسط یک لوزی می‌توان ادامه داد، مسیری یگانه مابین a و a' وجود دارد. پس هر لوزی محل تقاطع دو مسیر از اضلاع روبه‌رو خواهد بود. برای مثال در شکل زیر لوزی آبی‌رنگ محل تقاطع مسیر سبزرنگ و صورتی رنگ است. می‌دانیم که تعداد این مسیرها برابر nتا است و بنابراین $\binom{n}{2}$ لوزی در لوزی‌بندی وجود دارد.



محاسبه‌ی تعداد یال‌ها نتیجه‌ی یک دوگونه‌شماری ساده است.
اگر همه‌ی اضلاع لوزی‌ها را بشماریم، از یک سو این تعداد برابر $4\binom{n}{2}$ و از سوی دیگر برابر $2E + 2n$ است که E نمایان‌گر تعداد اضلاع درونی لوزی‌ها است. پس

$$\text{تعداد کل اضلاع} = E + 2n = n + 2\binom{n}{2} = n + (n^2 - n) = n^2$$

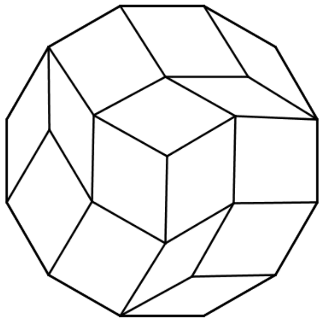
برای تعداد رأس‌ها هم با توجه به فرمول در مورد گراف‌های مسطح داریم:

$$۲ = \text{تعداد رأس‌ها} + \text{تعداد یال‌ها} - \text{تعداد ناحیه‌ها}$$

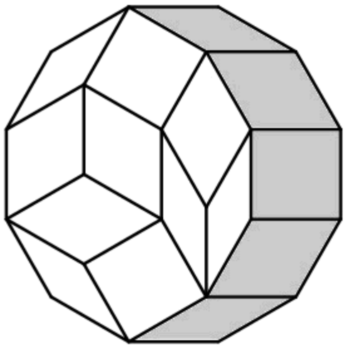
یعنی

$$\left(\binom{n}{۲}+۱\right) - n^۲ + \text{تعداد رأس‌ها} = ۲ \Rightarrow \text{تعداد رأس‌ها} = \binom{n+۱}{۲}+۱$$

۲. این گزاره درست نیست. شکل زیر مثال نقض این ادعا را نمایش می‌دهد.



۳. با استقرا روی n مسئله را ثابت می‌کنیم. برای $n=۲$ حکم واضح است. فرض کنید حکم برای $(۲n-۲)$-ضلعی‌ها درست باشد. اضلاع P را با $e_۱,\dots,e_{۲n}$ نام‌گذاری کنید. یک لوزی‌بندی از P را استاندارد می‌نامیم هرگاه مسیری که اضلاع $e_۱$ و $e_{n+۱}$ را به هم وصل می‌کند مجاور به اضلاع $e_۲,\dots,e_n$ باشد. در شکل زیر یک لوزی‌بندی استاندارد رسم شده است. در این جا اضلاع را با شروع از ضلع بالایی و در جهت ساعت‌گرد شماره‌گذاری کرده‌ایم.



در ادامه نشان می‌دهیم که با حرکت بیان‌شده در صورت سؤال می‌توان هر لوزی‌بندی دل‌خواه را به یک لوزی‌بندی استاندارد تبدیل کرد. در این صورت، اگر دو لوزی‌بندی دل‌خواه داشته باشیم، می‌توانیم هر دو را به دو لوزی‌بندی استاندارد تبدیل کنیم. سپس مسیر بین دو ضلع $e_۱$ و $e_{n+۱}$ (که در هر دو لوزی‌بندی مشترک است) را حذف می‌کنیم تا یک $(۲n-۲)$-ضلعی محدب P' ایجاد شود که اضلاع روبه‌رویش موازی و مساوی‌اند. سپس از فرض استقرا برای P' نتیجه می‌شود که می‌توان دو لوزی‌بندی را به هم تبدیل کرد (توجه کنید که حرکت مذکور برگشت‌پذیر است).
یک لوزی‌بندی دل‌خواه در نظر بگیرید و مسیر بین اضلاع $e_۱$ و $e_{n+۱}$ را C بنامید. اگر C مجاور به تمام اضلاع $e_۲,\dots,e_n$ باشد چیزی برای اثبات نداریم. در غیر این صورت، در ادامه با اعمال مذکور به لوزی‌بندی دیگری خواهیم رسید که تعداد لوزی‌های سمت راست C (بین C و اضلاع $e_۲,\dots,e_n$) کم‌تر شود. با تکرار این عمل ادعا ثابت می‌شود.
فرض کنید C مجاور به اضلاع $e_۱,\dots,e_{i-۱}$ باشد که $۲ \le i \le n$ و مجاور به ضلع e_i نباشد. فرض کنید اولین ضلع بعدی مجاور به C ضلع $e_{j+۱}$ باشد ($j \le n$). به اضلاع e_i تا e_j و C یک $۲(j-i+۱)$-ضلعی Q محدود می‌شود که لوزی‌بندی

شده است (اما لزوماً محدب نیست). اضلاع دیگر Q را به‌ترتیب $e'_i,\dots,e'_j$ بنامید (e'_i با e_i ام رأس مشترک دارد). کافی است ثابت کنیم یکی از رئوس Q که بین اضلاع e'_i و e'_j است تنها مجاور به یک لوزی در Q است. در این صورت این رأس مجاور با سه لوزی در P است و اگر عمل مذکور را روی این رأس اعمال کنیم، در لوزی‌بندی حاصل تعداد لوزی‌های سمت راست C کم‌تر می‌شود و هو المطلوب.

با توجه به این که مسیر شامل هر e_k با C متقاطع است، نتیجه می‌گیریم که هر یک از $e'_i,\dots,e'_j$ موازی و مساوی با یکی از $e_i,\dots,e_j$ است. لوزی شامل e'_k در Q را M_k بنامید. فرض کنید ضلع دیگر M_k موازی با e_{f_k} باشد و e'_k موازی با e_{g_k} باشد. توجه کنید که $f_k \neq g_k$ برای هر k. اگر به ازای یک k داشته باشیم $f_k = g_{k+1}$ رأس مطلوب پیدا می‌شود. پس فرض کنید این طور نیست. توجه کنید که f_i باید کم‌تر از g_i باشد، زیرا درغیر این صورت M_i یا خارج از Q می‌افتد و یا e_i را قطع می‌کند (در حالت کلی، $f_k < g_k$ به این معنی است که ضلع دیگر M_k رو به پایین باشد). حال فرض کنید $f_k < g_k$ (استقرا روی k با شروع از $k = i$). با توجه به این که ضلع e'_{k+1} خارج M_k است، نتیجه می‌گیریم $g_{k+1} \geq f_k$ و از فرض خلف به دست می‌آوریم $g_{k+1} > f_k$. هم‌چنین باید داشته باشیم $f_{k+1} < g_{k+1}$ وگرنه M_{k+1} یا خارج از Q می‌افتد و یا M_k را قطع می‌کند (این‌جا از این که $f_k \neq g_{k+1}$ استفاده کرده‌ایم، درغیر این صورت ممکن بود $M_k = M_{k+1}$ و نتیجه‌ی مذکور برقرار نباشد). حال استقرا کامل می‌شود و نتیجه می‌گیریم برای هر k داریم $f_k < g_k$ و $g_{k+1} > f_k$. حال ضلعی را در نظر بگیرید که e'_{k+1} موازی e_i باشد. در نتیجه $g_{k+1} = i$. اما داریم $f_k \geq i$ و این با $g_{k+1} > f_k$ متناقض است.

به عنوان مرور، در پاراگراف قبل نتیجه گرفتیم k ای یافت می‌شود که $f_k = g_{k+1}$. بنابراین یک رأس بین $e'_i,\dots,e'_j$ یافته‌ایم که تنها مجاور به یک لوزی در Q است. همان‌طور که گفتیم، با اعمال عمل مذکور روی این رأس تعداد لوزی‌های سمت راست C کم‌تر می‌شود. پس با تکرار کل این فرآیند C به مسیری تبدیل می‌شود که مجاور به ضلع‌های $e_2,\dots,e_n$ است. پس لوزی‌بندی به یک لوزی‌بندی استاندارد تبدیل شده‌است و همان‌طور که گفتیم مسئله ثابت می‌شود.

۴. با توجه به قسمت اول سؤال مسیری که ضلع بالایی و پایینی P را به هم متصل می‌کند $n-1$ لوزی دارد، چرا که باید دقیقاً یک لوزی با ضلع موازی هر راستای دیگری از اضلاع P در آن موجود باشد. حال ترتیب قرار گرفتن این لوزی‌ها می‌تواند به هر شکلی باشد، در واقع برای راستای دوم پایین‌ترین لوزی (فرض کرده‌ایم که مسیر دو ضلع موازی محور x را هم متصل کرده است.) $n-1$انتخاب، برای لوزی بعدی $n-2$ انتخاب و... داریم. بنابراین $(n-1)!$ حالت برای این مسیر وجود دارد. با حذف این مسیر و انتقال مناسب دو چندضلعی حاصل از حذف آن به یک $(2n-2)$ضلعی می‌رسیم (در صورتی که با حذف این مسیر P دو قسمت نشود هم باز با یک $(2n-2)$ضلعی روبه‌رو هستیم) که لوزی‌بندی شده است. پس اگر تعداد روش‌های لوزی‌بندی $2n$ضلعی را با $f(n)$ نمایش دهیم:

$$f(n) \leq (n-1)! f(n-1)$$

در نتیجه:

$$f(n) \leq (n-1)! \times (n-2)! \times \cdots \times 1! = \prod_{k=1}^{n-1} k^{n-k}$$

در ادامه سعی می‌کنیم کران پایین خواسته‌شده در صورت مسئله را ثابت کنیم.

در این‌جا منظورمان از یک «نیمه‌مسیر» مجموعه‌ای از اضلاع لوزی‌ها است که تشکیل خطی شکسته بدهند، دو ضلع مقابل چندضلعی را به هم متصل کنند و ضمناً برای هر راستا از اضلاع چندضلعی دقیقاً یک ضلع از لوزی‌ها موازی با آن راستا انتخاب شده باشد.

اگر یک $(2n-2)$ضلعی را از روی یک نیمه‌مسیر آن دو قسمت بکنیم و یکی از قسمت‌ها را با برداری هم طول با اضلاع $(2n-2)$ضلعی که موازی با هیچ‌کدام از اضلاع آن نیست انتقال دهیم و سپس فضای خالی بین نیمه‌مسیر و انتقال آن را با لوزی‌هایی پر کنیم، در این صورت به یک لوزی‌بندی از $2n$ضلعی خواهیم رسید. پس

$$\left(\text{تعداد نیمه‌مسیرها در } (2n-2)\text{ضلعی}\right) \times f(n-1) \le f(n)$$

از سوی دیگر به کمک استقرا می‌توان نشان داد که

$$k + \left(\text{نیمه‌مسیرها در } 2(k-1)\text{ضلعی}\right) \le \text{نیمه‌مسیرها در } 2k\text{ضلعی}$$

پس تعداد نیمه‌مسیرها در $2k$ضلعی حداقل $\binom{k}{2} + 1$ است و لذا حکم مسئله به کمک رابطه‌ای که در بالا بیان شد ثابت می‌گردد.

سؤال شماره ۵. چندضلعی کذایی!

ابتدا نام‌گذاری‌های زیر را قرارداد می‌کنیم:

A	تعداد اضلاع در راستای محور x
B	تعداد اضلاع در راستای محور y
C	تعداد اضلاع در راستای محور z
X	تعداد زوایای موازی صفحه‌ی yz
Y	تعداد زوایای موازی صفحه‌ی zx
Z	تعداد زوایای موازی صفحه‌ی xy

الف. یک ضلع در راستای محور x در نظر بگیرید. دو رأس این ضلع دو زاویه تشکیل می‌دهند که یا موازی صفحه‌ی xy هستند یا موازی صفحه‌ی xz. هم‌چنین هر زاویه موازی صفحه xy یک ضلع در راستای محور y دارد و یک ضلع در راستای محور x. به طور مشابه برای زوایای راستاهای دیگر این احکام برقرار هستند.
پس مجموع تعداد زوایای موازی صفحه‌های xy و xz برابرست با دو برابر تعداد اضلاع در راستای محور x. یعنی داریم:

$$Y + Z = ۲A$$

و به طور مشابه:

$$X + Z = ۲B, \quad X + Y = ۲C$$

که از این سه معادله نتیجه می‌شود که هر سه عدد X، Y و Z زوجیت یک‌سانی دارند و بنابراین حکم این قسمت ثابت می‌شود.

ب. با توجه به قسمت (الف) یک ۶ ضلعی شبکه‌ای که همه‌ی رئوسش هم‌صفحه نیستند تنها دو شکل می‌تواند داشته باشد.

- موازی هر یک از سه صفحه‌ی مختصاتی دو زاویه داشته باشد.
- موازی یکی از صفحه‌های مختصاتی ۴ زاویه، موازی دیگری ۲ زاویه و موازی صفحه‌ی سوم زاویه‌ای نداشته باشد.

در حالت اول چندضلعی را به دو مستطیل که در یک ضلع مشترکند تفکیک کنید. از مرکز هر مستطیل خطی عمود بر صفحه‌ی گذرا از آن رسم کنید. صفحه‌ی گذرنده از مرکز دو مستطیل و وسط ضلع مشترک آن‌ها به صفحه‌ی هر دو مستطیل عمود است. پس دو خط عمود گذرا از مرکز مستطیل‌ها روی این صفحه قرار دارند و درنتیجه یک‌دیگر را قطع می‌کنند. محل تقاطع آن‌ها از همه‌ی رئوس ۶ضلعی شبکه‌ای به یک فاصله است.
ثابت می‌کنیم حالت دوم امکان‌پذیر نیست. طبق معادلات قسمت (الف)، دو برابر تعداد اضلاع در راستای یک محور برابر ۲ خواهد شد. یعنی در راستای یک محور فقط یک ضلع داریم. فرض کنید این محور، محور x باشد. اگر روی اضلاع ۶ضلعی شروع به حرکت کنیم با عبور از ضلع راستای محور x مقدار مختصه‌ی x افزایش یا کاهش می‌یابد و این مقدار دیگر تغییر نمی‌کند زیرا ضلع دیگری در این راستا نداریم، در نتیجه هیچ وقت به رأس ابتدایی نمی‌رسیم.

پ. بله؛ چنین چندضلعی‌ای وجود دارد.

فرض کنید رئوس آن را با $A_۱, A_۲, \ldots, A_{۲۰۱۴}$ نمایش دهیم. رئوس این چندضلعی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_n = \begin{cases} (k, k, ۰) & n = ۲k + ۱, ۱ \leq n \leq ۱۰۰۷ \\ (k, k-۱, ۰) & n = ۲k, ۱ \leq n \leq ۱۰۰۷ \\ (۵۰۳ - k, ۵۰۳ - k, ۱) & n = ۱۰۰۷ + ۲k + ۱, ۱۰۰۸ \leq n \leq ۲۰۱۴ \\ (۵۰۳ - k, ۵۰۳ - k + ۱, ۱) & n = ۱۰۰۷ + ۲k, ۱۰۰۸ \leq n \leq ۲۰۱۴ \end{cases}$$

می‌توان به راحتی دید که صفحه‌ی $۲x - ۲y + ۲z = ۱$ از وسط همه‌ی اضلاع چندضلعی می‌گذرد (کافی است نشان دهیم برای هر ضلع مقدار $۲x - ۲y + ۲z - ۱$ در یک سر آن مثبت و در سر دیگر آن منفی است).

ت. ابتدا با استفاده از معادلات قسمت (الف) ثابت می‌کنیم تعداد زاویه‌ها در راستاهای مختلف اضلاع یک مثلث هستند.

$$X + Y + ۲Z = ۲A + ۲B$$

پس:

$$۲C + ۲Z = ۲A + ۲B, C + Z = A + B$$

و در نتیجه:

$$C < A + B$$

و شبیه به همین نکته در مورد راستاهای دیگر هم برقرار است.

در مورد عکس این قسمت، بدون کم‌شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که a بزرگ‌ترین ضلع مثلث باشد. می‌دانیم $b + c > a$ و تعریف می‌کنیم $n = \frac{b+c-a}{۲}$.

روی صفحه‌ی xy، $\frac{b+a-c}{۲}$ ضلع در راستای محورهای x و y می‌کشیم به این صورت که اضلاع یکی در میان موازی محور x و محور y باشند. سپس روی صفحه‌ی موازی xz، به اندازه‌ی $\frac{c+a-b}{۲}$تا از اضلاع در راستای محور x و z می‌کشیم (اگر $a + b + c$ فرد بود، به اندازه‌ی $\frac{c+a-b}{۲}$ از هر ضلع انتخاب می‌کنیم.)

در این‌جا فقط nتا از ضلع‌های y و z باقی می‌مانند. یکی در میان nتا از هر ضلع رسم می‌کنیم و توسط این صفحه، دو صفحه‌ی دیگر را به هم متصل می‌کنیم.

سؤال شماره ۶. چند جمله‌ای از یک تابع!

قبل از هرچیز نشان می‌دهیم که در چنین وضعیتی چندجمله‌ای p یک تابع پوشا از برد f به برد f تعریف می‌کند (برای راحتی نمادگذاری برد f را با $\mathcal{R}(f)$ نمایش می‌دهیم).
اگر $y \in \mathcal{R}(f)$ باشد، داریم:

$$y \in \mathcal{R}(f) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R};\ f(x_\circ) = y \Rightarrow p(y) = p(f(x_\circ)) = f(p(x_\circ)) \Rightarrow p(y) \in \mathcal{R}(f)$$

پس p تابعی از $\mathcal{R}(f)$ به خودش تعریف می‌کند. برای این نشان دهیم این تابع پوشا است، فرض کنید $y \in \mathcal{R}(f)$ عنصر دل‌خواهی باشد. در این صورت $x_\circ \in \mathbb{R}$ هست که $f(x_\circ) = y$. حال دقت کنید که هر چندجمله‌ای درجه فرد روی کل اعداد حقیقی پوشا است (مقدارش برای مقادیر بزرگ مثبت از هر مقداری بزرگ‌تر و برای مقادیر منفی بزرگ از هر مقدار کوچک‌تر می‌شود و با توجه به پیوستگی پوشا خواهد بود). پس می‌توان $z \in \mathbb{R}$ یافت که $p(z) = x_\circ$. در نتیجه:

$$y = f(x_\circ) = f(p(z)) = p(f(z))$$

پس عنصر $f(z)$ در $\mathcal{R}(f)$ تحت p به y تصویر می‌شود و بنابراین استدلال ما تمام می‌شود.

۱. فرض کنید برد f مجموعه‌ای نامتناهی باشد. با توجه به این که درجه‌ی p از یک بیش‌تر است چندجمله‌ی $p(x) - x$ از جایی به بعد تغییر علامت نمی‌دهد، یعنی می‌توان $N > \circ$ یافت که

$$x > N \Rightarrow p(x) > x, \quad x < -N \Rightarrow p(x) < x$$

فرض کنید برد f شامل بی‌نهایت عدد مثبت و بی‌نهایت عدد منفی باشد. در این صورت $x_\circ, y_\circ \in \mathcal{R}(f)$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $y_\circ < -N < N < x_\circ$. دقت کنید تمام عناصر $\mathcal{R}(f) \cap [y_\circ, x_\circ]$ باید تصویر عنصری از $\mathcal{R}(f)$ تحت p باشند. اما این عنصر نمی‌تواند بزرگ‌تر از $x_\circ$ و یا کم‌تر از $y_\circ$ باشد، زیرا در حالت اول تصویر آن از خودش بزرگ‌تر و در حالت دوم تصویر آن از خودش کوچک‌تر خواهد بود. پس عناصر $\mathcal{R}(f) \cap [y_\circ, x_\circ]$ همگی تصویر خود این مجموعه تحت p هستند. حال توجه کنید که تصویر خود $x_\circ$ و $y_\circ$ هم در خارج از این مجموعه قرار می‌گیرد. پس با توجه به این که این مجموعه متناهی است (اعداد صحیح این بازه متناهی است)، لزوماً عنصری از آن وجود دارد که با اعمال تابع p روی عنصرهای $\mathcal{R}(f)$ پوشیده نمی‌شود که این با پوشا بودن تناقض دارد. با تغییری جزئی در استدلال بالا می‌توان حالت‌هایی که برد f تنها متناهی عدد مثبت یا متناهی عدد منفی را شامل می‌شود را هم رد کرد.

۲. چون p چندجمله‌ای درجه فرد با درجه‌ی بیش‌تر از یک است، $p(x) - x$ هم همین خواص دارد. پس حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد که آن را $x_\circ$ می‌نامیم. فرض کنید $p(x) = x$ جوابی به جز $x_\circ$ ندارد. در این صورت برای مقادیر x بیش‌تر از $x_\circ$، $p(x) > x$ و برای مقادیر کم‌تر از $x_\circ$، $p(x) < x$ خواهد بود. از سوی دیگر توجه کنید که اگر a ریشه‌ای از $p(x) = x$ باشد، $p(f(a)) = f(p(a)) = f(a)$ و این یعنی $f(a)$ هم ریشه‌ای از این معادله است. حال چون $x_\circ$ طبق فرض ما تنها ریشه است، نتیجه می‌گیریم $f(x_\circ) = x_\circ$. فرض کنید $x_{-m} < \cdots < x_{-1} < x_\circ < x_1 < \cdots < x_n$ اعضای برد f باشند. اگر $n > \circ$ باشد، $p(x_n) > x_n$ و این با این موضوع که تصویر اعضای برد f تحت p مجدداً در برد f هستند، تناقض دارد. به همین ترتیب اگر $m > \circ$ باشد، $p(x_{-m}) < x_{-m}$ و این مجدداً تناقض است. پس $m = n = \circ$ و بنابراین برد f تک عضوی است که در صورت سؤال فرض شده بود که چنین نیست.

۳. فرض کنید $z, y_1, \ldots, y_m$، $n = m + 1$ عدد صحیح متمایز دل‌خواه باشند. در این صورت به کمک درون‌یابی می‌توان

چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی یافت که

$$p(z) = z, \quad p(y_1) = y_2, p(y_2) = y_3, \ldots, p(y_m) = y_{m+1}$$

(اندیس y_iها را به پیمانه‌ی m در نظر می‌گیریم.)
در صورت لزوم با جمع کردن چندجمله‌ای حاصل از درون‌یابی با $x^k(x-z)(x-y_1)\cdots(x-y_m)$ می‌توان فرض کرد چندجمله‌ای p با خاصیت بالا تکین و از درجه‌ی فرد است. حال برای هر عدد حقیقی x تابع f را صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- **حالت اول.** اگر برای عدد حقیقی x بتوان عدد صحیح نامنفی k یافت که $p^k(x) = y_i$ (منظور k بار ترکیب تابع f است و $f^0(x) = x$ فرض می‌شود) برای یک $1 \le i \le m$، $f(x)$ را برابر y_{i-k} تعریف می‌کنیم (اندیس‌ها به پیمانه‌ی m هستند). توجه کنید که این تعریف ابهامی ندارد، چرا که اگر k کوچک‌ترین عدد صحیح نامنفی باشد که $p^k(x)$ برابر یکی از y_iها مثلاً y_j باشد، برای هر s صحیح نامنفی $p^{k+s}(x) = y_{i+s}$ و چون $(i+s)-(k+s) = i-k$ است، فرقی نمی‌کند که از کدام یک برای تعریف f استفاده کنیم. (به صورت خاص با این تعریف $f(y_i) = y_i$.)

- **حالت دوم.** اگر برای عدد حقیقی x هیچ یک از $p^k(x)$ها برابر y_iها نشود، $f(x)$ را z تعریف می‌کنیم.

ادعا می‌کنیم که این نحوه‌ی تعریف خاصیت مسئله را دارد.

- اگر $f(x) = y_i$، یعنی عدد صحیح نامنفی k و $1 \le j \le m$ وجود دارد که $p^k(x) = y_j$ و $y_{j-k} = y_i$. حال $p^k(p(x)) = p(y_j) = y_{j+1}$ پس $f(p(x)) = y_{j+1-k} = y_{i+1} = p(y_i) = p(f(x))$.

- اگر هم $f(x) = z$ باشد، یعنی $p^k(x)$ها هیچ‌گاه برابر y_iها نمی‌شوند، پس $p^k(p(x)) = p^{k+1}(x)$ها هم هیچ‌گاه برابر y_iها نخواهند بود و بنابراین $f(p(x)) = z = p(z) = p(f(x))$.

به این ترتیب کار به پایان می‌رسد.

سؤال شماره ۷. تعمیر ماشین!

ابتدا چند قرارداد:

اولاً خروجی هر وضعیت را به رنگ آن تعبیر می‌کنیم و دو وضعیت با خروجی یک‌سان را «هم‌رنگ» می‌گوییم.

ثانیاً برای نمایش حروف ورودی از فونت خاصی استفاده می‌کنیم: $I = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \dots\}$.

ثالثاً یک دنباله از حروف ورودی (اعضای I) را یک کلمه می‌گوییم و وضعیتی که پس از وارد کردن کلمه‌ی w از وضعیت s به آن می‌رسیم را با s_w نشان می‌دهیم. مثلاً $s_{\mathfrak{a}} = t(s, \mathfrak{a})$ و اگر $w = \mathfrak{ab}$، $s_w = t(t(s, \mathfrak{a}), \mathfrak{b})$.

۱. از آنجایی که بنابر فرض تابع $o : S \to C$ پوشاست، $n - p$ عددی نامنفی است. حکم را با استقرا روی $n - p$ ثابت می‌کنیم. پایه‌ی استقرا، یعنی $n - p = ۰$ واضح است، چون در این حالت یک تناظر بین وضعیت‌ها و خروجی وجود دارد و در نتیجه بدون وارد کردن هیچ حرفی، می‌توان وضعیت ماشین را با مشاهده‌ی خروجی تشخیص داد.

برای اثبات گام استقرا، به لم زیر احتیاج داریم:

لم. اگر n بیش‌تر از p باشد، دو وضعیت هم‌رنگ s و t و عضوی مانند a از I وجود دارد که s_a و t_a هم‌رنگ نباشند.

اثبات. با توجه به اینکه تعداد رنگ‌ها از تعداد وضعیت‌ها کم‌تر است، دو وضعیت هم‌رنگ متفاوت مانند $\tilde{s}$ و $\tilde{t}$ وجود دارد. بنابر فرض مسأله، کلمه‌ای یافت می‌شود که $\tilde{s}$ و $\tilde{t}$ را از نظر خروجی از هم تفکیک کند. w را کوتاهترین کلمه‌ی با این خاصیت در نظر بگیرید. بنابراین با شروع از $\tilde{s}$ و $\tilde{t}$ و وارد کردن هر کلمه‌ی کوچک‌تر از w، خروجی دستگاه یک‌سان است، ولی خروجی $\tilde{s}_w$ و $\tilde{t}_w$ متفاوت است. حال فرض کنید آخرین حرف w برابر a باشد، یعنی $w = \tilde{w}a$. (a یک متغیر است و نه یک عضو خاص از I، به قراردادمان در ابتدا توجه کنید!) پس اگر قرار دهیم $s = \tilde{s}_{\tilde{w}}$ و $t = \tilde{t}_{\tilde{w}}$، s و t هم‌رنگ هستند ولی $s_a = \tilde{s}_w$ و $t_a = \tilde{t}_w$ هم‌رنگ نیستند. □

در ادامه‌ی استقرا فرض کنید $n - p > ۰$ و حکم برای همه‌ی ماشین‌های با مقدار کم‌تر $n - p$ صادق است. بنابر لم دو وضعیت هم‌رنگ s و t (مثلاً به رنگ $c_۱$) و حرف a وجود دارد که s_a و t_a هم‌رنگ نباشند. ماشین $\tilde{M}$ را با همان وضعیت‌های M، ورودی‌های I و قاعده‌ی تغییر وضعیت در نظر بگیرید که فقط خروجی‌های آن - به صورتی که خواهد آمد - تغییر یافته است. دو عضو c' و c'' بیرون از C (مجموعه‌ی خروجی‌های M) در نظر بگیرید. خروجی وضعیت دل‌خواه u در $\tilde{M}$ را در صورتی که در M رنگی غیر از $c_۱$ داشته باشد، خروجی u در M بگیرید و اگر خروجی آن در M، $c_۱$ باشد، بسته به اینکه رنگ u_a در M برابر s_a باشد، c' و در غیر این‌صورت c'' تعریف کنید. با این تعریف، $\tilde{M}$ یک ماشین با n وضعیت و $p + ۱$ خروجی است که بنابر فرض استقرا حکم برای آن صادق است.

حال دو وضعیت u و v را در نظر بگیرید. می‌دانیم کلمه‌ی w به طول حداکثر $n - p - ۱$ وجود دارد که خروجی u_w و v_w در $\tilde{M}$ یک‌سان نباشد. اگر یکی از u_w و یا v_w به رنگی غیر از c' و c'' باشند، به وضوح خروجی آنها در M هم متفاوت است. در غیر این‌صورت می‌توان فرض کرد u_w به رنگ c' و v_w به رنگ c'' است. با توجه به تعریف رنگ‌ها در $\tilde{M}$، رنگ u_{wa} با s_a یک‌سان است و رنگ v_{wa} با رنگ s_a یک‌سان نیست. پس در هر صورت یکی از کلمات w و یا wa که طول حداکثر $n - p$ دارند، خروجی متفاوتی از u و v می‌گیرند.

۲. فرض کنید بدانیم که وضعیت کنونی ماشین در یک زیرمجموعه‌ی $n_۱$ عضوی $S_۱$ از مجموعه‌ی کل وضعیت‌ها (یعنی S) قرار دارد. در این‌صورت اگر $n_۱$ بیش‌تر از ۱ باشد، $S_۱$ شامل دو عضو مانند s و t است. بنابر قسمت قبل، کلمه‌ای مانند w با طول حداکثر n وجود دارد که s_w و t_w ناهم‌رنگ باشند. پس خروجی دستگاه پس از وارد کردن w با شروع از همه‌ی وضعیت‌های $S_۱$ یک‌سان نیست. حال فرض کنید با دانستن اینکه وضعیت در $S_۱$ است، w را وارد کنیم و خروجی نهایی مثلاً به رنگ c باشد. تمامی وضعیت‌های $S_۱$ که پس از وارد کردن w رنگ c را می‌دهند، زیرمجموعه‌ای اکید مانند

$T = \{t_1, \ldots, t_k\}$ از S_1 هستند، پس وضعیت دستگاه پس از وارد کردن w یکی از وضعیت‌های $T_w = \{(t_1)_w, \ldots, (t_k)_w\}$ است که تعداد کم‌تری از S_1 عضو دارد.
با این ایده می‌توان یک دستورالعمل به طول حداکثر n^2 ارائه کرد که ماشین را از هر وضعیت نامشخصی به یک وضعیت معلوم برساند، به این ترتیب که در هر مرحله با وارد کردن یک کلمه به طول حداکثر n، می‌توان تعداد احتمالاتی که برای وضعیت کنونی ماشین وجود دارد کم‌تر کرد و نهایتاً وضعیت ماشین را مشخص کرد.
برای اثبات کران $\frac{n^2}{2}$ می‌توان از لم زیر و اثباتی کاملاً مشابه با ایده‌ی بالا استفاده کرد.

لم. فرض کنید S_1 زیرمجموعه‌ای n_1 عضوی از وضعیت‌ها باشد. در این‌صورت کلمه‌ای با طول حداکثر $\max(n - n_1 - p + 2, 0)$ وجود دارد که خروجی اعضای S_1 بعد از وارد کردن آن، یک‌سان نیست.

اثبات. حالت خاص $n_1 = 2$ در لم بالا همان قسمت اول سؤال است. برای اثبات حالت کلی لم، مانند قسمت قبل روی $n - p$ استقرا بزنید و بررسی کنید که اگر $n_1 \geq n - p + 2$، چه اتفاقی می‌افتد. $\square$

سؤال شماره ۸. K_n و دیگر هیچ!

جدول $n \times 1$ای در نظربگیرید که در خانه‌های آن به ترتیب از چپ به راست x_1 تا x_n نوشته شده است.

x_1	x_2	$\cdots$		x_n

حال ما به هر کاشی‌کاری از این جدول $n \times 1$ با کاشی‌های 1×1 و 2×1، یک چندجمله‌ای از x_iها را به این صورت نسبت می‌دهیم که برای هر کاشی 2×1 جمع مربع متغیرهای خانه‌های آن و برای کاشی‌های 1×1 تنها متغیر خانه‌ی مربوط به آن را در نظر می‌گیریم. سپس چندجمله‌ای‌های مربوط به کاشی‌های مختلف را در هم ضرب می‌کنیم تا چندجمله‌ای مربوط به آن کاشی‌کاری به دست بیاید. برای مثال در یک جدول 4×1 پنج روش زیر برای کاشی‌کاری وجود دارد.

x_1 x_2	x_3 x_4

x_1 x_2	x_3	x_4

x_1	x_2	x_3 x_4

x_1	x_2 x_3	x_4

x_1	x_2	x_3	x_4

که به ترتیب چندجمله‌ای‌های $(x_1^2+x_2^2)(x_3^2+x_4^2)$، $(x_1^2+x_2^2)x_3x_4$، $x_1x_2(x_3^2+x_4^2)$، $x_1(x_2^2+x_3^2)x_4$ و $x_1x_2x_3x_4$ به این پنج کاشی‌کاری نسبت داده می‌شود. چندجمله‌ای مربوط به کاشی‌کاری جدول $n \times 1$ که به این روش به دست می‌آید را P_n می‌نامیم.

دقت کنید که وقتی $n = 0, 1$ تنها یک روش برای کاشی‌کاری داریم و در نتیجه $P_0 = 1$ و $P_1(x_1) = x_1$. پس برای مقادیر اولیه P_i و K_i یک‌سان هستند. حال ادعا می‌کنیم که P_i و K_i در یک رابطه‌ی بازگشتی صدق می‌کنند. دقت کنید که اگر در یک کاشی‌کاری جدول nخانه‌ای، خانه‌ی آخر به تنهایی یک کاشی باشد، جمله‌ی x_n در همه‌ی چندجمله‌ای‌های مربوط به کاشی‌کاری‌های $n-1$تایی ضرب می‌شود و اگر این خانه در یک کاشی 2×1 قرار بگیرد، جمله‌ی $x_{n-1}^2 + x_n^2$ برای این کاشی در همه‌ی چندجمله‌هایی مربوط به کاشی‌کاری‌های جدول $n-2$تایی ضرب می‌شود. یعنی $P_n = x_nP_{n-1} + (x_n^2 + x_{n-1}^2)P_{n-2}$. پس P_n و Q_n با هم همیشه برابر هستند.

اما دقت کنید که قرینه‌کردن هر کاشی‌کاری نسبت به محور تقارن جدول ما را به کاشی‌کاری جدید می‌رساند، که چندجمله‌ای مربوط به آن کاشی‌کاری جدید از جابه‌جا کردن x_i با x_{n-i} در چندجمله‌ای کاشی‌کاری اولیه به دست می‌آید. اما دقت کنید که با این قرینه کردن مجموعه‌ی همه‌ی کاشی‌کاری‌ها را تغییر نمی‌دهد و بنابراین باید چندجمله‌ای $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ با $P_n(x_n, \ldots, x_2, x_1)$ یک‌سان باشد و بنابراین حکم مسئله به اثبات می‌رسد.