# سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
# سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۳۰ بهمن ۱۳۹۳ و با شرکت ۱۷۶۲۷ نفر از دانش‌آموزان پایه‌های اول، دوم و سوم دبیرستان در سراسر کشور برگزار گردید. دفترچه‌ی پیش رو مجموعه‌ی سؤالات و پاسخ‌های تشریحی این آزمون است که توسط وب‌گاه المپیاد ریاضی ایران تهیه و منتشر می‌گردد.

زمان: ۲۱۰ دقیقه

تعداد سؤالات: ۳۰

# سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
# سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

---

**۱.** در آزادراه زنجان-تبریز از ساعت ۸ صبح تا ۱۰ صبح ۲۳۷۰ خودرو از عوارضی عبور کرده‌اند که همهٔ آن‌ها تک‌سرنشین یا دو سرنشین بوده‌اند. این خودروها در مجموع ۱۸۳۲۰ لیتر بنزین در مسیر مصرف کرده‌اند. می‌دانیم هر خودروی تک‌سرنشین، ۷ لیتر و هر خودروی دوسرنشین، ۸ لیتر بنزین در این مسیر مصرف کرده است. تعداد کل خودروهای تک‌سرنشین چند تاست؟

۱) ۳۲۰     ۲) ۴۸۰     ۳) ۶۴۰     ۴) ۱۰۵۰     ۵) ۱۱۸۵

**راه حل:**

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

فرض کنید تعداد خودروهای تک سرنشین و دو سرنشین را به ترتیب با $x$ و $y$ نشان دهیم در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x + y = ۲۳۷۰ \\ ۷x + ۸y = ۱۸۳۲۰ \end{cases} \Rightarrow ۷x + ۸(۲۳۷۰ - x) = ۱۸۳۲۰ \Rightarrow ۱۸۹۶۰ - x = ۱۳۳۲۰ \Rightarrow x = ۶۴۰$$

**۲.** در مثلث متساوی‌الساقین $ABC$ که در آن $AB = AC$، نقاط $X$ و $Y$ روی پاره‌خط $AC$ طوری قرار گرفته‌اند که $X$ بین $A$ و $Y$ قرار دارد و به علاوه $BY = AX = BX$. اگر $\angle YBC = ۱۰^\circ$، زاویهٔ $\angle BAC$ چند درجه است؟

۱) $\frac{۹۵}{۳}$     ۲) ۳۸     ۳) ۴۰     ۴) ۴۱     ۵) $\frac{۱۸۵}{۴}$

**راه حل:**

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

همانند شکل زیر فرض کنید $\angle BAX = \alpha$ . می‌دانیم $AX = BX$ پس زاویه‌ی $\angle ABX = \alpha$ می شود از طرفی زاویه‌ی $BXC$ زاویه‌ی خارجی مثلث $ABX$ است پس $\angle BXC = ۲\alpha$

طبق فرض مسئله می‌دانیم $BX = BY$ پس زاویه‌ی $\angle BYA = ۲\alpha$ است.

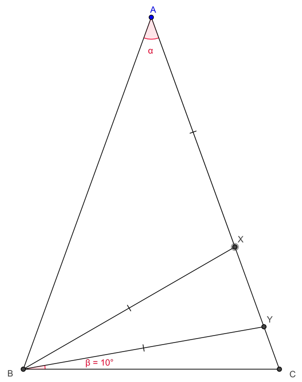
در مثلث $ABC$ می‌دانیم:

$$\angle BAX = \alpha, AB = AC \Rightarrow \angle ACB = \angle ABC = ۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}$$

در مثلث $BYC$ زاویه‌ی $BYA$ زاویه‌ی خارجی است پس خواهیم داشت:

$$\angle YBC + \angle YCB = \angle BYA \Rightarrow ۱۰^\circ = \angle YBC = ۲\alpha - (۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}) \Rightarrow \alpha = ۴۰^\circ$$

# سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
# سی و سومین المپیاد ریاضی کشور




شکل ۱

**۳.** $x$ و $y$ دو عدد حقیقی هستند که $۲^{x+۱} = ۱۸$ و $۳^{-y} = ۲$. مقدار $xy$ چقدر است؟

۱) $-۲$ ۲) $-۱$ ۳) ۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$ ۵) $\frac{۱}{۲}$

**راه حل:**

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

چون $۲^{x+۱} = ۱۸$، نتیجه می‌گیریم که $۲^x = ۹$، پس

$$۲^x = ۹ \Rightarrow ۲^{xy} = ۹^y = (۳^y)^۲ = \frac{۱}{۴} = ۲^{-۲} \Rightarrow xy = -۲$$

می‌توان با لگاریتم گرفتن از دو رابطه‌ی بالا راه‌حل مشابهی برای مسئله ارائه کرد.

**۴.** چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۳۹۳ مثل $a$ وجود دارد که $\underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{a \text{ بار}}$ مربع کامل باشد؟

۱) ۳۷ ۲) ۶۹۶ ۳) ۷۱۵ ۴) ۷۳۳ ۵) ۷۳۴

**راه حل:**

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

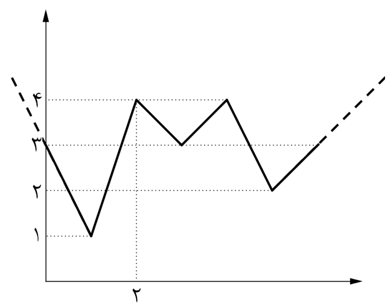
دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت (۱): $a$ عددی زوج است. در این حالت، عدد مذکور حتماً مربع کامل است زیرا برابر است با $a$ به توان عددی زوج. تعداد اعداد زوج کوچک‌تر از ۱۳۹۳ برابر است با ۶۹۶.

حالت (۲): $a$ عددی فرد است. در این حالت، عدد مذکور برابر است با $a$ به توان عددی فرد، پس تنها در صورتی مربع کامل است که خودِ $a$ مربع کامل باشد. تعداد اعداد فرد مربع کامل کوچک‌تر از ۱۳۹۳ برابر است با ۱۹.

بنابراین تعداد $a$ های با خاصیت مورد نظر، برابر است با ۱۹ + ۶۹۶ = ۷۱۵.

**۵.** نمودار تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را در پایین می‌بینید. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی صعودی است که برای هر عدد حقیقی $x$، $g(x) \leq f(x)$. حداکثر مقدار $g(۲)$ کدام است؟




۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳
۵) ۴

**راه حل:**

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

با توجه به صعودی بودن تابع $g$، برای هر $x \geq ۲$، باید $g(x) \geq g(۲)$ و بنابراین $f(x) \geq g(۲)$. اما دقت کنید که کم‌ترین مقدار $f$ برای $x$های بیش‌تر یا مساوی مربوط به $x = ۵$ است که مقدار $f(x)$ برابر ۲ می‌باشد. این موضوع نتیجه می‌دهد که حداکثر مقدار $g(۲)$ برابر ۲ است. ضمناً به وضوح تابع صعودی زیر هم همه‌ی شرط‌های مسئله را برآورده می‌کند:

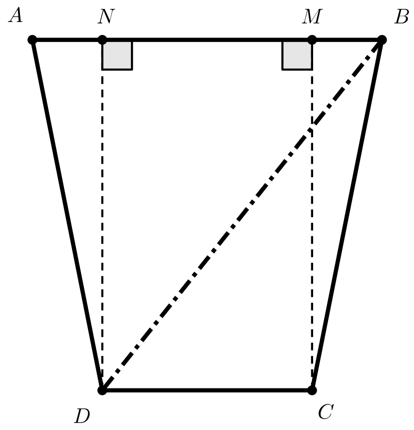
$$g(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۲ \\ ۲ & ۲ \leq x \leq ۵ \\ f(x) & ۵ \leq x \end{cases}$$

**۶.** در شهر نیستان قیمت نی‌ها با افزایش طول نی زیاد می‌شود. تاجری در شکرستان قصد وارد کردن نی از نیستان را دارد. در شکرستان لیوان‌ها به شکل مخروط ناقص با ارتفاع ۱۶ سانتی‌متر، قطر دهانهٔ ۱۰ سانتی‌متر و قطر انتهای ۶ سانتی‌متر هستند. تاجر قصد دارد کم‌ترین پول را خرج کند ولی با توجه به قوانین شکرستان به هیچ وجه نی نباید کاملاً داخل لیوان قرار گیرد. اندازهٔ نی‌هایی که او می‌خرد چقدر است؟ (از قطر نی صرف نظر می‌کنیم، یعنی نی را یک پاره‌خط فرض می‌کنیم.)

۱) $۲\sqrt{۷۳}$ ۲) $۲\sqrt{۸۹}$ ۳) $۸\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۸۷}$ ۵) $۱۰\sqrt{۳}$

**راه حل:**

گزینهٔ (۳) صحیح است.




در شکل بالا مقطعی از لیوان رسم شده است. در این شکل $AB$ دهانه و $CD$ انتهای لیوان است. نی‌هایی که تاجر می‌خرد از طرفی باید کم‌ترین طول را داشته باشند، و از طرف دیگر نباید به طور کامل در لیوان قرار بگیرند. در نتیجه این نی‌ها باید مانند پاره‌خط $BD$ روی لبهٔ لیوان قرار بگیرند.

$$AN + MB = AB - MN = AB - CD = ۱۰ - ۶ = ۴$$

پس طبق تقارن شکل حول محور عمودی داریم $AN = MB = ۲$. برای محاسبهٔ $BD$ از قضیهٔ فیثاغورس استفاده

می‌کنیم.

$$BD^2 = BN^2 + ND^2 = (2+6)^2 + 16^2 = 8\sqrt{5}$$

**۷.** مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 10\}$ چند زیرمجموعهٔ ناتهی دارد که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن ۶ باشد؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶ ۵) ۱۰۲۴

**راه حل:**

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

برای انتخاب یک زیرمجموعه از $\{1, 2, \cdots, 10\}$ که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن ۶ است، ابتدا کوچکترین عضو را انتخاب می‌کنیم. این کار ۴ حالت دارد چرا که کوچکترین عضو می‌تواند یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، یا ۴ باشد. فرض کنید کوچکترین عضو را $m$ بنامیم. پس بزگترین عضو برابر $m+6$ خواهد بود. برای انتخاب دیگر اعضای زیرمجموعه، ۳۲ حالت داریم چرا که دیگر اعضا، زیرمجموعه‌ای دلخواه از $\{m+1, m+2, m+3, m+4, m+5\}$ هستند. پس در کل $4 \times 32 = 128$ حالت برای انتخاب این‌گونه مجموعه‌ها داریم.

**۸.** کشور شکرستان از سه استان نمکستان، فلفلستان و سماقستان تشکیل شده‌است که به ترتیب ۱۰، $n$ و $2n$ شهر دارند. می‌دانیم تعداد شهروندان در شهرهای مختلف این کشور یک‌سان است و جمعیت کل کشور $n^2+n+1$ نفر است. عدد $n$ در کدام یک از محدوده‌های زیر قرار دارد؟

۱) ۱ تا ۱۰ ۲) ۱۱ تا ۲۰ ۳) ۲۱ تا ۳۰ ۴) ۳۱ تا ۴۰ ۵) ۴۱ تا ۵۰

**راه حل:**

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

فرض کنید جمعیت هر شهر $k$ نفر باشد. پس باید

$$n^2 + n + 1 = (3n+10)k$$

بنابراین

$$\left.\begin{array}{r} 3n+10 \mid n^2+n+1 \quad \Rightarrow 3n+10 \mid 3n^2+3n+3 \\ 3n+10 \mid 3n^2+10n \end{array}\right\} \Rightarrow 3n+10 \mid 7n-3$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow 3n+10 \mid 21n-9 \\ 3n+10 \mid 21n+70 \end{array}\right\} \Rightarrow 3n+10 \mid 79$$

و چون ۷۹ عددی اول است و $3n+10>1$ پس باید $3n+10=79$ و در نتیجه $n=23$.

**۹.** $ABCD$ ذوزنقه‌ای است که در آن $AB||CD$ و $CD=3AB$. نقاط $M$ و $N$ به ترتیب وسط اضلاع $BC$ و $CD$ هستند و مساحت ذوزنقه ۳۲ است. مساحت مثلث $AMN$ چه‌قدر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵ ۵) ۱۶

**راه حل:**

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

اگر مساحت مثلث $ABC$ را برابر $S_1$ و مساحت مثلث $ACD$ را برابر $S_2$ قرار دهیم و طبق فرض مسئله می‌دانیم $S_1+S_2=32$ است.

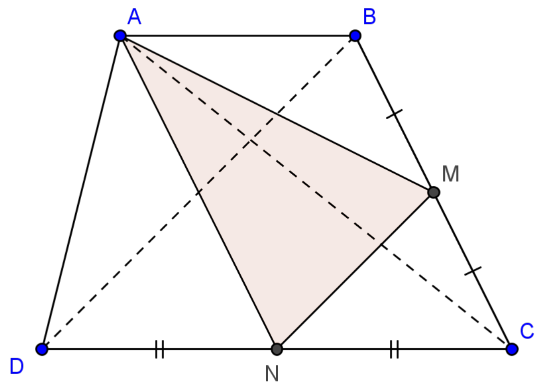
مساحت مثلث $ABM$ نصف مساحت مثلث $ABC$ است زیرا دارای ارتفاع یکسان هستند ولی قائده‌ی مثلث $ABM$ نصف قائده‌ی $ABC$ است پس مساحتش برابر $\frac{S_1}{2}$ است به طور مشابه مساحت مثلث $AND$ نصف $ACD$ است پس برابر $\frac{S_2}{2}$ است.

جمع مساحت‌های مثلث‌های $ABD$ و $BCD$ برابر کل ذوزنقه و برابر ۳۲ است ولی مساحت مثلث $BCD$ سه برابر مساحت مثلث $ABD$ است زیرا دارای ارتفاع یکسان هستند ولی قائده‌ی مثلث $BCD$ که ضلع $CD$ باشد سه برابر قائده‌ی مثلث $ABD$ یعنی $AB$ است. پس مساحت مثلث $BCD$ برابر ۲۴ است. در مثلث $BCD$ داریم:

$$\frac{CM}{CB}=\frac{CN}{CD}=\frac{1}{2}$$

پس با استفاده از قضیه تالس مثلث $CMN$ با نسبت تشابه $\frac{1}{2}$ با مثلث $CBD$ متشابه است پس مساحت مثلث $CMD$ ربع مساحت مثلث $CBD$ است که برابر ۶ می‌شود.

جمع مساحت مثلث‌های $ABM$ ، $AND$ و $CMN$ برابر با $\frac{S_1+S_2}{2}+6=16+6=22$ است پس مساحت باقی مانده از مساحت کل همان مساحت مثلث $AMN$ است که برابر $32-22=10$ می‌شود.




شکل ۲

**۱۰.** برای چند مقدار صحیح $n$ دو چندجمله‌ای $x^۳ + nx - ۱$ و $x^۳ + x - n^۲$ ریشهٔ حقیقی مشترک دارند؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) بی‌نهایت

**راه حل:**

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

اگر $x_۰$ ریشه‌ی حقیقی مشترک دو چندجمله‌ای $x^۳ + nx - ۱$ و $x^۳ + x - n^۲$ باشد، باید ریشه‌ی تفاضل آن‌ها نیز باشد، یعنی

$$(x_۰ - n^۲) - (nx_۰ - ۱) = x_۰(۱ - n) + (۱ - n)(۱ + n) = (۱ - n)(x_۰ + n + ۱) = ۰$$

پس یا $n = ۱$ و یا $x_۰ = -n - ۱$. اگر $n = ۱$ باشد، این دو چندجمله‌ای یک‌سان هستند و همه‌ی ریشه‌های آن‌ها یکی است. ضمناً چون چندجمله‌ای درجه سوم حتماً ریشه‌ی حقیقی دارد، این دو ریشه‌ی حقیقی مشترک خواهند داشت.

اما اگر $x_۰ = -n - ۱$.

$$(-n - ۱)^۳ + (-n - ۱) - n^۲ = ۰ \Rightarrow n^۳ + ۴n^۲ + ۴n + ۲ = ۰$$

چون $n$ صحیح است، با توجه به رابطه‌ی بالا باید زوج باشد، یعنی عدد صحیح $m$ باشد که $n = ۲m$. با جای‌گزین کردن این رابطه در بالا به دست می‌آید که:

$$۸m^۳ + ۱۶m^۲ + ۸m + ۲ = ۰ \Rightarrow ۴m^۳ + ۸m^۲ + ۴m + ۱ = ۰$$

که تساوی آخر به دلیل زوج بودن سمت راست و فرد بودن سمت چپ امکان ندارد. پس در این حالت دو معادله ریشه‌ی مشترکی ندارند.

**۱۱.** حداکثر چند مثلث غیر هم‌نهشت وجود دارد که طول اضلاع آن‌ها از بین اعداد ۱، ۲، ۴، ۸ و . . .، $۲^{۱۰}$ باشند؟ (طول اضلاع می‌توانند با هم برابر باشند.)

۱) ۵۵ ۲) ۶۶ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰ ۵) ۱۶۵

**راه حل:**

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

توجه کنید که اعداد داده شده توان‌های دو هستند و نیز شرط لازم و کافی برای اینکه بتوان با سه طول داده شده مثلث ساخت این است که در نامساوی مثلث صدق کنند یعنی جمع دو طول کمتر بیش از بیشترین طول باشد. اکنون فرض کنید سه طول مورد نظر $۲^x$ و $۲^y$ و $۲^z$ باشند که $x \geq y \geq z$ در این صورت اگر $x > y$ خواهیم داشت:

$$۲^z + ۲^y \leq ۲^y + ۲^y = ۲^{y+۱} \leq ۲^x$$

بنابراین سه طول داده شده تشکیل مثلث نمی‌دهند پس باید $x = y$ باشد یعنی مثلث‌ها فقط می‌توانند متساوی الساقین باشند و به علاوه $z$ می‌تواند هرکدام از اعداد ۰ تا $x$ باشد که هرکدام مثلثی جدید می‌شود. یعنی $x + ۱$ مثلث با طول بزرگترین ضلع $۲^x$ داریم و $۰ \leq x \leq ۱۰$. پس در کل

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۱۱ = ۶۶$$

مثلث غیر هم‌نهشت وجود دارد.

**۱۲.** برای عدد طبیعی $n$ چندجمله‌ای $P_n(x)$ را برابر $(x+n)^۲$ تعریف می‌کنیم. می‌دانیم

$$P_{۱۳۹۳}\left(P_{۱۳۹۲}\left(\ldots\left(P_۱(x)\right)\ldots\right)\right)$$

یک چندجمله‌ای از درجهٔ $۲^{۱۳۹۳}$ است. ضریب $x^{۲^{۱۳۹۳}-۱}$ در این چندجمله‌ای برابر کدام است؟

۱) ۰ ۲) $۲^{۱۳۹۲}$ ۳) $۲^{۱۳۹۲}+۱$ ۴) $۲^{۱۳۹۳}-۱$ ۵) $۲^{۱۳۹۳}$

**راه حل:**

گزینه‌ی (۵) صحیح است.

به استقرا روی $n$ نشان می‌دهیم که $Q_n(x) = P_n(P_{n-1}(\cdots(P_1(x))\cdots))$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $2^n$ است که ضریب جملات $x^{2^n}$ و $x^{2^n-1}$ در آن به ترتیب ۱ و $2^n$ هستند.

در مورد $P_1(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ که همه‌ی نکات فوق درست هستند. حالت فرض کنید که احکام بالا تا $n$ درست باشد یعنی:

$$Q_n(x) = x^{2^n} + 2^n x^{2^n-1} + \cdots$$

حال

$$Q_{n+1}(x) = P_{n+1}(Q_n(x)) = (x^{2^n} + 2^n x^{2^n-1} + \cdots + n)^2 = x^{2^{n+1}} + 2(x^{2^n})(2^n x^{2^n-1}) + \cdots$$

دقت کنید که مابقی جملات نمی‌توانند منجر به جمله‌های با درجه‌ی $2^n$ و یا $2^n - 1$ شوند.

پس عدد خواسته شده در صورت مسئله برابر $2^{1393}$ خواهد بود.

**۱۳.** فرض کنید $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$ و $B = \{1, 2, \ldots, 100\}$. تعداد توابع $f : A \to B$ را بیابید که برای هر دو عدد طبیعی $m$ و $n$ که $2 \le m, n \le 10$ و $mn \le 10$، رابطهٔ $f(mn) = mf(n)$ برقرار باشد.

۱) $10^2$ ۲) $10^3$ ۳) $10^4$ ۴) $10^5$ ۵) $2 \times 10^5$

**راه حل:**

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

همه‌ی زوج‌های مرتب $(m, n)$ که در شرایط $2 \le m, n \le 10$ و $mn \le 10$ صدق می‌کنند عبارتند از

$$(2,3), (2,4), (2,5), (3,2), (3,3), (4,2), (5,2)$$

که بنابر خاصیت تابع $f$، این روابط را به دست می‌آوریم

$$f(6) = 2f(3), f(8) = 2f(4), f(10) = 2f(5), f(6) = 3f(2),$$

$$f(9) = 3f(3), f(8) = 4f(2), f(10) = 5f(2)$$

با توجه به روابط بالا، اگر مقدار $f(2)$ را مشخص کنیم، مقادیر $f(n)$ به ازای $n = 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$ مشخص می‌شود. در واقع اگر قرار دهیم $a = f(2)$، به دست می‌آوریم.

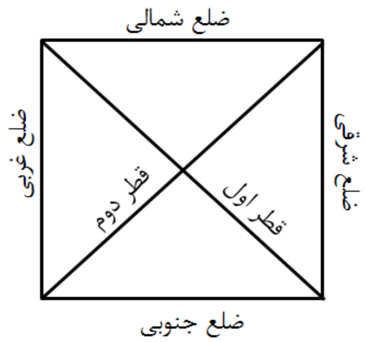
$$f(3) = 3a/2, f(4) = 2a, f(5) = 5a/2, f(6) = 3a, f(8) = 4a, f(9) = 9a/2, f(10) = 5a$$

و در نتیجه $a$ عددی طبیعی و زوج است و از آن‌جا که همه‌ی اعداد بالا باید عضو مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۱۰۰\}$ باشند، باید $a \leq ۲۰$.

برعکس، اگر $f(۲)$ هر عدد طبیعی زوج و کوچکتر یا مساوی ۲۰ باشد و مقادیر $f(n)$ را برای $n = ۳, ۴, ۵, ۶, ۸, ۹, ۱۰$ طبق روابط بالا تعیین کنیم و سپس مقدار $f(۱)$ و $f(۷)$ را نیز به دلخواه از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۱۰۰\}$ انتخاب کنیم، تابع حاصل در شرایط مسأله صدق می‌کند. پس برای $f(۲)$، ۱۰ انتخاب وجود دارد و برای $f(۱)$ و $f(۷)$ نیز هر کدام ۱۰۰ انتخاب وجود دارد. بنابراین تعداد توابع مطلوب برابر است با

$$۱۰ \times ۱۰۰ \times ۱۰۰ = ۱۰^{۵}$$

**۱۴.** پادشاه شکرستان که قصری به شکل مربع دارد، به تازگی کتیبه‌ای به خط نمکی مربوط به یکی از اجدادش پیدا کرده که ریاضی‌دان بوده است. پس از ترجمهٔ کتیبه توسط زبان‌شناسان مشخص شد که در نقطه‌های مختلفی از شهر، گنج‌هایی وجود دارد. ترجمهٔ کتیبه را در زیر می‌بینید.



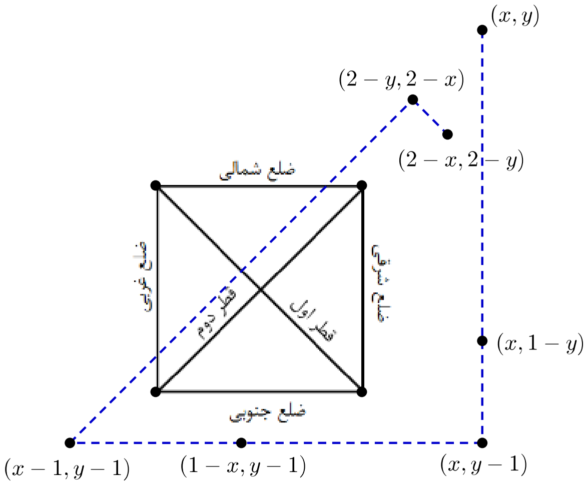

گنج‌ها در نقطه‌هایی از شهر پنهان گشته‌اند که اگر هر کدام از آن‌ها را به ترتیب نسبت به ضلع شمالی، ضلع جنوبی، ضلع شرقی، ضلع غربی، قطر اول و در نهایت قطر دوم قصر قرینه کنیم به جای اول بازگردد.

چند گنج در شهر پنهان شده است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) ۸

**راه حل:**

گزینهٔ (۲) صحیح است.




فرض کنید راس‌های مربع در نقاط $(0,0)$، $(1,0)$، $(0,1)$ و $(1,1)$ واقع باشند. در شکل روبرو با شروع از نقطهٔ دل‌خواه $(x, y)$ مختصات نقاط به دست آمده بعد از هر تقارن را مشخص کرده‌ایم. برای این‌که نقطهٔ آخر بر نقطهٔ اول منطبق شود باید داشته باشیم $x = 2 - x$ و $y = 2 - y$. پس دقیقاً یک نقطه با این خاصیت وجود دارد.

**۱۵.** مهندس شش‌دیواری قصد دارد نقشه‌ی خانه‌ای با شش دیوار را طراحی کند. او می‌خواهد سه تا از دیوارها در امتداد شمالی-جنوبی و با طول‌های ۲، ۴ و ۶ متر باشند و سه تا از دیوارها نیز در امتداد شرقی-غربی و با طول‌های ۴، ۶ و ۱۰ متر باشند. او چند نقشه‌ی مختلف با این ویژگی‌ها می‌تواند بکشد؟

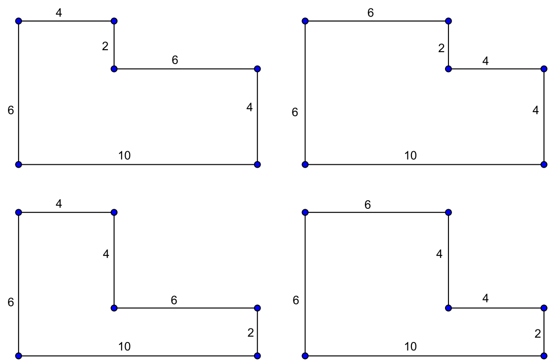
۱) ۸      ۲) ۱۲      ۳) ۱۶      ۴) ۲۰      ۵) ۲۴

**راه حل:**

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

در نقشه‌ی ساختمان، ابتدا دیوار با طول ۱۰ را ثابت در نظر می‌گیریم. از آنجایی که دیوارها یکدیگر را قطع نمی‌کنند، دو دیوار افقی با طول‌های ۴ و ۶، هر دو یا در بالا و یا در پایین دیوار با طول ۱۰ هستند. فرض کنید دیوارهای افقی با طول‌های ۴ و ۶، هر دو در بالای دیوار با طول ۱۰ باشند. پس به خاطر تقارن موجود، در نهایت تعداد حالات را در ۲ ضرب خواهیم کرد. به همین ترتیب دیوارهای عمودی به طول‌های ۲ و ۴، هر دو یا در چپ و یا در راست دیوار عمودی به طول ۶ قرار دارند. باز هم فرض می‌کنیم این دو دیوار سمت راست دیوار عمودی به طول ۶ قرار داشته باشند و جواب این حالت را نیز در ۲ ضرب خواهیم کرد.

با این مفروضات برای چیدن دو دیوار افقی به طول‌های ۴ و ۶، و دو دیوار عمودی به طول‌های ۲ و ۴، با توجه به این که دیوار افقی با طول ۴ بالاتر باشد یا دیوار افقی با طول ۶ و این که دیوار عمودی با طول ۲ راست‌تر باشد یا دیوار عمودی با طول ۴، چهار حالت مختلف معتبر خواهیم داشت که در شکل زیر مشخص‌اند.




پس در کل $۱۶ = ۴ \times ۲ \times ۲$ حالت خواهیم داشت.

**۱۶.** می‌دانیم عددی طبیعی در مبنای دو، ۳۰ رقمی است. در مورد تعداد ارقام این عدد در مبنای سه چه می‌توان گفت؟

۱) حتماً ۱۸ رقمی است.

۲) حتماً ۱۹ رقمی است.

۳) حتماً ۲۰ رقمی است.

۴) برای بعضی اعداد ۱۸ رقمی و برای بعضی ۱۹ رقمی است.

۵) برای بعضی اعداد ۱۹ رقمی و برای بعضی ۲۰ رقمی است. **راه حل:**

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

از آنجایی که این عدد در مبنای دو، ۳۰ رقمی است، پس حداقل $۲^{۲۹}$ و حداکثر $۲^{۳۰} - ۱$ است.

داریم

$$۲^{۲۹} = ۲^{۲۴} \times ۲^{۵} = (۲^{۸})^{۳} \times ۲^{۵} = (۲۵۶)^{۳} \times ۳۲ > (۲۴۳)^{۳} \times ۲۷ = ۳^{۱۵} \times ۳^{۳} = ۳^{۱۸}$$

پس $۲^{۲۹}$ حداقل در مبنای ۳ حداقل ۱۹ رقمی است.

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} ۲^{۳۰} &= ۲^{۱۱} \times ۲^{۱۱} \times ۲^{۸} = ۲۰۴۸ \times ۲۰۴۸ \times ۲۵۶ \\ &= \left(۲۰۴۸ \times \sqrt{۱/۱}\right) \times \left(۲۰۴۸ \times \sqrt{۱/۱}\right) \times \frac{۲۵۶}{۱/۱} \\ &< \left(۲۰۴۸ \times ۱/۰۵\right) \times \left(۲۰۴۸ \times ۱/۰۵\right) \times \frac{۲۵۶}{۱/۱} \qquad (۱) \\ &< ۲۱۶۰ \times ۲۱۶۰ \times ۲۴۰ < ۲۱۸۷ \times ۲۱۸۷ \times ۲۴۳ \\ &= ۳^{۷} \times ۳^{۷} \times ۳^{۵} = ۳^{۱۹} \end{aligned}$$

پس $۲^{۳۰} - ۱$ از $۳^{۱۹} - ۱$ کمتر بوده و در نتیجه این عدد حداکثر ۱۹ رقمی است.

پس هر عدد که در مبنای دو، ۳۰ رقمی است، در بازه‌ی $[۲^{۲۹}, ۲^{۳۰} - ۱]$ قرار داشته و با توجه به آنچه گفته‌شد، ۱۹ رقم دارد.

**۱۷.** عدد صحیح $n$ را «نه چندان بزرگ» می‌گوییم هرگاه برای هر دو عدد مثبت $x$ و $y$ که $(x + ۱)(y + ۱) = ۲$، داشته باشیم $xy + \frac{۱}{xy} \geq n$. بزرگ‌ترین عدد نه چندان بزرگ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۷

**راه حل:**

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

برای هر دو عدد حقیقی $x$ و $y$ می‌دانیم که $(x - y)^{۲} \geq ۰$ و این یعنی $(x + y)^{۲} \geq ۴xy$. حال اگر $x$ و $y$ در رابطه‌ی $(x + ۱)(y + ۱) = ۲$ صدق کنند داریم:

$$xy + x + y = ۱ \Rightarrow (۱ - xy)^{۲} \geq ۴xy \Rightarrow (xy)^{۲} + ۱ \geq ۶xy \Rightarrow xy + \frac{۱}{xy} \geq ۶$$

از طرف دیگر برای این که در این نابرابر تساوی اتفاق بیفتد باید $x = y$ باشد که شرط $(x + ۱)(y + ۱) = ۲$ نتیجه می‌دهد که $x = y = \sqrt{۲} - ۱$ در این حالت:

$$xy + \frac{۱}{xy} = (\sqrt{۲} - ۱)^{۲} + \frac{۱}{(\sqrt{۲} - ۱)^{۲}} = ۳ - ۲\sqrt{۲} + ۳ + \sqrt{۲} = ۶$$

**۱۸.** رئوس یک پنج‌ضلعی محدب را به ترتیب ساعت‌گرد $A, B, C, D, E$ می‌نامیم. می‌دانیم $\angle BAE = ۲\angle DAC = ۹۳^{\circ}$ و $\angle BCA = \angle CDA$ و $\angle DCA = \angle EDA$. اگر $AD = ۲\sqrt{۳}$ و $AC = ۲$ آن‌گاه مقدار $\frac{AE}{AB}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{۲}\sin ۹۳^\circ$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۴) $۳\sin ۹۳^\circ$ ۵) ۳

**راه حل:**

گزینه‌ی (۵) صحیح است.

مطابق فرض مسئله می‌دانیم

$$\angle EAB = ۲\angle DAC \Rightarrow \angle EAD + \angle CAB = \angle DAC$$

نقطه‌ی $X$ را مطابق شکل روی ضلع $DC$ طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\angle XAC = \angle EAD$$

$$\angle DAX = \angle CAB$$

دو مثلث $XAC$ و $EAD$ متشابه هستند زیرا

$$\angle ACX = \angle ADE, \angle EAD = \angle XAC$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{EA}{AX} = \frac{AD}{AC}(۱)$$

همچنین دو مثلث $XAD$ و $BAC$ متشابه هستند زیرا

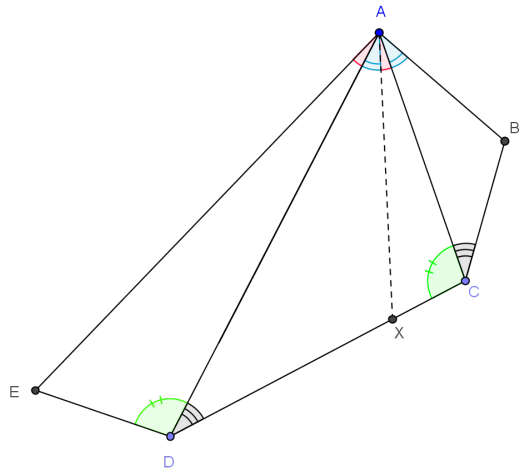
$$\angle ADX = \angle ACB, \angle DAX = \angle CAB$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{AX}{AB} = \frac{AD}{AC}(۲)$$

در نهایت اگر رابطه‌ی اول را در رابطه‌ی دوم ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{EA}{AB} = (\frac{AD}{AC})^۲ = ۳$$




شکل ۳

**۱۹.** $x$ و $y$ دو عدد حقیقی هستند که $\sin(x)+\cos(y)=۱$. بیش‌ترین مقدار $\sin(y)+\cos(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۵) ۲

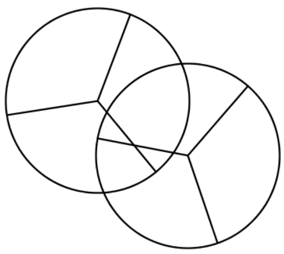
**راه حل:**

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\begin{aligned}
۱+(\sin(y)+\cos(x))^۲ &= (\sin(x)+\cos(y))^۲+(\sin(y)+\cos(x))^۲ \\
&= \sin^۲(x)+\cos^۲(x)+\sin^۲(y)+\cos^۲(y) \\
&\quad +۲(\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)) \\
&= ۲+۲\sin(x+y) \\
&\leq ۴
\end{aligned}$$

پس $|\sin(y)+\cos(x)|\leq\sqrt{۳}$. یعنی حداکثر مقدار ممکن برای $\sin(y)+\cos(x)$ همین $\sqrt{۳}$ است. از سوی دیگر برای تساوی اگر $x=\frac{\pi}{۶}$ و $y=\frac{\pi}{۳}$ باشد، داریم

$$\sin(x)+\cos(y)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱,\quad \sin(y)+\cos(x)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$



**۲۰.** دو صفحهٔ پلاستیکی شفاف و رنگی به شکل دو دایرهٔ برابر داریم که هر کدام از آن‌ها توسط سه شعاع با زاویه‌های $120^\circ$، به سه قسمت برابر تقسیم شده‌اند. قسمت‌ها دارای رنگ‌های متفاوت هستند. هرگاه دو رنگ روی هم قرار گیرند، رنگی جدید ایجاد می‌شود و رنگ‌های ترکیبی ایجاد شده نیز با یک‌دیگر متفاوت‌اند. مثلاً در شکل رو به رو ۱۰ رنگ مختلف به وجود آمده است.

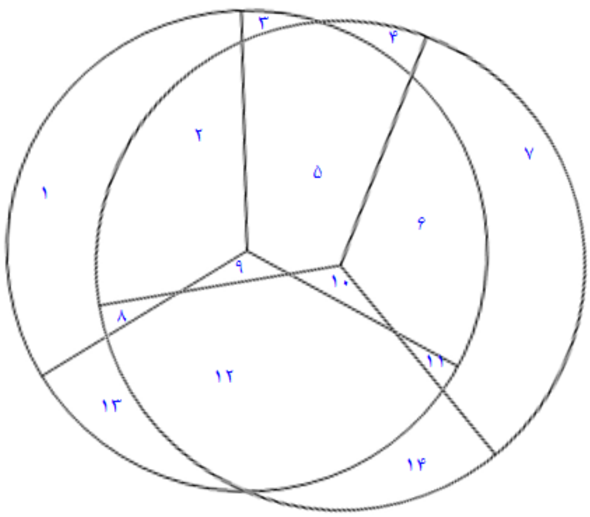
حداکثر تعداد رنگ‌های مختلفی که در یک وضعیت قرار گرفتن صفحه‌ها می‌تواند به وجود بیاید چند تاست؟

۱) ۱۱　　۲) ۱۲　　۳) ۱۳　　۴) ۱۴　　۵) ۱۵

**راه حل:**

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

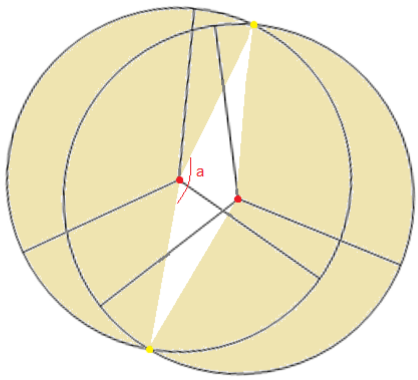
در ابتدا ۶ رنگ داریم و برای ایجاد هر رنگ جدید باید یک رنگ از یک صفحه بر روی رنگی از صفحه‌ی دیگر قرار گیرد و چون هر صفحه ای سه رنگ دارد این کار به $3 \times 3$ طریق ممکن است. بنابراین حداکثر ۹ رنگ جدید ایجاد می‌شود. پس نمی‌توان بیش از ۱۵ رنگ به وجود آورد. به علاوه در شکل زیر مثالی که در آن ۱۴ رنگ به وجود آمده را مشاهده می‌کنید:




شکل ۱

در ادامه ثابت می‌کنیم چرا به وجود آوردن ۱۵ رنگ نیز غیر ممکن است. توجه کنید که اگر مراکز دو صفحه روی هم

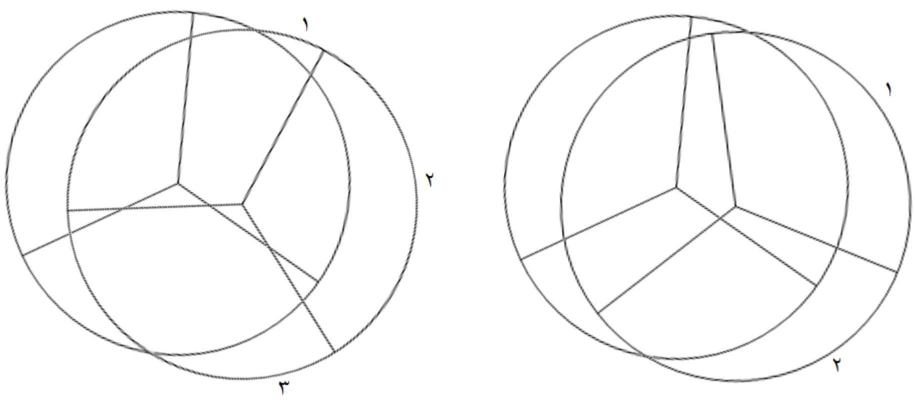
قرار گیرد رنگ های ابتدایی از بین می‌روند و اگر دو دایره هم‌دیگر را قطع نکنند ۶ رنگ خواهیم داشت. بنابراین در ادامه فرض می‌کنیم دو دایره در دو نقطه متقاطع اند پس روی هرکدام از دو دایره دو کمان تشکیل می‌شود که یکی درون دایره‌ی دیگر است و یکی بیرون آن و می‌دانیم طول کمان بیرونی بیشتر از کمان درونی است.




شکل ۲

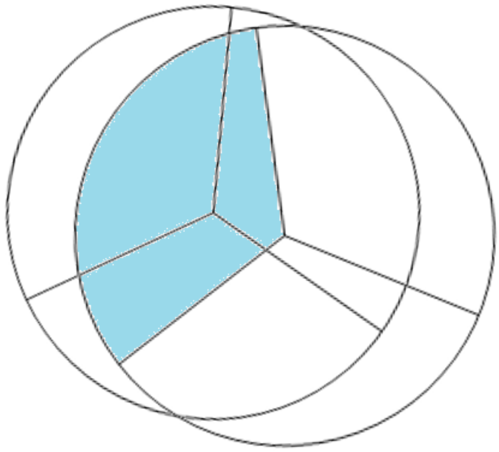
در واقع همان‌طور که در شکل بالا مشاهده می‌کنید مراکز دوصفحه و دونقطه‌ی تقاطع تشکیل یک لوزی می‌دهند و اندازه‌ی کمان درونی که برابر با زاویه‌ی $a$ در شکل فوق است کمتر از نیم‌صفحه خواهد بود .

حال توجه کنید که هر دایره به سه کمان ۱۲۰ درجه تقسیم شده که هر کمان به یک رنگ است بنابراین چون کمان‌های بیرونی بیش از نیم‌صفحه اند نمی‌توانند یک رنگ باشند پس دو یا سه رنگ دارند. که در شکل زیر مشاهده می‌کنید:



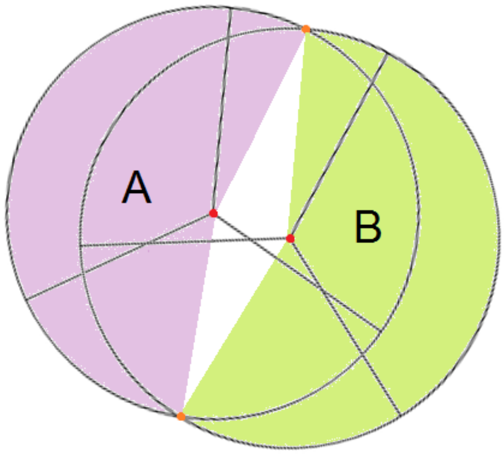

شکل ۳

وقتی کمان بیرونی یکی از دایره‌ها دو رنگ داشته باشد به این معنی است که یکی از قسمت‌های آن به طور کامل درون دایره‌ی دیگر قرار دارد - مانند قسمتی که در شکل ۵ به رنگ آبی است - درنتیجه رنگ اولیه‌ی آن به وجود نمی‌آید پس در این حالت نمی‌تواند ۱۵ رنگ به وجود آید.



شکل ۴

بنابراین تنها بررسی حالتی می‌ماند که کمان بیرونی هر دو دایره سه رنگ داشته باشند. در این حالت چون کمان های بیرونی سه رنگ دارند و طول هر کمان رنگی ۱۲۰ درجه است یک قسمت رنگی از هر دو دایره خواهد بود که مرز بیرونی آن به طور کامل در کمان بیرونی آن دایره قرار گیرد. اکنون ناحیه‌های شکل را به ترتیب زیر نام‌گذاری می‌کنیم:




شکل ۵

حال بنا بر گفته‌های بالا یک قسمت رنگی به تمامی در ناحیه‌ی $A$ و یک قسمت رنگی دیگر به تمامی در ناحیه‌ی $B$ قراردارند و در نتیجه رنگ حاصل از روی هم قرار گرفتن آن دو به وجود نمی‌آید. بنابراین ثابت می‌شود حداکثر ۱۴ رنگ قابل تولید است.

**۲۱.** یک زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد طبیعی را «منظم» گوییم اگر میانگین اعضای آن عددی طبیعی باشد و آن را «فوق منظم» گوییم اگر همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی آن منظم باشند. تعداد زیرمجموعه‌های فوق منظم پنج عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۶۷\}$ چند است؟

۱) ۰      ۲) ۱۲      ۳) ۱۴      ۴) ۱۹      ۵) ۴۷

**راه حل:**

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مجموعه‌ی مورد نظر را $A = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵\}$ در نظر می‌گیریم. منظم بودن زیرمجموعه‌های $A$ معادل با شرایط زیر است:

(آ) برای هر $i, j$ متمایز، $۲|a_i + a_j$.

(ب) برای هر $i, j, k$ متمایز، $۳|a_i + a_j + a_k$.

(ج) برای هر $i, j, k, l$ متمایز، $۴|a_i + a_j + a_k + a_l$.

(د) $5|a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

شرط (آ) معادل است با این‌که همه‌ی $a_i$ها دارای زوجیت یکسان باشند. شرط (ب) معادل است با این‌که همه‌ی $a_i$ به پیمانه‌ی ۳ همنهشت باشند، زیرا اگر $i, j, k, k'$ متمایز باشند، بنابر شرط (ب)،

$$\left.\begin{array}{l} 3|a_i+a_j+a_k \\ 3|a_i+a_j+a_{k'} \end{array}\right\} \Rightarrow a_k \overset{3}{\equiv} a_{k'}$$

مشابهاً شرط (ج) معادل است با این‌که همه‌ی $a_i$ به پیمانه‌ی ۴ همنهشت باشند. بنابراین شرط (ج)، شرط (آ) را نتیجه می‌دهد. از طرف دیگر، شرط‌های (ب) و (ج) در کنار هم، معادل با این هستند که همه‌ی $a_i$ به پیمانه‌ی ۱۲ همنهشت باشند.

پس مجموعه‌ی پنج عضوی $A$ فوق منظم است، اگر و تنها اگر همه‌ی اعضای آن به پیمانه‌ی ۱۲ همنهشت باشند و جمع اعضای آن بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

اکنون توجه کنید که هر عدد طبیعی $a$ را می‌توان به صورت $12b+t$ نمایش داد که $b$ عددی صحیح و نامنفی است و $1 \leq t \leq 12$. پس $a_i$ها را به شکل $a_i = 12b_i + t_i$ نمایش می‌دهیم. از آن‌جا که $a_i$ها باید به پیمانه‌ی ۱۲ همنهشت باشند، پس $t_i$ها با هم برابرند. پس می‌توان نوشت $a_i = 12b_i + t$.

اکنون داریم

$$a_1 + \cdots + a_5 = 12(b_1 + \cdots + b_5) + 5t$$

بنابراین شرط این‌که مجموع $a_i$ها بر ۵ بخش‌پذیر باشد، معادل با این است که مجموع $b_i$ها بر ۵ بخش‌پذیر باشد. اما از آن‌جا که $a_i \leq 67$ پس $b_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. همچنین چون $a_i$ها متمایزند، پس $b_i$ها نیز باید متمایز باشند. به راحتی می‌توان دید که تنها دو زیرمجموعه‌ی پنج‌عضوی از $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ وجود دارد که مجموع اعضای آن‌ها بر پنج بخش‌پذیر است. که عبارت‌اند از:

$$\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

در حالت اول، $a_i$ها عبارتند از $\{t, 12+t, 24+t, 36+t, 48+t\}$ که $t$ هر یک از اعداد ۱، ۲،. . . ، ۱۲ می‌تواند باشد. پس در این حالت ۱۲ زیرمجموعه‌ی فوق منظم پیدا کردیم.

در حالت دوم، ها عبارتند از $\{12+t, 24+t, 36+t, 48+t, 60+t\}$، که در این حالت برای این‌که $60+t \leq 67$ لازم است که $t \leq 7$. پس در این حالت برای $t$ هفت حالت ۱، ۲، . . .، ۷ وجود دارد.

بنابراین در مجموع ۱۹ حالت وجود دارد.

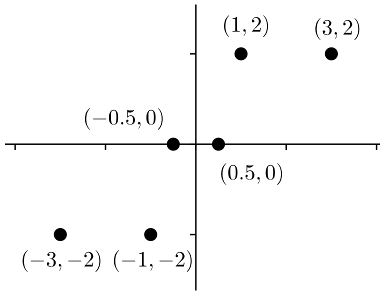
# سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
# سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

**۲۲.** شش نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی از آن‌ها هم‌خط نیستند. در بین زوایایی که این نقاط تشکیل می‌دهند، حداکثر چند زاویه در بازهٔ $(۹۰, ۱۸۰)$ وجود دارد؟

۱) ۶    ۲) ۱۲    ۳) ۱۸    ۴) ۲۰    ۵) ۲۴

**راه حل:**

گزینهٔ (۴) صحیح است.




با این نقاط $\binom{۶}{۳}$ مثلث می‌توان ساخت و در هر مثلث حداکثر یک زاویهٔ منفرجه خواهیم داشت. پس در کل حداکثر $۲۰ = \binom{۶}{۳}$ زاویه در بازهٔ $(۹۰, ۱۸۰)$ خواهیم داشت. شکل بالا مثالی از این تعداد زاویه است.

**۲۳.** نقطهٔ $P$ روی کمان $BC$ از دایرهٔ محیطی مثلث $ABC$ (کمانی که شامل $A$ نیست) قرار دارد. می‌دانیم $AB = ۲$، $AC = ۳$ و $BC = ۴$. نقاط $M$ و $N$ روی خط $BC$ قرار دارند به طوری که $B$ بین $C$ و $M$ است و $C$ بین $N$ و $B$ است. می‌دانیم $MA$ و $PN$ بر دایرهٔ محیطی مثلث $ABC$ مماس هستند و $MA = PN$. $AP$ خط $BC$ را در نقطهٔ $T$ قطع می‌کند. اندازهٔ $PT$ چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$    ۲) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$    ۳) $\frac{۵\sqrt{۱۳}}{۷}$    ۴) $\frac{۲\sqrt{۱۵}}{۳}$    ۵) $\frac{۴\sqrt{۱۰}}{۵}$

**راه حل:**

گزینه‌ی (۵) صحیح است.

خطوط $NP$ و $MA$ بر دایره مماس هستند پس قوت نقطه‌ی $N$ نسبت به دایره برابر با

$$NP^۲ = NC.NB$$

است و قوت نقطه‌ی $M$ نسبت به دایره برابر با

$$MA^۲ = MB.MC$$

طبق فرض مسئله می‌دانیم $NP^۲ = MA^۲$ پس خواهیم داشت:

$$MA^۲ = MB.MC = MB^۲ + ۴MB = (MB + ۲)^۲ - ۴$$

$$NP^۲ = NC.NB = NC^۲ + ۴NC = (NC + ۲)^۲ - ۴$$

$$\Rightarrow (MB + ۲)^۲ = (NC + ۲)^۲ \Rightarrow (MB - NC).(MB + NC + ۴) = ۰ \Rightarrow MB = NC$$

طبق قضیه‌ی سینوسها در مثلث $ABT$ خواهیم داشت:

$$\frac{MA}{sin(ATM)} = \frac{MT}{sin(MAT)}$$

طبق قضیه‌ی سینوسها در مثلث $NPT$ خواهیم داشت:

$$\frac{PN}{sin(PTN)} = \frac{NT}{sin(TPN)}$$

زاویه‌ی ظلی $NPA$ برابر نصف کمان $ACP$ و زاویه‌ی ظلی $MAP$ برابر نصف کمان $ABP$ است پس دو زاویه‌ی $TPN$ و $MAT$ مکمل یکدیگر و $sin(TPN) = sin(MAT)$ است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{MA.sin(MAT)}{sin(ATM)} = \frac{PN.sin(TPN)}{sin(PTN)}$$

$$\Rightarrow MT = NT \Rightarrow BT = CT$$

برای بدست آوردن طول $PT$ ابتدا طول $AT$ یعنی میانه مثلث را محاسبه می‌کنیم.

طول میانه‌ی مثلث با استفاده از رابطه‌ی زیر که در انتها اثبات خواهیم کرد محاسبه می‌شود.

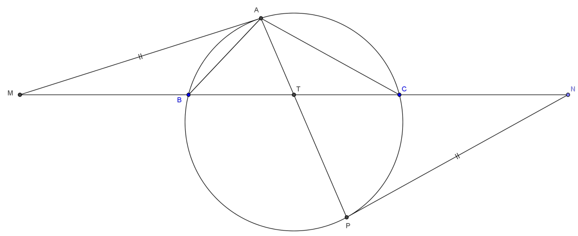
$$AT^۲ = \frac{b^۲}{۲} + \frac{c^۲}{۲} - \frac{a^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow AT = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

قوت نقطه‌ی $T$ نسبت به دایره برابر است با:

$$BT.TC = AT.TP$$

$$\Rightarrow TP = \frac{BT.TC}{AT} = \frac{۴\sqrt{۱۰}}{۵}$$



شکل ۴

بدست آوردن طول میانه یک مثلث : همانطور که در شکل زیر مشاهده می‌کنید $AM$ میانه‌ی وارد بر ضلع $BC$ و $N$ وسط $AC$ قرار دارد.

با استفاده از قضیه‌ی کسینوسها در مثلث $MNC$ خواهیم داشت:

$$-۲.MN.NC.cos(MNC) = MC^۲ - MN^۲ - NC^۲ (۱)$$

و با استفاده از قضیه‌ی کسینوسها در مثلث $ANM$ خواهیم داشت:

$$-۲.MN.AN.cos(۱۸۰^\circ - MNC) = AM^۲ - MN^۲ - AN^۲$$

$$\Rightarrow -۲.MN.NC.cos(MNC) = -AM^۲ + MN^۲ + AN^۲ (۲)$$

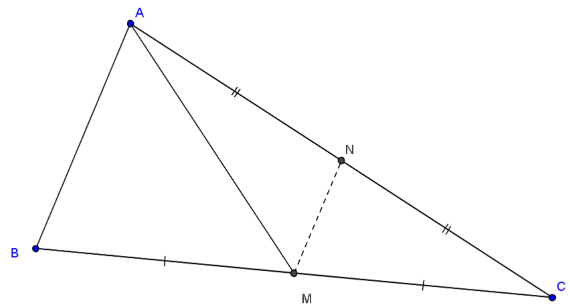
با استفاده از رابطه‌ی ۱ و ۲ داریم:

$$MC^۲ - MN^۲ - NC^۲ = -AM^۲ + MN^۲ + AN^۲$$

$$\Rightarrow AM^۲ = ۲AN^۲ + ۲MN^۲ - MC^۲$$

از طرفی طبق قضیه‌ی تالس $MN$ برابر نصف $AB$ و موازی آن است.پس

$$AM^۲ = ۲(\frac{AC}{۲})^۲ + ۲(\frac{AB}{۲})^۲ - (\frac{BC}{۲})^۲$$



شکل ۱-۴

**۲۴.** عدد طبیعی $M$ را خوب می‌نامیم هرگاه اعداد طبیعی نه لزوماً متمایز $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ یافت شوند به طوری که $M = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ و خواص زیر برقرار باشد.

(آ) $M$ بر توان سوم هیچ عدد طبیعی بزرگ‌تر از یکی بخش‌پذیر نیست.

(ب) اگر $1 \leq i \leq n$ آن‌گاه $a_{i-1}a_{i+1}$ بر $a_i$ بخش‌پذیر است. ($a_0 = a_n$ و $a_{n+1} = a_1$)

چند عدد خوب کوچک‌تر از ۲۰۱۵ داریم؟

۱) ۲۲     ۲) ۲۶     ۳) ۲۹     ۴) ۴۴     ۵) ۷۲

**راه حل:**

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

ادعا می‌کنیم عدد طبیعی $M$ خوب است اگر و تنها اگر این عدد مربع کامل باشد.

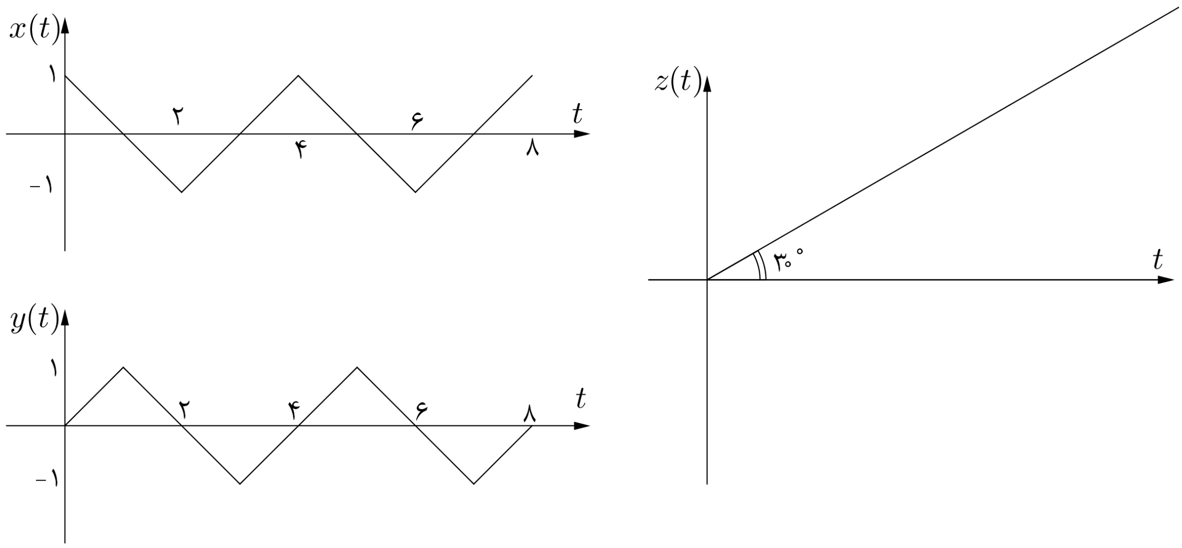
اثبات: ابتدا فرض کنید عدد طبیعی $M$ خوب باشد. در اینصورت اعداد $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geq 3)$ وجود دارند که برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_{i-1}a_{i+1}$ بر $a_i$ بخشپذیر باشد. حال فرض کنید در $M$، عامل اول $p$ وجود داشته باشد. پس چون $M = a_1a_2\cdots a_n$، $a_j$ وجود دارد که بر $p$ بخشپذیر باشد.از طرفی چون $a_{j-1}a_{j+1}$ بر $a_j$ بخشپذیر است، پس حداقل یکی از اعداد $a_{j-1}$ یا $a_{j+1}$ بر $p$ بخشپذیر هستند. پس $M = a_1a_2\cdots a_n$ حداقل بر $p^2$ بخشپذیر است. با توجه به فرض سوال، $M$ نمی‌تواند بر $p^3$ بخشپذیر باشد. پس برای هر عامل اول $p$ در $M$، $M$ دقیقاً بر $p^2$ بخش‌پذیر است. پس توان همه‌ی عوامل اول $M$، دقیقاً برابر ۲ است.

از طرف دیگر فرض کنید توان هر عامل اول $M$ برابر ۲ باشد. پس عدد طبیعی $r$ وجود دارد که $M = r^2$. حال دنباله معرفی شده در زیر خواص مورد نظر صورت سوال را داشته و در نتیجه $M$ عدد خوبی خواهد بود.

$$n = 3, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = r \quad a_3 = r$$

به حل مسأله باز می‌گردیم. با توجه به ادعا، باید تعداد اعداد کوچکتر از ۲۰۱۵ را بیابیم که مربع کامل هستند و توان هر عامل اول آن‌ها دقیقاً ۲ است. با توجه به این که $۱۹۳۶ = ۴۴ \times ۴۴$ و $۲۰۲۵ = ۴۵ \times ۴۵$ پس اعدد خوب مورد نظر دقیقاً $k^۲$هایی هستند که $۱ \leq k \leq ۴۴$ و $k$ از هیچ عامل اولی بیش از یکی ندارد، که با یک بررسی ساده مشخص می‌شود این اعداد عبارت‌اند از $۱^۲, ۲^۲, ۳^۲, ۵^۲, ۶^۲, ۷^۲, ۱۰^۲, ۱۱^۲, ۱۳^۲, ۱۴^۲, ۱۵^۲, ۱۷^۲, ۱۹^۲, ۲۱^۲, ۲۲^۲, ۲۳^۲, ۲۶^۲, ۲۹^۲, ۳۰^۲, ۳۱^۲, ۳۳^۲, ۳۴^۲, ۳۵^۲, ۳۷^۲, ۳۸^۲, ۳۹^۲, ۴۱^۲, ۴۲^۲, ۴۳^۲$ که تعداد آن‌ها ۲۹ تاست.

**۲۵.** متحرکی در فضا به گونه‌ای حرکت می‌کند که در لحظهٔ $t$ در نقطهٔ $(x(t), y(t), z(t))$ قرار دارد. اگر نمودارهای $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ بر حسب $t$ به شکل‌های زیر باشند، مسافتی که این متحرک از $t = ۰$ تا $t = ۸$ طی می‌کند برابر کدام گزینه است؟




۱) $\frac{۸\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $۴\sqrt{\frac{۷}{۳}}$ ۳) $۸\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ ۴) $۸\sqrt{\frac{۷}{۳}}$ ۵) $۱۶\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

**راه حل:**

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

اگر به مسیر حرکت این متحرک کمی فکر کنیم، خواهیم فهمید که در هر کدام از بازه‌های $[۰, ۱]$، $[۱, ۲]$، ... و $[۷, ۸]$ که سه مؤلفه‌ی حرکت آن به صورت خط در آمده است، خود متحرک هم در فضا روی پاره‌خط‌هایی حرکت می‌کرده است. پس کافی است که طول هر کدام از این پاره‌خط‌ها را یافته و با هم جمع کنیم.

از طرف دیگر با توجه به شباهت حرکت متحرک در هر کدام از بازه‌ها طول این ۸ پاره‌خط با هم برابر است، پس کافی است طول یکی از آن‌ها مثلاً پاره‌خط مربوط به بازه‌ی اول را یافته و در ۸ ضرب کنیم.
متحرک در لحظه‌ی $t = ۰$ در نقطه‌ی $(۱, ۰, ۰)$ و در لحظه‌ی $t = ۱$ در نقطه‌ی $(۰, ۱, \frac{\sqrt{۳}}{۳})$ قرار دارد. بنابراین طول طی شده در بازه‌ی $[۰, ۱]$ برابر است با:

$$\sqrt{(۱ - ۰)^۲ + (۰ - ۱)^۲ + (۰ - \frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲} = \sqrt{\frac{۷}{۳}}$$

پس کل مسافت طی شده از $t = ۰$ تا $۸$ = برابر $۸\sqrt{\frac{۷}{۳}}$ خواهد بود.

**۲۶.** «پشیزها» موجوداتی میکروسکوپی هستند که اندازه‌های مختلفی دارند. هرگاه دو پشیز با اندازه‌های $x$ و $y$ در مجاورت هم قرار بگیرند، می‌توانند با صرف انرژی‌ای برابر $|x - y|$ به هم بچسبند و یک پشیز با اندازه‌ی $x + y$ ایجاد کنند.
اگر ۱۰۲۵ پشیز با اندازه‌ی ۱ روی یک خط ردیف شده باشند، کم‌ترین انرژی‌ای که باید در مجموع صرف کنند تا تبدیل به یک پشیز با اندازه‌ی ۱۰۲۵ شوند، چه‌قدر است؟

۱) ۹     ۲) ۱۰     ۳) ۱۱     ۴) ۳۱     ۵) ۳۲

**راه حل:**

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

ابتدا نشان می‌دهیم با صرف انرژی ۱۰ می‌توان پشیز با اندازه ۱۰۲۵ به دست آورد. برای این کار در ۱۰ گام پشیزها را به هم می‌چسبانیم به طوری که در هر گام تنها یک واحد انرژی مصرف گردد.

در گام ۰، دو پشیز نخست را به هم می‌چسبانیم تا یک پشیز به طول ۲، و ۱۰۲۳ پشیز به طول ۱ داشته باشیم. (بدون صرف انرژی)

در گام ۱، ۱۰۲۴ پشیز باقیمانده را دوبدو به یکدیگر می‌چسبانیم. با این کار یک پشیز به طول ۳ و ۵۱۱ پشیز به طول ۲ خواهیم داشت. (یک واحد صرف انرژی)

در گام ۲، ۵۱۲ پشیز باقیمانده را دوبدو به یکدیگر می‌چسبانیم. با این کار یک پشیز به طول ۵ و ۲۵۵ پشیز به طول ۴ خواهیم داشت. (یک واحد صرف انرژی)

به همین صورت در گام $j$ $(۱ \leq j \leq ۹)$ ، $۲^{۱۱-j}$ پشیز باقیمانده را دوبدو به یکدیگر می‌چسبانیم. با این کار یک پشیز به طول $۲^j + ۱$ و $۲^{۱۰-j} - ۱$ پشیز به طول $۲^j$ خواهیم داشت. (یک واحد صرف انرژی)

در گام ۱۰ (آخر)، ۲ پشیز باقیمانده (یکی به طول ۵۱۳ و دیگری به طول ۵۱۲) را به یکدیگر می‌چسبانیم. با این کار یک پشیز به طول ۱۰۲۵ خواهیم داشت. (یک واحد صرف انرژی)

حال نشان می‌دهیم این راه بهینه است؛ یعنی برای دستیابی به پشیز با طول ۱۰۲۵، صرف حداقل ۱۰ واحد انرژی لازم است.

ادعا: برای هر عدد طبیعی $n$ که $۲^i < n < ۲^{i+۱}$، صرف $i$ واحد انرژی برای به دست آوردن یک پشیز به طول $n$ لازم است.

اثبات: حکم را به استقرای قوی روی $n$ اثبات می‌کنیم.

پایه: حکم برای $n = ۳, n = ۵,۶,۷$ به سادگی قابل بررسی و صحیح است.

گام: فرض کنید $۲^i < n < ۲^{i+۱}$، در اینصورت برا به دست آوردن پشیز به طول $n$، باید دو پشیز به یکدیگر چسبیده باشند. پس فرض کنید این دو پشیز طول‌های $x, y$ داشته باشند. پس $x + y = n$ بدون کاسته شدن از کلیت مسأله فرض می‌کنیم $x \geq y$. در اینصورت دو حالت داریم:

حالت ۱، $x = y$: در این حالت با توجه به این که $۲^i < n < ۲^{i+۱}$، پس $۲^{i-۱} < x = y < ۲^i$، پس در این حالت با توجه به فرض استقرا، صرف $۲(i-۱)$ انرژی لازم است. با توجه به این که $i \geq ۳$، این مقدار از $i$ کمتر نخواهد بود.

حالت ۲، $x > y$ و $x \neq ۲^i$: در حالت خواهیم داشت:

$$۲^i < n = x + y < ۲x < ۲n < ۲^{i+۲}$$

پس $۲^{i-۱} < x < ۲^{i+۱}$ پس با توجه به فرض استقرا، برای تولید پشیز به طول $x$ نیاز به حداقل $i - ۱$ واحد انرژی داریم. از طرفی چون $x \neq y$، پس برای تولید پشیز به طول $n = x + y$ با به هم چسباندن دو پشیز به طول‌های $x, y$، نیاز به حداقل یک واحد انرژی داریم. پس در این حالت نیز صرف حداقل $i$ واحد انرژی نیاز خواهد بود.

حالت ۳، $x > y$ و $x = ۲^i$: در این حالت اگر $y > ۲^{i-۱}$، در اینصورت با توجه به فرض استقرا برای تولید پشیز به طول $y$، حداقل $i - ۱$ واحد انرژی و برای چسباندن دو پشیز $x, y$ حداقل یک واحد انرژی نیاز است که این مانند قبل حکم را نتیجه می‌دهد. امّا اگر $y \leq ۲^{i-۱}$، در اینصورت برای چسباندن دو پشیز $x, y$، صرف $|x - y| \geq ۲^{i-۱}$ واحد انرژی لازم است. با توجه به این که $i \geq ۳$، این مقدار از $i$ کمتر نخواهد بود.

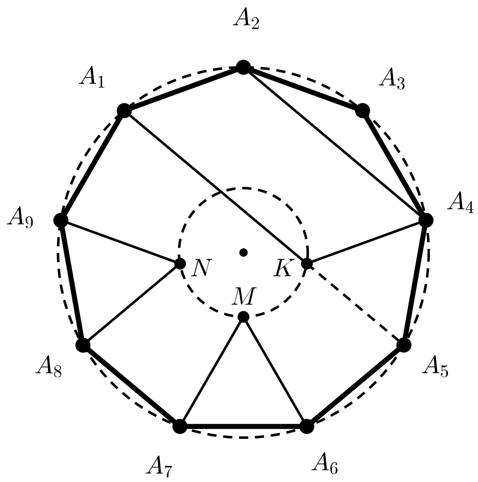
اکنون با توجه به ادعا می‌توان دید که چون $2^{11} > 1025 > 2^{10}$، پس صرف ۱۰ واحد انرژی برای به دست آوردن پشیز به طول ۱۰۲۵ لازم است و این اثبات ما را کامل می‌کند.

**۲۷.** $A_1A_2\cdots A_9$ یک ۹ ضلعی منتظم است و نقطه‌های $K$، $M$ و $N$ درون آن به گونه‌ای هستند که $A_1A_2A_4K$ متوازی‌الاضلاع و $A_6A_7M$ و $A_8A_9N$ مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع هستند. زاویهٔ $\angle MKN$ چه‌قدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵ ۵) ۶۰

**راه حل:**

گزینهٔ (۳) صحیح است.




راس‌های این ۹ ضلعی دایرهٔ محیطی آن را به ۹ کمان مساوی تقسیم کرده‌اند. پس هر قطعه کمان $40 = \frac{360}{9}$ درجه است. بنابراین زاویهٔ $\angle A_1A_2A_4$ (که روبه‌رو به ۶ قطعه کمان است) ۱۲۰ درجه است. زاویهٔ $\angle A_2A_1K$، زاویهٔ مجاور آن در متوازی‌الاضلاع، ۶۰ درجه خواهد بود. اما زاویهٔ $\angle A_2A_1A_5$ هم ۶۰ درجه است، چرا که روبه‌رو به ۳ قطعه کمان است. پس

$$\angle A_2A_1A_5 = \angle A_2A_1K = 60^\circ$$

بنابراین سه نقطهٔ $A_1$، $A_5$ و $K$ هم‌خط‌اند. زاویهٔ $\angle KA_5A_4$ (که روبه‌رو به ۳ قطعه کمان است) ۶۰ درجه است. از طرفی

$$\angle KA_4A_5 = \angle A_2A_4A_5 - \angle A_2A_4K = 120 - 60 = 60$$

پس مثلث $A_۴A_۵K$ هم متساوی‌الاضلاع است.

اگر شکل را ۸۰ درجه حول مرکز دایره به طور ساعت‌گرد دوران دهیم مثلث $A_۴A_۵K$ به $A_۶A_۷M$ و مثلث $A_۶A_۷M$ به $A_۸A_۹N$ تبدیل می‌شود، چرا که اضلاع ۹ ضلعی طی این دوران به هم تبدیل می‌شوند. در نتیجه با این دوران $K$ به $M$ و $M$ به $N$ تبدیل می‌شود. پس کمان $MN$ (روی دایرهٔ کوچک‌تر) ۸۰ درجه است. زاویهٔ $\angle MKN$ (که روبه‌رو به این کمان است) ۴۰ درجه خواهد بود.

**۲۸.** فرض کنید $A$ مجموعهٔ نقاط با مختصات صحیح در صفحه باشد و تابع $f : A \to \{۰, ۱, ۲\}$ دارای این خاصیت است که برای هر $x$ و $y$ صحیح،

$$f(x, y) - f(x + ۱, y) - f(x - ۱, y) - f(x, y + ۱) - f(x, y - ۱)$$

بر ۳ بخش‌پذیر است. کدام گزاره صحیح است؟

۱) $f$ باید تابعی ثابت باشد.
۲) مجموعه‌ای متناهی وجود ندارد که با دانستن $f$ در آن مجموعه، تابع $f$ به صورت یک‌تا تعیین شود.
۳) اگر مجموعهٔ نقاطی که $f$ در آن‌ها مقدار ۱ را اتخاذ می‌کند، مشخص باشد (فرض کنید این مجموعه ناتهی است) تابع $f$ به صورت یک‌تا تعیین می‌شود.
۴) اگر مقدار $f$ را روی نقاطی که هر دو مؤلفهٔ آن‌ها زوج است بدانیم، تابع $f$ به صورت یک‌تا تعیین می‌شود.
۵) گزینه‌های ۲ و ۳

**راه حل:**

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مجموعه‌ی نقاط با مختصات صحیح را با $\mathbb{Z}^۲$ نشان می‌دهیم.

تابعی که در شرط مسأله صدق کند را تابع خوب می‌نامیم.

گزاره‌ی (۱) غلط است. زیرا به سادگی می‌توان دید که تابع زیر یک تابع خوب است،

$$f(x, y) = \text{باقیمانده‌ی } (x + y) \text{ بر ۳}$$

گزاره‌ی (۲) درست است. برای اثبات آن، ابتدا چند تعریف ارائه می‌کنیم.

# سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
# سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

برای هر $(x,y) \in \mathbb{Z}^۲$ منظور از همسایه‌های $(x,y)$، نقاط $(x,y-۱)$، $(x,y+۱)$، $(x-۱,y)$ و $(x+۱,y)$ هستند.

اگر $S$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Z}^۲$ باشد، آن‌گاه $(x,y)$ را نقطه‌ای درونی از $S$ می‌گوییم اگر خودش و همسایه‌هایش عضو $S$ باشند.

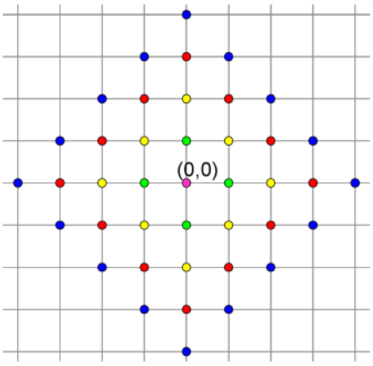
اگر $f$ تابعی از $S$ به $\{۰,۱,۲\}$ باشد و $(x,y)$ نقطه‌ای درونی از $S$ باشد، تعریف می‌کنیم

$$\Delta f(x,y) = \text{باقیمانده‌ی } \big(f(x,y) - f(x+۱,y) - f(x-۱,y) - f(x,y+۱) - f(x,y-۱)\big) \text{ بر } ۳$$

برای هر عدد صحیح نامنفی $n$، مجموعه‌های $A_n$ و $B_n$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^۲ : |x| + |y| = n\}$$

مثلاً $A_۰ = \{(۰,۰)\}$، $A_۱ = \{(۱,۰),(-۱,۰),(۰,۱),(۰,-۱)\}$. در شکل زیر، $A_n$ها با رنگ‌های مختلف مشخص شده‌اند.




همچنین تعریف می‌کنیم

$$B_n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^۲ : |x| + |y| \leq n\}$$

تابع $h : B_n \to \{۰,۱,۲\}$ را خوب می‌نامیم اگر برای هر $(x,y) \in B_{n-۱}$، $\Delta h(x,y) = ۰$.

حال لم زیر را ثابت می‌کنیم.

# سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
# سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

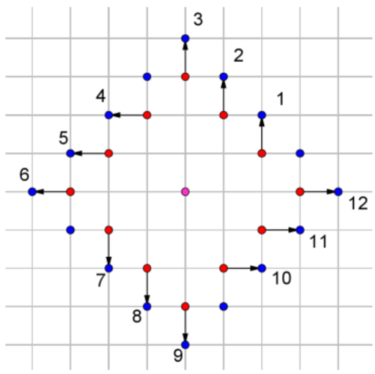
**لم:** فرض کنید $N$ عددی طبیعی و $h : B_N \to \{۰,۱,۲\}$ تابعی خوب باشد. در این صورت $h$ را می‌توان به تابعی خوب روی کل $\mathbb{Z}^۲$ گسترش داد.

**اثبات لم:**

به طور استقرایی تابع $h$ را روی $B_n$ برای هر $n > N$ گسترش می‌دهیم به نحوی که خوب باقی بماند.

فرض کنید $h$ روی $B_n$ تعریف شده باشد و خوب باشد. می‌خواهیم آن را روی $B_{n+۱}$ گسترش دهیم به طوری که خوب بماند. به این منظور کافی است آن را روی $A_{n+۱}$ تعریف کنیم به نحوی که برای $(x,y) \in A_n$ داشته باشیم $\Delta h(x,y) = ۰$ (چون برای $m < n$ بنابر فرض استقرا شرط مسأله روی $A_m$ برقرار است).

به هر کدام از اعضای $A_n$، طبق الگوی شکل زیر، عضوی از $A_{n+۱}$ را نسبت می‌دهیم. اعضایی از $A_{n+۱}$ که به هیچ عضوی نسبت داده نشده‌اند را عضو آزاد و بقیه را عضو وابسته می‌نامیم. مطابق شکل، اعضای وابسته‌ی $A_{n+۱}$ را به ترتیب شماره‌گذاری می‌کنیم. این شماره‌گذاری دارای این خاصیت است: «هر عضو وابسته‌ی $A_{n+۱}$، به عضوی از $A_n$ وابسته شده که همسایه‌ی هیچ یک از اعضای وابسته‌ی بعدی نیست.»




حال ابتدا مقدار تابع $h$ را روی همه‌ی اعضای $A_{n+۱}$ برابر با صفر تعریف می‌کنیم. سپس با شروع از عضو وابسته‌ی شماره ۱، مقدار $h$ را روی هر عضو وابسته به نحوی تغییر می‌دهیم که $\Delta h$ روی عضوی که به آن وابسته است صفر شود. با توجه به خاصیت بیان شده در بالا، در نهایت تابع $h$ای به دست می‌آوریم که برای هر $(x,y) \in A_n$، $\Delta h(x,y) = ۰$. (توجه کنید که تغییر مقدار $h$ روی اعضای وابسته‌ی بعدی، مقدار $\Delta h$ را در نقاط قبلی تغییر نمی‌دهد.

به این ترتیب تابع $h$ روی کل $B_{n+۱}$ تعریف می‌شود و برای هر $(x,y) \in B_n$، داریم $\Delta h(x,y,) = ۰$. اکنون با بزرگ کردن $n$ به دلخواه، یک تابع $h$ روی کل $\mathbb{Z}^۲$ به دست می‌آوریم که $\Delta h(x,y) = ۰$ و اثبات لم تمام می‌شود.

حال با استفاده از لم بالا می‌توان به راحتی درستی گزاره‌ی ۲ را ثابت کرد. زیرا فرض کنید مقدار $f$ را روی یک مجموعه‌ی متناهی $S$ از نقاط $\mathbb{Z}^۲$ بدانیم. از آن‌جا که مجموعه‌ی $S$ متناهی است، پس عدد طبیعی $N$ وجود دارد که $S \subset B_{N+۱}$. اکنون مقدار تابع $f$ را روی نقاط $A_{N+۱}$ به این صورت تغییر می‌دهیم که یکی در میان آن‌ها را بعلاوه و منهای یک می‌کنیم. تابع حاصل از تغییر این مقادیر را $g$ می‌نامیم. دقت کنید که تحدید تابع $g$ به $B_{N+۱}$ تابعی خوب است زیرا مقدار $\Delta g$ روی $B_N$ همچنان صفر است. پس بنابر لم، تابع خوب $h$ وجود دارد که روی $B_{N+۱}$ با $g$ برابر است. پس $f$ و $h$ روی $B_N$ و در نتیجه روی $S$ با هم برابرند ولی در کل با هم برابر نیستند. بنابراین با دانستن $f$ روی یک مجموعه‌ی متناهی نمی‌توان آن را به طور یکتا تعیین کرد.

گزاره‌ی (۳) غلط است، زیرا دو تابع زیر، هر دو خوب هستند و مجموعه‌ی نقاطی که مقدار ۱ را اتخاذ می‌کنند یکسان و ناتهی است ولی دو تابع با یکدیگر متفاوت‌اند.

$$f(x,y) = \text{باقیمانده‌ی } (x+y+۱) \text{ بر } ۳$$

$$f(x,y) = \text{باقیمانده‌ی } (۲x+۲y+۱) \text{ بر } ۳$$

بنابراین گزینه‌ی (۵) نیز نادرست است. پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

**۲۹.** مثلثی که طول هر سه ضلعش عددی در بازهٔ $[۱,۲]$، و اندازهٔ همهٔ زاویه‌هایش در بازهٔ $[۴۵,۹۰]$ درجه است، را «معتدل» می‌گوییم. اختلاف مساحت دو مثلث معتدل حداکثر چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۸-\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۱۲-۳\sqrt{۲}}{۸}$ ۵) هیچ‌کدام

**راه حل:**

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

فرض کنید مثلث $ABC$ مثلثی معتدل و داری کمترین مساحت باشد و فرض کنید زاویه‌ی $A$ بزرگترین زاویه‌ی آن باشد پس

$$AB, AC \geqslant ۱,\ \angle A \geqslant ۶۰^\circ \Rightarrow Sin(A) \geqslant Sin(۶۰) \geqslant \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲}.AB.AC.Sin(A) \geqslant \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

همچنین فرض کنید مثلث $A'B'C'$ مثلثی معتدل و داری بیشترین مساحت باشد و فرض کنید زاویه‌ی $A'$ کوچکترین زاویه‌ی آن باشد پس

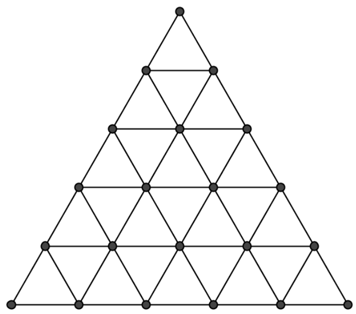
$$A'B', A'C' \leqslant ۲,\ \angle A' \leqslant ۶۰^\circ \Rightarrow Sin(A') \leqslant Sin(۶۰) \leqslant \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{A'B'C'} = \frac{۱}{۲}.A'B'.A'C'.Sin(A') \leqslant \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S_{A'B'C'} - S_{ABC} \leqslant \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$

به عنوان مثال مثلث با اضلاع ۲, ۲, ۲ را مثلث با بیشترین مساحت و مثلث با اضلاع ۱, ۱, ۱ را به عنوان کمترین مساحت در نظر بگیرید که حالت تساوی نامساوی بالا بدست می‌آید.

**۳۰.** مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۵ را به شکل روبه‌رو به مثلث‌هایی به ضلع یک تقسیم کرده‌ایم. به هر یک از رئوس این شبکه‌بندی، برداری دل‌خواه به طول یک و موازی با یکی از اضلاع مثلث نسبت می‌دهیم. مجموع همه‌ی این بردارها چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

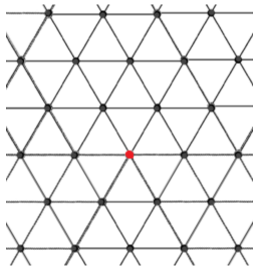


۱) ۱۲۶ ۲) ۳۶۳ ۳) ۷۲۶ ۴) ۱۳۸۷ ۵) ۲۷۷۴

**راه حل:**

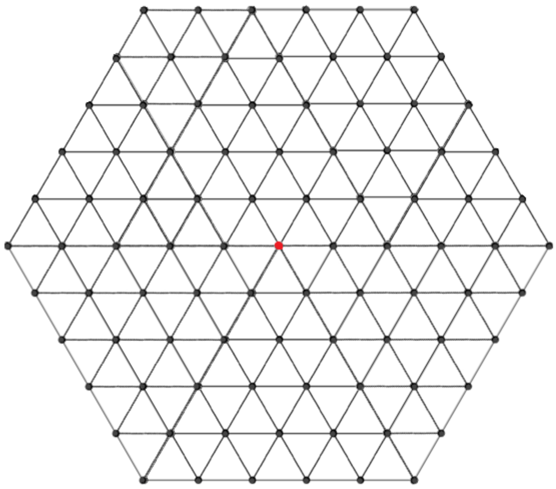
گزینه‌ی (۴) صحیح است.

برای یافتن مجموع تعدادی بردار می‌توانیم فرض کنیم متحرکی به ترتیب در راستای هرکدام از بردارها و به اندازه‌ی آن بردار حرکت می‌کند سپس برداری که ابتدای آن محل اولیه‌ی متحرک یادشده و انتهای آن محل پایانی متحرک باشد مجموع بردارهای اولیه خواهد بود. بنابراین برای یافتن پاسخ این سوال کافی است تعداد نقاط انتهایی ممکن برای متحرکی که از نقطه‌ی ثابتی شروع به حرکت می‌کند و همه‌ی بردارهای منظور شده در شکل را طی می‌کند بیابیم. توجه کنید که طول و جهت بردارها باعث می‌شود اگر متحرک از نقطه‌ی قرمز در شکل زیر شروع به حرکت کند در هر مرحله روی نقاط سیاه باقی بماند.



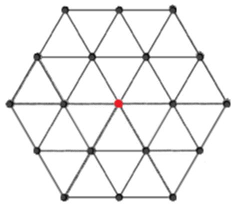
شکل ۱

پس کافی است تعداد نقاطی که در انتها می‌تواند در آن‌ها باشد را بیابیم. به استقرا نشان می‌دهیم اگر متحرک $n > 1$ قدم حرکت کند نقاطی که می‌تواند در نهایت درآن‌ها قرار گیرد مرز و داخل یک شش ضلعی منتظم با طول ضلع $n$ خواهد بود. به عنوان مثال برای $n = 5$ همه‌ی نقاط شکل زیر جواب است.



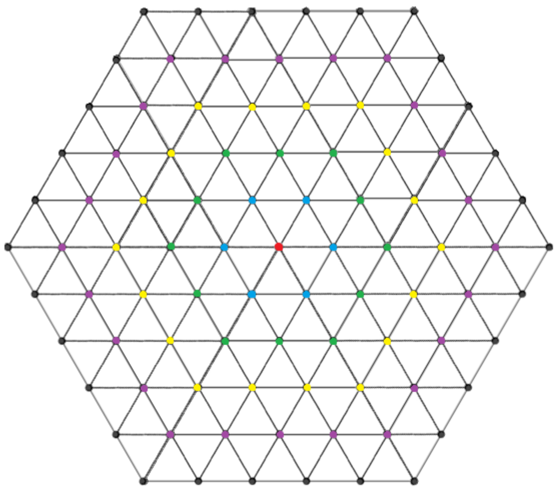
شکل ۲

پایه‌ی استقرا $n = 2$ است. روشن است که با دو قدم می‌توان به همه‌ی نقاط شکل زیر رسید.



شکل ۳

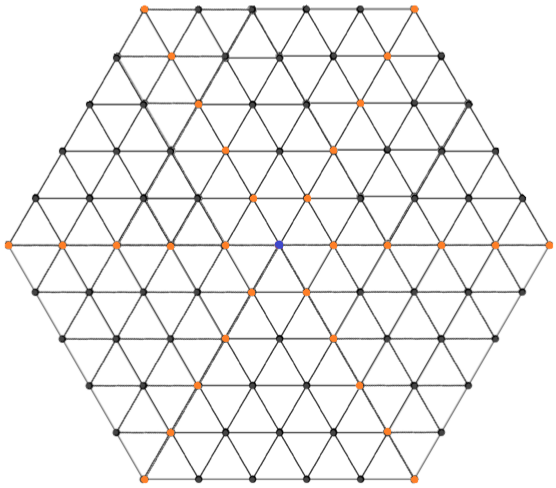
اکنون فرض کنید حکم را برای $n = k$ می‌دانیم. توجه کنید که شکل مربوط به حالت $n = k + 1$ یک لایه بیش از شکل قبلی است. برای مثال در شکل زیر نقاطی که در هر مرحله اضافه می‌شوند با رنگ‌های مختلف نشان داده شده اند.



شکل ۴

توجه کنید که طبق فرض استقرا می‌دانیم به تمامی نقاط غیر از لایه‌ی خارجی می‌توان با $k$ قدم رسید و به علاوه هر خانه در شش‌ضلعی با طول ضلع $k + 1$ یک خانه‌ی مجاور دارد که در شش‌ضلعی داخلی و به طول ضلع $k$ قرار دارد بنابراین به هر خانه‌ی شکل با $k + 1$ قدم می‌توان رسید و حکم ثابت می‌شود. از طرفی هر نقطه خارج از این شش‌ضلعی را که در نظر بگیریم هیچ مسیر با طول کمتر مساوی $k + 1$ تا نقطه‌ی قرمز ندارد. (این حکم را هم با استقرایی مشابه می‌توان نتیجه گرفت.) پس ثابت می‌شود با $k + 1$ قدم دقیقاً به نقاط شش‌ضلعی یادشده می‌توان رسید. حال می‌دانیم که تعداد قدم‌های متحرک ما ۲۱ است پس تعداد نقاط یک شش‌ضلعی با طول ضلع ۲۱ جواب مورد نظر ما است. توجه

کنید که این شش‌ضلعی را می‌توان به شش مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲۱ تقسیم کرد. برای مثال در شکل مربوط به شش‌ضلعی به طول ضلع ۵ این تقسیم‌بندی را مشاهده می‌کنید.



شکل ۵

می‌دانیم تعداد نقاط مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع $n$ برابر $\frac{(n+۲)(n+۱)}{۲}$ است پس با در نظر گرفتن نقاط تکراری (نقاط نارنجی و آبی در شکل فوق) تعداد کل نقاط برای شش‌ضلعی به طول ضلع $n$ برابر

$$\frac{۶(n+۲)(n+۱)}{۲} - ۶ \times n - ۵$$

است. پس جواب ما برابر است با: ۱۳۸۷.