

به نام او  
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۳

یکشنبه ۹۳/۶/۱۶

مدت امتحان ۱۲۰ دقیقه

۱. تابع صعودی از چی به چی!

در هر کدام از قسمت‌های (الف) تا (ت) مشخص کنید که آیا تابعی دوسویی (یک به یک و پوشا) و صعودی بین دو مجموعه  $A$  و  $B$  معرفی شده وجود دارد یا خیر.

الف.  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{3}\}$ .

ب.  $A = \mathbb{Q}$  و  $B = \mathbb{Q} \cup \{\pi\}$ .

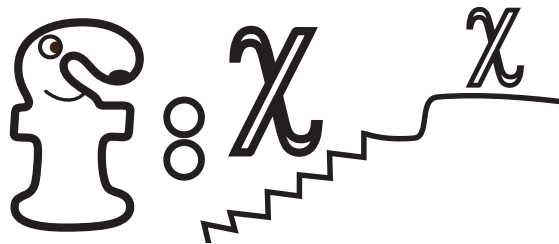
برای قسمت‌های (پ) و (ت)، روی نقاط صفحه  $(\mathbb{R}^2)$  ترتیب را اینگونه تعریف می‌کنیم که برای مقایسه دو زوج مرتب ابتدا مؤلفه اول آن‌ها را مقایسه می‌کنیم، اگر این عدد برای یکی بزرگ‌تر بود، می‌گوییم آن زوج مرتب بزرگ‌تر است و اگر این مؤلفه در هر دو برابر بود، زوج مرتبی که مؤلفه دوم بیش‌تری دارد بزرگ‌تر می‌گیریم (به این ترتیب، ترتیب لغت‌نامه‌ای می‌گویند).

$$(a, b) < (c, d) \Leftrightarrow (a < c) \text{ یا } (a = c \text{ و } b < d)$$

با در نظر گرفتن ترتیب لغت‌نامه‌ای، می‌توانیم تابع صعودی بین زیرمجموعه‌های  $\mathbb{R}^2$  و مجموعه‌های دیگر دارای ترتیب تعریف کنیم. حال با این توضیحات به دو قسمت پیش رو پاسخ دهید.

پ.  $A = \mathbb{R}$  و  $B = \mathbb{R}^2$ .

ت.  $A = X \times (X \cup \{0\})$  و  $B = (X \cup \{0\}) \times X$  که در این جا  $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ .



ث.  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه از اعداد حقیقی هستند که تابعی پوشا و صعودی از  $A$  به  $B$  و همین طور تابعی پوشا و صعودی از  $B$  به  $A$  وجود دارند. آیا همواره می‌توان تابعی یک به یک، پوشا و صعودی بین این دو مجموعه پیدا کرد؟

موفق باشید

به نام او  
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۳

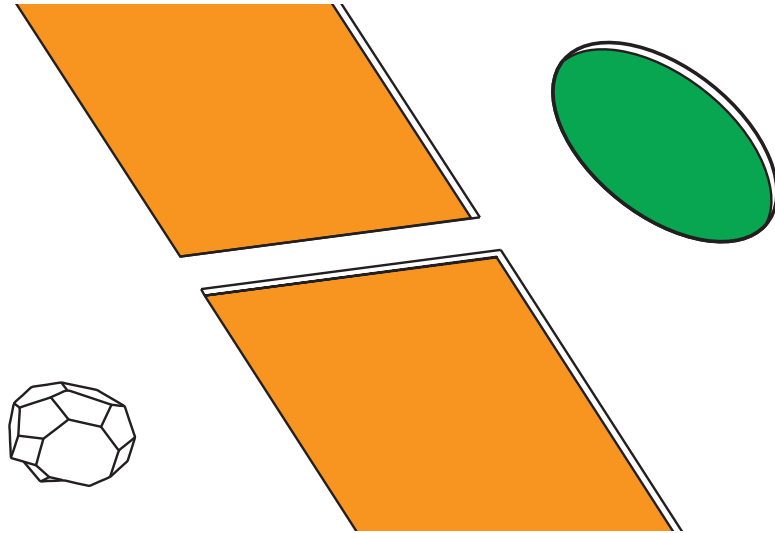
یکشنبه ۹۳/۶/۱۶

مدت امتحان ۶۰ دقیقه

## ۲. چالش چاله!

زمینی کاملاً صاف در نظر بگیرید که روی آن یک دره به شکل نوار نامتناهی و با عرض دلخواه  $w$  قرار دارد. یک چندوجهی به قطر  $d$ <sup>۱</sup> در یک سمت دره و یک چاله با شعاع  $d$  در سمت دیگر دره قرار دارند. می‌خواهیم چندوجهی را بغلتانیم و درون چاله بیندازیم به طوری که در طی مسیر چندوجهی و زمین همواره در حداقل یک نقطه اشتراک داشته باشند (خلاف دنیای واقع چندوجهی حتی اگر در یک نقطه با زمین تماس داشته باشد به دره سقوط نمی‌کند). برای این کار پلی به شکل مستطیل با عرض  $\frac{d}{3}$  روی دره احداث کرده‌ایم. ثابت کنید با شرایط گفته شده می‌توان چندوجهی را درون چاله انداخت.

(به اثبات برای حالت خاص  $w = 0$  (اصلاً دره وجود نداشته باشد) نیز نمره قابل توجهی تعلق می‌گیرد.)



موفق باشید

<sup>۱</sup>در یک چندوجهی قطر بیشترین فاصله میان نقاط چندوجهی است.

به نام او  
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۳

یکشنبه ۹۳/۶/۱۶

مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۳. باقی‌مانده ایرانی!

الف.  $n$  عدد طبیعی دو به دو نسبت به هم اول مانند  $d_1, d_2, \dots, d_n$  و هم‌چنین اعداد طبیعی دل‌خواه  $r_1, r_2, \dots, r_n$  را در نظر بگیرید. ثابت کنید عددی طبیعی مانند  $x$ ،  $1 \leq x \leq 3^n$  وجود دارد که در دستگاه نامعادلات هم‌نهستی زیر صدق کند:

$$\begin{aligned}d_1 \\ x &\not\equiv r_1 \\d_2 \\ x &\not\equiv r_2 \\&\vdots \\d_n \\ x &\not\equiv r_n\end{aligned}$$

ب. برای هر عدد حقیقی  $\varepsilon > 0$  ثابت کنید عددی مانند  $N$  وجود دارد که برای هر عدد طبیعی  $n > N$  و اعداد طبیعی  $d_1, \dots, d_n$  و  $r_1, \dots, r_n$  که  $d_i$ ها دو به دو نسبت به هم اولند، دستگاه بالا جوابی طبیعی مانند  $x$  داشته‌باشد که  $1 \leq x \leq (2 + \varepsilon)^n$ .

موفق باشید

به نام او  
آزمون خلاقیت

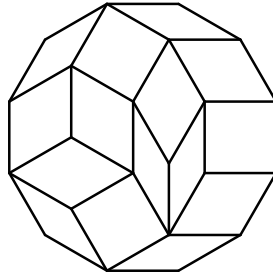
دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۳

دوشنبه ۹۳/۶/۱۷

مدت امتحان ۱۲۰ دقیقه

۴. چهار لوز!

یک  $2n$  ضلعی منتظم را مانند  $P$  در نظر بگیرید. منظور از یک لوزی بندی  $P$ ، قرار دادن تعدادی لوزی در  $P$  است طوری که درون  $P$  را بپوشانند، درونشان از هم مجزا باشد و هیچ رأسی از لوزی‌ها درون یک ضلع از لوزی‌های دیگر یا درون یک ضلع از  $P$  قرار نگیرد.



۱. ثابت کنید تعداد لوزی‌ها تابعی از  $n$  است. مقدار این تابع را بیابید. همچنین تعداد رئوس و ضلع‌ها را برحسب  $n$  بیان کنید.

۲. آیا درست است که همواره ضلعی یافت می‌شود که با حذف لوزی‌هایی که ضلعی موازی آن دارند  $P$  تبدیل به یک چندضلعی با تعداد اضلاع کمتر می‌شود؟

۳. آیا درست است که هر دو لوزی بندی با چند مرحله از گام زیر به هم تبدیل می‌شوند؟

در هر گام می‌توانیم رأسی که فقط سه لوزی شامل آن هستند را به همراه لوزی‌های آن حذف کنیم و شش ضلعی خالی حاصل را به طریق دیگری لوزی بندی کنیم.

۴. اگر  $f(n)$  تعداد روش‌های لوزی بندی کردن یک  $2n$  ضلعی منتظم باشد ثابت کنید

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left( \binom{k}{2} + 1 \right) \leq f(n) \leq \prod_{k=1}^{n-1} k^{n-k}$$

موفق باشید

به نام او  
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۳

دوشنبه ۹۳/۶/۱۷

مدت امتحان ۶۰ دقیقه

۵. چندضلعی کذایی!

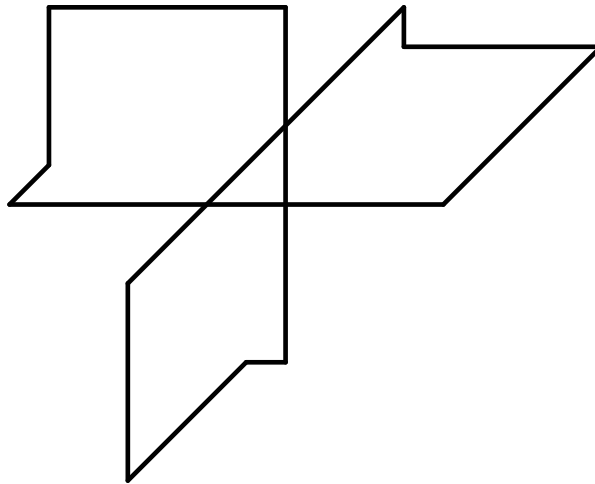
یک چندضلعی فضایی (چندضلعی در فضای سه بعدی) را شبکه‌ای گوییم هرگاه اضلاع آن موازی محورهای مختصات باشد.

الف. بین هر دو ضلع مجاور از هر چندضلعی شبکه‌ای یک زاویه قائمه ایجاد می‌شود که این زاویه یا در صفحه‌ای موازی  $xy$  قرار دارد یا  $yz$  و یا  $xz$ . ثابت کنید تعداد زوایا از این سه نوع، زوجیت یک‌سان دارند.

ب. یک چندضلعی شبکه‌ای را محاطی گوییم، هرگاه نقطه‌ای در صفحه موجود باشد که از همه رئوس آن به یک فاصله باشد. ثابت کنید هر شش ضلعی شبکه‌ای که همه رئوس آن هم‌صفحه نباشند محاطی است.

پ. آیا یک ۲۰۱۴ ضلعی فضایی شبکه‌ای بدون رأس تکراری وجود دارد که یک صفحه همه اضلاع آن را در یک نقطه درونی قطع کند؟

ت.  $a, b, c$  سه عدد طبیعی بزرگتر از یک هستند. ثابت کنید سه نقطه در صفحه با فواصل صحیح  $a, b$  و  $c$  یافت می‌شود، اگر و تنها اگر یک چندضلعی شبکه‌ای موجود باشد طوری که تعداد اضلاع آن در سه راستای مختلف برابر  $a, b$  و  $c$  باشد.



موفق باشید

به نام او  
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۳

دوشنبه ۹۳/۶/۱۷

مدت امتحان ۱۰۵ دقیقه

۶. چند جمله‌ای از یک تابع!

$p(x) \in \mathbb{R}[x]$  چندجمله‌ای تکین از درجه‌ی فرد بزرگ‌تر از یک است. همچنین  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  تابعی است که برای هر  $x$  حقیقی داریم  $p(f(x)) = f(p(x))$ .

۱. ثابت کنید برد  $f$  مجموعه‌ای متناهی است.

۲. اگر  $f$  تابعی ناثابت باشد، نشان دهید معادله‌ی  $p(x) = x$  حداقل دو جواب حقیقی متمایز دارد.

۳. نشان دهید برای هر عدد طبیعی  $n > 1$ ، تابع  $f$  با برد  $n$  عضوی و چندجمله‌ای  $p(x)$  پیدا می‌شوند که در همه‌ی شرایط مسئله صدق کنند.



موفق باشید

به نام او  
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۳

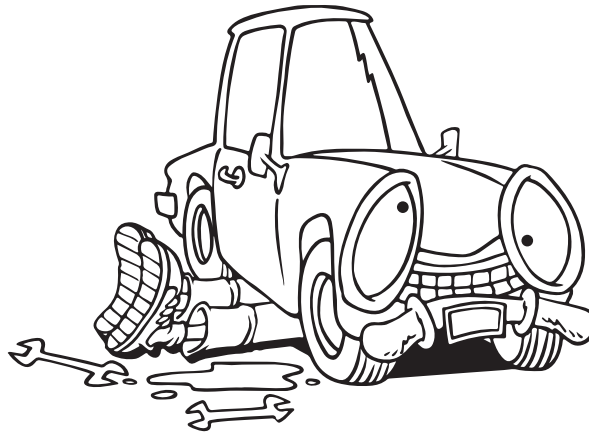
سه‌شنبه ۹۳/۶/۱۸

مدت امتحان ۱۲۰ دقیقه

## ۷. تعمیر ماشین!

همان‌گونه که شاید بدانید، ماشین  $M$  دارای یک ورودی و یک خروجی است که از ورودی آن می‌توان حروف الفبای انگلیسی (مجموعه  $I$ ) را وارد کرد و در خروجی آن در هر لحظه یکی از رنگ‌های  $C = \{c_1, \dots, c_p\}$  نمایش داده می‌شود. این ماشین در هر لحظه وضعیتی دارد که یکی از اعضای مجموعه‌ی متناهی  $S$  است و وارد کردن هر حرف در ورودی آن، وضعیت ماشین را تحت قاعده‌ای از پیش تعیین شده تغییر می‌دهد. خروجی ماشین هم تابعی پوشا از وضعیت آن است. ما فقط خروجی ماشین را می‌بینیم و به طور مستقیم از وضعیت آن اطلاعی نداریم.

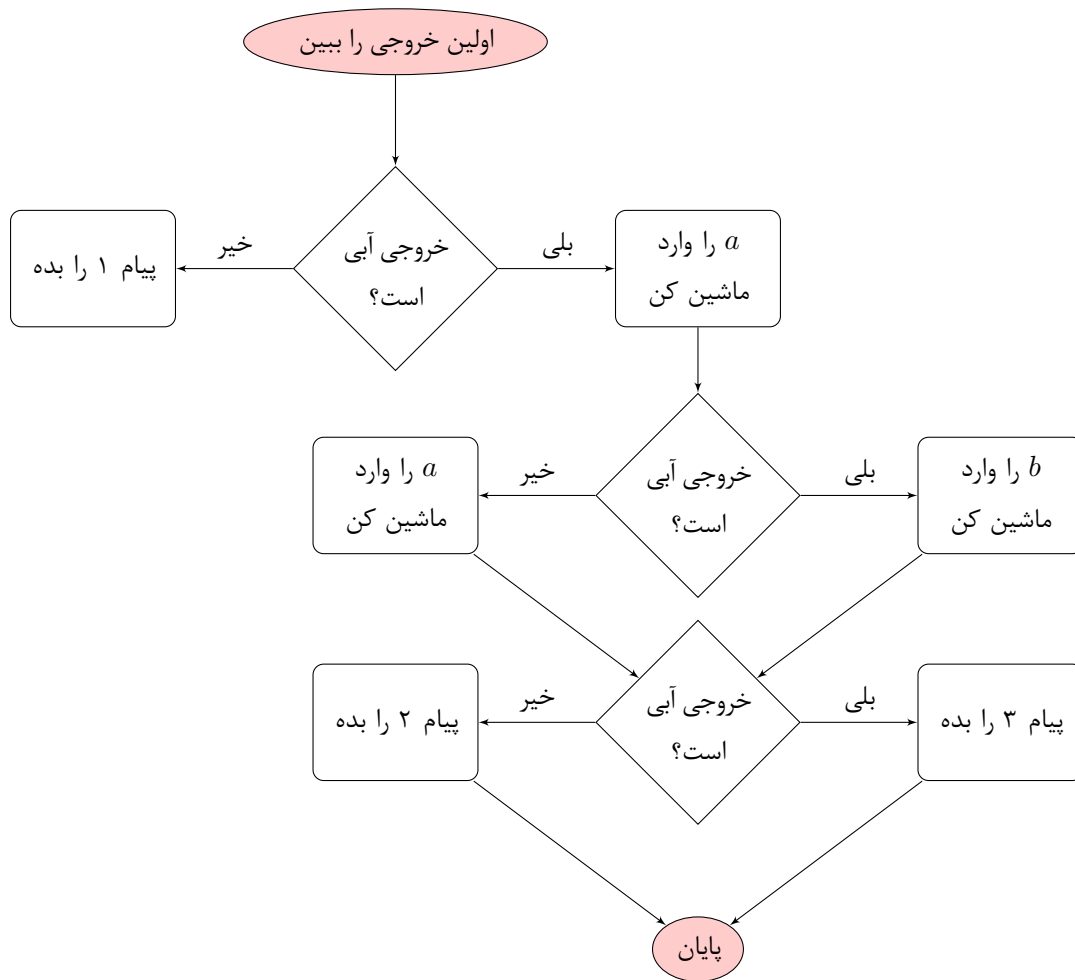
به بیانی دیگر  $M = (S, I, C, t, o)$  که  $S, I, C$  مجموعه‌هایی متناهی و  $t: S \times I \rightarrow S$  و  $o: S \rightarrow C$  دو تابع هستند. قاعده‌ی تغییر وضعیت و  $o$  تابعی پوشاست که خروجی را بر حسب وضعیت تعیین می‌کند. همیشه فرض می‌کنیم که وضعیت‌های متفاوت  $M$  با وارد کردن یک کلمه (دنباله‌ای از حروف) در ورودی و مشاهده‌ی خروجی، از یک‌دیگر قابل تفکیک هستند. (یعنی برای هر دو وضعیت  $s_i$  و  $s_j$ ، کلمه‌ای پیدا می‌شود که با دادن آن کلمه به ماشین، در نهایت خروجی متمایزی تولید شود.)



این را هم احتمالاً می‌دانید که یک دستورالعمل برای ماشین  $M$ ، الگوریتمی برای کار کردن با  $M$  براساس خروجی‌های آن است که در نهایت به یک پیام منجر می‌شود. به عبارت دقیق‌تر در هر مرحله از دستورالعمل، یکی از فرمان‌های وارد کردن یک حرف در ورودی و یا یک پیام (که به معنای پایان دستورالعمل است و ممکن است حاوی اطلاعاتی برای کاربر باشد)، بر اساس خروجی‌هایی که تا این مرحله مشاهده شده است به کاربر داده می‌شود. طول دستورالعمل بیش‌ترین تعداد حروفی است که در همه‌ی اجراهای ممکن آن وارد می‌شود.

مثلاً اگر  $I = \{a, b\}$  و  $C = \{\text{red}, \text{blue}\}$ ، شکل صفحه‌ی بعد یک دستورالعمل به طول دو است.

در این دستورالعمل طی اجراهای مختلف و بسته به شرایط، ممکن است کلمه‌های  $a$ ،  $aa$  یا  $ab$  به عنوان ورودی به ماشین داده شود و چون طول این کلمات حداکثر ۲ است، طول دستورالعمل را ۲ می‌گیریم.



۱. ماشین  $M$ ، وضعیت  $n$  و رنگ خروجی دارد. نشان دهید برای هر دو وضعیت متفاوت  $M$ ، یک کلمه به طول حداکثر  $n - p$  وجود دارد که با وارد کردن آن در ورودی می‌توان دو خروجی متفاوت از این دو وضعیت گرفت. (بعد از وارد کردن هر حرف، وضعیت و در نتیجه خروجی ماشین بنابر قاعده‌ای مشخص تغییر می‌کند، پس وارد کردن یک کلمه از طول  $k$  در ورودی، یک دنباله به طول  $k + 1$  (با احتساب خروجی اولیه) از خروجی‌ها به ما می‌دهد. البته در این سؤال می‌توان فقط آخرین خروجی را در نظر گرفت.)

۲. نشان دهید برای هر ماشین  $n$ -وضعیتی مانند  $M$  می‌توان یک دستورالعمل به طول حداکثر  $n^2$  طراحی کرد که انجام آن وضعیت نهایی دستگاه را (بر اساس خروجی‌ها) با شروع از هر وضعیت نامعلومی به کاربر اطلاع دهد. (یعنی به یک معنی ماشین را تعمیر کرد. چون با دانستن وضعیت ماشین، می‌دانیم برای گرفتن یک خروجی چه ورودی‌ای باید وارد کنیم و وقتی وضعیت ماشین گم شود به یک معنی خراب شده است!)

می‌توانید این مسئله را برای  $\frac{n^2}{3}$  نیز حل کنید؟

موفق باشید



به نام او  
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۳

سه‌شنبه ۹۳/۶/۱۸

مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۸. **چییه بگین و حل!**

برای هر عدد صحیح نامنفی  $n$  چندجمله‌ای  $K_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  به صورت بازگشتی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$K_0 = 1$$

$$K_1(x_1) = x_1$$

$$K_n(x_1, \dots, x_n) = x_n K_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + (x_n^2 + x_{n-1}^2) K_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})$$

$$K_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = K_n(x_n, \dots, x_2, x_1)$$
 نشان دهید

موفق باشید