به نام او

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

شنبه، ۲۳ فروردین ۱۳۹۳ | امتحان اول (روز اول) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱. O مرکز دایره‌ی محیطی ω از مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC است. دایره‌ای به مرکز O رسم می‌کنیم که بر ضلع BC مماس باشد. نقطه‌های X و Y را نقاط تقاطع مماس‌های گذرنده از A بر این دایره با ضلع BC بگیرید به گونه‌ای که X و B یک طرف AO هستند. از نقطه‌ی X خطی به موازات AC رسم می‌کنیم تا خط مماس بر دایره‌ی ω در نقطه‌ی B را در T قطع کند. به طور مشابه از نقطه‌ی Y خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا مماس بر دایره‌ی ω در نقطه‌ی C را در S قطع کند. ثابت کنید TS بر ω مماس است.

۲. همه‌ی چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح مثل P را بیابید که $P(\mathbb{Z}) = \{P(a) : a \in \mathbb{Z}\}$ شامل یک تصاعد هندسی نامتناهی باشد.

۳. یک جدول $n \times n$ از عددهای صحیح نامنفی را <u>خودخواه</u> می‌نامیم، در صورتی که اگر سطرها و ستون‌های آن را با شماره‌های $۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱$ شماره‌گذاری کنیم (از چپ به راست و از بالا به پایین)، برای هر $i, j \in \{۰, ۱, \ldots, n-۱\}$ عدد خانه‌ی (i, j) برابر تعداد iهای سطر jام باشد. برای مثال جدول زیر یک جدول خودخواه ۵×۵ است. ثابت کنید برای $n > ۵$ جدول خودخواه وجود ندارد.

۱	۰	۳	۳	۴
۱	۳	۲	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰
۲	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۰

موفق باشید.

به نام او

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

یک‌شنبه، ۲۴ فروردین ۱۳۹۳ امتحان اول (روز دوم) زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴. حداکثر تعداد جای‌گشت‌های مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,۲۰۱۴\}$ را بیابید که برای هر دو عدد متمایز a و b در این مجموعه، حداکثر در یکی از جای‌گشت‌ها b دقیقاً بعد از a آمده باشد.

۵. n یک عدد طبیعی داده شده است. برای اعداد حقیقی و مثبت $x_۱,x_۲,\ldots,x_{n+۱}$ با حاصل‌ضرب واحد ثابت کنید:

$$\sqrt[x_۱]{n}+\sqrt[x_۲]{n}+\cdots+\sqrt[x_{n+۱}]{n}\geq n^{\sqrt[n]{x_۱}}+n^{\sqrt[n]{x_۲}}+\cdots+n^{\sqrt[n]{x_{n+۱}}}$$

۶. در مثلث ABC، I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی است. عمودی که بر AI از نقطه‌ی I خارج می‌شود اضلاع AC و AB را به ترتیب در B' و C' قطع می‌کند. نقطه‌های $B_۱$ و $C_۱$ به ترتیب روی نیم‌خط‌های BC و CB طوری هستند که $AB=BB_۱$و $AC=CC_۱$. اگر T نقطه‌ی دوم برخورد دایره‌های محیطی مثلث‌های $AB_۱C'$ و $AC_۱B'$ باشد، ثابت کنید مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ATI نقطه‌ای روی BC است.

موفق باشید.

به نام او

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

یک‌شنبه، ۱۴ اردیبهشت ۱۳۹۲ | امتحان دوم (روز اول) | زمان: چهار ساعت و نیم

۱. یک درخت n رأسی داریم که رأس‌های آن را با اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ شماره‌گذاری کرده‌ایم. به این صورت شماره‌ی رأس‌های این درخت را تغییر می‌دهیم که هر بار یکی از یال‌هایی که قبلاً انتخاب نشده را انتخاب می‌کنیم و شماره‌ی رأس‌های دو سر آن را با هم عوض می‌کنیم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که همه‌ی یال‌ها انتخاب شوند. نشان دهید که در نهایت جای‌گشتی روی شماره‌های رأس‌های این درخت اعمال شده که شامل تنها یک دور است.

۲. در مثلث ABC نقطه‌ی متغیر D را روی ضلع BC درنظر می‌گیریم. مراکز دوایر محاطی داخلی مثلث‌های ABC، ABD و ACD به ترتیب I, $I_۱$, $I_۲$ هستند. نقاط M و N، تقاطع دوم (به غیر از A) دایره‌های محیطی دو مثلث $IAI_۱$ و $IAI_۲$ با دایره‌ی محیطی مثلث ABC هستند. ثابت کنید با تغییر مکان نقطه‌ی D، خط MN از نقطه‌ی ثابتی در صفحه می‌گذرد.

۳. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $k > ۱$، تعداد kتایی‌های متوالی از اعداد طبیعی که حاصل‌ضربشان مربع کامل باشد متناهی است.

موفق باشید.

به نام او

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

دوشنبه، ۱۵ اردیبهشت ۱۳۹۳ امتحان دوم (روز دوم) زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴. n را یک عدد طبیعی بگیرید. جای‌گشت $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ از $۱, ۲, \ldots, n$ را مربعی(مکعبی) می‌گویند، هرگاه $a_i a_{i+۱} + ۱$ برای هر $۱ \leq i \leq n - ۱$ مربع (مکعب) کامل باشد.

الف. نشان دهید برای بی‌نهایت عدد طبیعی n، حداقل یک جای‌گشت مربعی از $۱, ۲, \ldots, n$ وجود دارد.

ب. نشان دهید که برای هیچ عدد طبیعی nای جای‌گشت مکعبی از $۱, ۲, \ldots, n$ وجود ندارد.

۵. فرض کنید x، y و z اعداد حقیقی مثبتی باشند که $x^۲ + y^۲ + z^۲ = x^۲y^۲ + y^۲z^۲ + z^۲x^۲$. نشان دهید:

$$(x-y)^۲(y-z)^۲(z-x)^۲ \leq ۲\left((x^۲-y^۲)^۲ + (y^۲-z^۲)^۲ + (z^۲-x^۲)^۲\right)$$

۶. n پاره‌خط در صفحه داریم که یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند و در بین $۲n$ نقطه‌ی انتهایی این پاره‌خط‌ها هیچ سه نقطه‌ای هم‌خط نیستند. آیا همواره می‌توان یک $۲n$ضلعی ساده یافت به طوری که رئوس آن دو سر این پاره‌خط‌ها باشند، و ضمناً هر یک از این پاره‌خط‌ها کاملاً داخل و یا روی محیط این $۲n$ضلعی قرار گیرند؟

موفق باشید.

به نام او

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

چهارشنبه، ۱۷ اردیبهشت ۱۳۹۳ | امتحان سوم (روز اول) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱. نقطه‌های A_1 و A_2 به ترتیب محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع BC و پای نیم‌ساز داخلی رأس A از مثلث ABC هستند. نقطه‌های B_1، B_2، C_1 و C_2 هم به طور مشابه تعریف می‌شوند. فرض کنید عمود وارد از A_1 بر B_2C_2 نیم‌ساز داخلی رأس A را در A' قطع کند. نقطه‌های B' و C' هم به طور مشابه تعریف می‌شوند. نشان دهید دو مثلث $A_1B_1C_1$ و $A'B'C'$ هم‌نهشت هستند.

۲. آیا تابع غیرهمانی $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ وجود دارد طوری که: ((تعداد مقسوم‌علیه‌های m برابر با $f(n)$ باشد، اگر و تنها اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های $f(m)$ برابر با n باشد.))

۳. m و n دو عدد طبیعی و $p(x)$، $q(x)$ و $h(x)$ چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب حقیقی هستند که $p(x)$ نزولی است. به علاوه می‌دانیم برای هر عدد حقیقی x:

$$p\left(q(nx+m)+h(x)\right)=n\left(q(p(x))+h(x)\right)+m$$

نشان دهید تابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ وجود ندارد که

$$g(q(p(x))+h(x))=g(x)^{2}+1$$

موفق باشید.

به نام او

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

پنج‌شنبه، ۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۳ امتحان سوم (روز دوم) زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴. همه‌ی توابع $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ را بیابید که برای هر x و y حقیقی و مثبت داشته باشیم:

$$f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right)+f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right)=f(y)$$

۵. مجموعه‌ی $X=\{x_1<x_2<\cdots<x_n\}$ از اعداد طبیعی داده شده است به طوری که برای هر $1<i\leq n$، $1\leq x_i-x_{i-1}\leq 2$. عدد حقیقی a را ((خوب)) می‌نامیم، هرگاه $1\leq j\leq n$ موجود باشد که $|x_j-a|\leq \frac{1}{2}$. هم‌چنین یک زیرمجموعه از X را ((متمرکز)) می‌گوییم، هرگاه میانگین اعضای آن عددی خوب باشد. نشان دهید حداقل 2^{n-3} تا از زیرمجموعه‌های X متمرکز هستند.

۶. I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است. X نقطه‌ای روی کمان BC از دایره‌ی محیطی این مثلث است، به گونه‌ای که اگر E و F به ترتیب پای عمودهای وارد از X بر BI و CI باشند و M وسط EF باشد، آن‌گاه $MB=MC$. اگر D پای عمود وارد از I بر BC باشد، ثابت کنید که $\angle BAD=\angle CAX$.

موفق باشید.