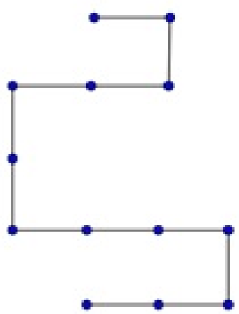
بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

راه‌حل آزمون خلاقیت ۱۳۹۲

سؤال شماره ۱. چند چوبه!

الف. یک $(n+۱)$مینو در نظر بگیرید و مراکز مربع‌های مجاور در آن را به هم وصل کنید. به وضوح گراف حاصل هم‌بند است پس حداقل n یال دارد. حال یک زیردرخت آن یک n چوبه می‌شود. $(n+۱)$مینوی مربوط به هر n چوبه، در صورت وجود یک‌تا است. پس S_n بزرگ‌تر یا مساوی تعداد n چوبه‌های بدون دور است و این مقدار هم حداقل $M_{n+۱}$ است.



ب.

راه اول. [۱]: می‌توانیم مسیرهای nتایی به سمت بالا و راست و چپ را بشماریم و کران پایین به‌تری برای S_n به دست آوریم. این گونه مسیرها متناظر است با تعداد رشته‌های nتایی از نمادهای $\uparrow, \leftarrow, \rightarrow$ به طوری‌که هیچ $\leftarrow, \rightarrow$ مجاور نداشته باشند. اگر تعداد این رشته‌ها را A_n نام‌گذاری کنیم آن‌گاه $۸S_n \geq A_n$، زیرا هر چندچوبه را حداکثر به ۸ طریق می‌توان روی صفحه قرار داد.

A_n در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$A_۱ = ۳,\ A_۲ = ۷,\ A_n = ۲A_{n-۱} + A_{n-۲}$$

به عنوان تمرین می‌توانید این رابطه‌ی بازگشتی را با حالت‌گیری روی اولین نماد هر رشته‌ی nتایی به دست آورید.
معادله‌ی مشخصه‌ی این رابطه را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن را می‌یابیم: $t^۲ = ۲t + ۱$ و در نتیجه $t_۱, t_۲ = ۱ \pm \sqrt{۲}$.
با حل این رابطه‌ی بازگشتی درمی‌یابیم که: $A_n = \alpha(۱+\sqrt{۲})^n + \beta(۱-\sqrt{۲})^n$. با مقدارگذاری اولیه‌ی $n = ۱, ۲$، مقدار α, β به دست می‌آید:

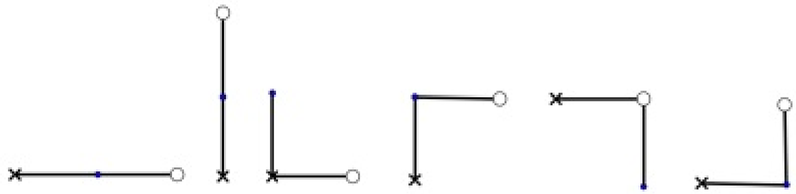
$$\begin{cases} \alpha(۱+\sqrt{۲}) + \beta(۱-\sqrt{۲}) = ۳ \\ \alpha(۳+۲\sqrt{۲}) + \beta(۳-۲\sqrt{۲}) = ۷ \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{۱+\sqrt{۲}}{۲},\ \beta = \frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}$$

پس: $A_n = \frac{۱}{۲}\left[(۱+\sqrt{۲})^{n+۱} + (۱-\sqrt{۲})^{n+۱}\right]$.
از طرفی: $۱ + \sqrt{۲} > ۲/۴۱$ و $|۱ - \sqrt{۲}| < ۱$. پس از جایی به بعد $S_n \geq \frac{A_n}{۸} > (۲/۴۱)^n$.

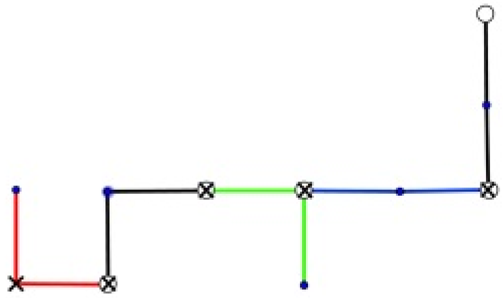
راه دوم. همه‌ی ۲چوبه‌ها را در نظر بگیرید که با انتقال به یک‌دیگر تبدیل نمی‌شوند. تعداد این ۲چوبه‌ها ۶تا است. در هرکدام رأس سمت راست‌ترین، و در بین آن‌ها بالاترین را با ∘، و رأس سمت چپ‌ترین و در بین آن‌ها پایین‌ترین را با ×

[۱] برای مطالعه‌ی بیش‌تر می‌توانید به مقاله‌ی «سرگذشت چندچوبه» در شماره‌ی تابستان ۹۲ فصل‌نامه‌ی پرگار مراجعه کنید.

مشخص می‌کنیم.



حال برای nهای به اندازه‌ی کافی بزرگ، $[\frac{n}{۲}]$ تا از این ۲چوبه‌ها را انتخاب می‌کنیم و به ترتیب رأس $\times$ هریک را به رأس $\circ$ قبلی وصل می‌کنیم. (اگر n فرد بود، یک چوب کبریت افقی هم به $\circ$ آخرین ۲چوبه وصل می‌کنیم.)



هر یک از این $[\frac{n}{۲}]$ تا ۲چوبه، ۶ حالت دارند، به این ترتیب $۶^{[\frac{n}{۲}]}$ تا n چوبه به دست می‌آید که با انتقال به یک‌دیگر تبدیل نمی‌شوند. هر n چوبه حداکثر ۸ بار در بین این $۶^{[\frac{n}{۲}]}$ شکل آمده است. پس: $۸S_n \geq ۶^{[\frac{n}{۲}]} \geq \sqrt{۶}^{n-۱}$. از طرفی $\sqrt{۶} \geq ۲/۴$ پس از جایی به بعد: $S_n \geq (۲/۴)^n$.

برای کران بالا هم با استفاده از لم زیر مسئله را اثبات می‌کنیم.

لم. در هر گراف هم‌بند که در آن درجه‌ی هر رأس زوج است، دوری وجود دارد که از هر یال دقیقاً یک بار عبور کند.

اثبات. با استقرا روی تعداد یالها و شروع از یک رأس و خارج شدن از هر رأسی که به آن وارد می‌شویم حکم نتیجه می‌شود.
□

پس اگر می‌توانستیم درجه‌ی هر رأس از گراف چندچوبه را زوج کنیم، آن‌گاه طبق قضیه‌ی بالا یک دور در آن گراف یافت می‌شد که از هر یال دقیقاً یک بار عبور کند. مثلاً می‌توانیم هر یال را دو بار رسم کنیم. در این صورت یک گراف با $۲n$ یال داریم که در آن درجه‌ی هر رأس زوج است. پس طبق قضیه‌ی بالا دوری در این گراف وجود دارد که از همه‌ی یال‌ها عبور کند. پس تعداد دورهای به طول $۲n$ روی شبکه بیش‌تر یا مساوی تعداد nچوبه‌ها است. کافی است کران بالایی برای تعداد دورهای به طول $۲n$ روی شبکه بیابیم.
تعداد دورهای به طول $۲n$ روی شبکه هم حداکثر برابر است با تعداد رشته‌های $۲n$تایی با استفاده از نمادهای $\leftarrow, \uparrow, \rightarrow, \downarrow$ به طوری‌که در هر رشته تعداد $\downarrow, \uparrow$ها باهم، و تعداد $\rightarrow, \leftarrow$ها باهم برابر باشد. این تعداد هم برابر است با انتخاب تعدادی

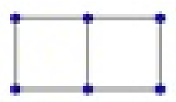
مکان برای $\uparrow$ و همان تعداد مکان برای $\downarrow$ و سپس انتخاب نصف مکان‌های باقی‌مانده برای $\leftarrow$ و قرار دادن $\rightarrow$ در بقیه‌ی جاها. یعنی:

$$\sum_{k=۱}^{n}\binom{۲n}{k}\binom{۲n-k}{k}\binom{۲n-۲k}{n-k}$$

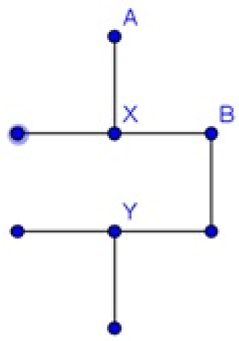
با ساده کردن عبارت بالا به دست می‌آید:

$$\sum_{k=۱}^{n}\binom{۲n}{k}\binom{۲n-k}{k}\binom{۲n-۲k}{n-k}=\sum_{k=۰}^{n}\frac{(۲n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}=\binom{۲n}{n}\sum_{k=۱}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}=\binom{۲n}{n}^{۲}$$

و $\binom{۲n}{n}^{۲} \leq (۲^{۲n})^{۲} = ۱۶^{n}$. پس تعداد دورهای به طول $۲n$ روی شبکه، و به تبع آن تعداد nچوبه‌ها حداکثر ۱۶^n است.



ج. برای $n = ۷$ چندچوبه‌ی مقابل نادان است. برای $n > ۷$ اگر از نقطه‌ی A یا B در شکل زیر شروع کنیم و $n - ۷$ یال به سمت بالا یا راست برویم، چندچوبه‌ی حاصل نادان است زیرا در چندچوبه شامل پاره‌خط عمودی XY، این پاره‌خط همسایه‌ای نخواهد داشت. پس حداقل $۲^{n-۷} + ۲^{n-۷} = ۲^{n-۶}$ تا n چوبه‌ی نادان یافتیم.



د. یک مسیر به سمت بالا و راست در نظر بگیرید و با بی‌نهایت نسخه از آن، یک مسیر نامتناهی به سمت بالا و راست تشکیل دهید.

لم ۱. اگر مسیر نامتناهی بالا و راست را یک واحد به سمت بالا و چپ انتقال دهیم، مسیر حاصل با مسیر اولیه در هیچ نقطه‌ای اشتراک ندارد.

اثبات. فرض کنید یک مسیر و انتقال‌یافته‌اش در نقطه‌ای مثل x اشتراک داشته باشند. پس x و انتقال‌یافته x به سمت پایین و راست، هر دو روی مسیر اولیه هستند که چنین چیزی با بالا و راست بودن مسیر در تناقض است.

□

حال مسیر نامتناهی را L بنامید و بی نهایت نسخه انتقال‌یافته به سمت بالا و چپ از این مسیر را در کنارش قرار می‌دهیم. طبق لم ۱ هیچ دو مسیری اشتراک ندارند. حال قرینه L نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم (خط $y = x$) را L' می‌نامیم.

لم ۲. L, L' در هیچ یالی اشتراک ندارند.

اثبات. فرض کنید یال e در L, L' باشد. پس e و متقارن e نسبت به خط $y = x$، هر دو روی L هستند که چنین چیزی با بالا و راست بودن L در تناقض است.

□

در نتیجه می‌توان L, L' و انتقال‌یافته‌های آن‌ها (به سمت بالا و چپ) را روی صفحه قرار داد و هیچ دو مسیری اشتراک یالی ندارند. حال ادعا می‌کنیم هر یال پوشیده می‌شود. یال e را در نظر بگیرید و آن را آن قدر به سمت بالا و چپ (یا پایین و راست) انتقال دهید تا به مسیر L برخورد کند. این برخورد یا در یک یال اتفاق افتاده است و یا در یک رأس، در حالت اول e روی انتقال‌یافته‌ی L است و در حالت دوم e روی انتقال‌یافته‌ی L' است.

هـ برای کران پایین اگر در راه حل دوم قسمت (ب)، به جای ۲چوبه‌ها از ۴چوبه‌ها استفاده کنیم به کران زیر می‌رسیم: $S_n \geq \left(\sqrt[۴]{۸۸}\right)^n \sim (۳/۰۶)^n$.

برای کران بالا حداکثر ۱۶×۸^nشکل هم‌بند رسم می‌کنیم و ادعا می‌کنیم هر n چوبه حداقل یک بار رسم شده است. اشکال را به این صورت رسم می‌کنیم: در مرحله‌ی اول یک رأس رسم می‌کنیم، آن را علامت می‌زنیم و $۲^۴$ حالت برای یال‌های متصل به آن را رسم می‌کنیم. پس تا این‌جا ۱۶ شکل رسم شده است.

در هر مرحله، از هر شکل رسم‌شده در مرحله‌ی قبلی، حداکثر ۸ شکل جدیدتر می‌سازیم و آن‌ها را رسم می‌کنیم. به این صورت که هر یک از اشکال رسم‌شده را در نظر می‌گیریم و در بین رئوس علامت‌نخورده‌اش، رأس سمت راست‌ترین و در بین آن‌ها بالاترین را علامت می‌زنیم، حداقل یکی از یال‌های این رأس رسم شده است زیرا شکل هم‌بند است. در بین یال‌های دیگر منتهی به این رأس به حداکثر $۸ = ۲^۳$ حالت برخی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم و شکل جدیدی با اضافه کردن این یال‌ها رسم می‌کنیم.

پس در هر مرحله اشکال هم‌بند هستند و تعداد آن‌ها حداکثر ۸ برابر مرحله‌ی قبلی است. از طرفی هر n چوبه حداکثر $n + ۱$ رأس دارد، در نتیجه حتماً پس از حداکثر n مرحله رسم می‌شود. پس:

$$S_n \leq ۱۶ + ۱۶ \times ۸ + ۱۶ \times ۸^۲ + \ldots + ۱۶ \times ۸^{n-۱} \leq ۱۶ \times ۸^n$$

و از جایی به بعد: $۱۶ \times ۸^n \leq (۸/۰۱)^n < ۱۲^n$.

سؤال شماره ۲. فاصله‌ی بین دوایر!

دایره‌ی به مرکز O و شعاع R را با $C(O,R)$ نشان می‌دهیم. اگر $\omega_1 = C(O_1,R_1)$ و $\omega_2 = C(O_2,R_2)$ می‌دانیم:
$$d(\omega_1,\omega_2)^2 = O_1O_2^2 - (R_1 - R_2)^2$$
و $d(\omega_1,\omega_2)$ تعریف‌شده است اگر و تنها اگر عبارت سمت راست نامنفی باشد. این موضوع معادل است با این که ω_1 و ω_2 متداخل نباشند و یا مماس داخلی باشند.

الف. قرار دهید $\omega = C(O,R)$ و $\omega_i = C(O_i,R_i)$ داریم:
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(\omega,\omega_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} OO_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R-R_i)^2$$
اگر $\bar{R}$ را میانگین اعداد $R_1,\dots,R_n$ بگیریم، آن‌گاه داریم:
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R-R_i)^2 = R^2 - 2R\bar{R} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i^2 = (R-\bar{R})^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{R}-R_i)^2$$
به طور مشابه، اگر $\bar{O}$ را مرکز ثقل نقاط $O_1,\dots,O_n$ بنامیم، خواهیم داشت:
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} OO_i^2 = O\bar{O}^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{O}O_i^2$$
(برای اثبات این رابطه باید مختصات این نقاط را در نظر بگیریم و از رابطه‌ی مشابه برای R_iها استفاده کنیم) بنابراین
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(\omega,\omega_i)^2 = O\bar{O}^2 + (R-\bar{R})^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{O}O_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{R}-R_i)^2$$
پس دایره‌ی $C(\bar{O},\bar{R})$ در خاصیت مسأله صدق می‌کند.
حال فرض کنید $\bar{\omega}_1 = C(P_1,r_1)$ و $\bar{\omega}_2 = C(P_2,r_2)$ دو دایره باشند که در فرض مسئله صدق می‌کنند. اگر $\omega = C(O,R)$ را دایره‌ای بگیریم که با همه‌ی $\omega_1,\dots,\omega_n$ و $\bar{\omega}_1$ و $\bar{\omega}_2$ متخارج است، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم:
$$\begin{aligned} & d(\omega,\bar{\omega}_1)^2 - d(\omega,\bar{\omega}_2)^2 = \text{Constant} \\ \Rightarrow\ & OP_1^2 - OP_2^2 + (R-r_1)^2 - (R-r_2)^2 = \text{Constant} \\ \Rightarrow\ & OP_1^2 - OP_2^2 - 2R(r_1 - r_2) = \text{Constant} \end{aligned}$$

(که منظور از Constant یک مقدار ثابت است.)
با ثابت نگه‌داشتن O نتیجه می‌گیریم $r_1 = r_2$. بنابراین $OP_1^2 - OP_2^2$ نیز مقداری ثابت است. بنابراین $P_1 = P_2$ و در نتیجه $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$. پس $\bar{\omega} = C(\bar{O},\bar{R})$ تنها جواب مسئله است.

ب. برای $i = 1,2$ قرار دهید $\omega_i = C(O_i,R_i)$ و $\omega = C(O,R)$. هم‌چنین فرض کنید $O_i = (x_i, 0)$ و $O = (x,y)$. می‌توانیم بنویسیم:
$$x_3 = x_1 + \alpha(x_2 - x_1) = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$$
که α یک عدد حقیقی است. چون فاصله‌ی O_1 و O_2 از مماس مشترک خارجی ω_1 و ω_2 به‌ترتیب برابر با R_1 و R_2 است، نتیجه می‌گیریم که فاصله‌ی O_3 از این خط برابر است با $|(1-\alpha)R_1 + \alpha R_2|$ (اگر داخل قدر مطلق منفی باشد، به این

معنی است که O_3 و O_1 در دو طرف خط مذکور هستند). بنابراین:

$$R_3 = |(1-\alpha)R_1 + \alpha R_2|$$

مرکز ثقل ω_1 و ω_2 نیز برابر است با $\bar{\omega} = C\left(\left(\frac{x_1+x_2}{2}, 0\right), \frac{R_1+R_2}{2}\right)$ که یعنی در رابطه‌ی مربوط به ω_3، $\alpha = \frac{1}{2}$ باشد. می‌دانیم:

$$\begin{aligned} & d(\omega, \omega_1) = d(\omega, \omega_2) \\ & \Rightarrow OO_1^2 - (R-R_1)^2 = OO_2^2 - (R-R_2)^2 \\ & \Rightarrow OO_1^2 - OO_2^2 = R_1^2 - R_2^2 - 2R(R_1 - R_2) \\ & \Rightarrow (x-x_1)^2 - (x-x_2)^2 = R_1^2 - R_2^2 - 2R(R_1-R_2) \\ & \Rightarrow 2x(x_1-x_2) - 2R(R_1-R_2) = x_1^2 - x_2^2 - R_1^2 + R_2^2 \end{aligned}$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} d(\omega, \omega_3)^2 &= (x-x_3)^2 + y^2 - (R-R_3)^2 \\ &= (x - ((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2))^2 + y^2 - (R - ((1-\alpha)R_1 + \alpha R_2))^2 \\ &= ((x-x_1) + \alpha(x_1 - x_2))^2 + y^2 - ((R-R_1) + \alpha(R_1 - R_2))^2 \end{aligned}$$

دایره‌های ω، ω_1 و ω_2 را ثابت بگیرید و α را متغیر. بنابراین $d(\omega, \omega_3)^2$ یک چندجمله‌ای درجه ۲ برحسب α است. ضریب α^2 در این چندجمله‌ای برابر است با $(x_1-x_2)^2 - (R_1-R_2)^2$ که این مقدار نامنفی است زیرا $d(\omega_1, \omega_2)$ تعریف‌شده است. هم‌چنین ضریب α برابر است با:

$$2(x_1-x_2)(x-x_1) - 2(R_1-R_2)(R-R_1)$$

طبق رابطه‌ای که بین x و R به‌دست آوردیم، این مقدار برابر است با:

$$x_1^2 - R_1^2 - x_2^2 + R_2^2 - 2x_1(x_1-x_2) + 2R_1(R_1-R_2) = -(x_1-x_2)^2 + (R_1-R_2)^2$$

بنابراین ضریب α^2 و α قرینه‌ی یک‌دیگر هستند. در صورتی که این ضرایب برابر با صفر باشند (یعنی ω_1, ω_2 مماس داخل باشند)، مقدار $d(\omega, \omega_3)$ مستقل از α است. در غیر این صورت، کم‌ترین مقدار $d(\omega, \omega_3)$ به‌ازای $\alpha = \frac{1}{2}$ اتفاق می‌افتد و حکم ثابت می‌شود.

ج. ابتدا توجه کنید که مرکز اصلی ω_1 و ω_2 و ω_3 به عنوان دایره‌ای با شعاع صفر از این سه دایره به یک فاصله است (در صورتی که خارج آن‌ها باشد). پس حدس می‌زنیم:

لم. اگر هر یک از دو دایره‌ی C_1 و C_2 از دو دایره‌ی ω_1 و ω_2 به یک فاصله باشد، آن‌گاه مرکز تجانس مستقیم C_1 و C_2 روی محور اصلی ω_1 و ω_2 است. در صورتی که مرکز تجانس مستقیم C_1 و C_2 تعریف نشده باشد (یعنی شعاع آن‌ها مساوی باشد)، خط‌المرکزین C_1 و C_2 موازی با محور اصلی ω_1 و ω_2 است.

فرض کنید لم درست باشد. در صورتی که مراکز ω_1، ω_2 و ω_3 هم‌خط نباشند، آن‌گاه محورهای اصلی دوبه‌دوی آن‌ها هم‌رس‌اند و موازی نیستند. حال طبق لم فوق مرکز اصلی ω_1، ω_2 و ω_3 در شرایط مسئله صدق می‌کند. در صورتی که

مراکز آن‌ها هم‌خط باشند، محورهای اصلی موازی هستند. اگر محورهای اصلی متمایز باشند، آن‌گاه حداکثر یک دایره از همه‌ی ω_iها به یک فاصله است و حکم به انتفاء مقدم درست است.

راه اول. قرار دهید $\omega_i = C(O_i, R_i)$ و $C_i = C(P_i, r_i)$. فرض کنید $O_i = (x_i, ۰)$ و $P_i = (a_i, b_i)$. اگر نقطه‌ی $(x, ۰)$ روی محور اصلی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ باشد، آن‌گاه:

$$(x - x_۱)^۲ - R_۱^۲ = (x - x_۲)^۲ - R_۲^۲ \Rightarrow x = \frac{x_۱^۲ - x_۲^۲ - R_۱^۲ + R_۲^۲}{۲(x_۱ - x_۲)}$$

این رابطه، معادله‌ی محور اصلی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ است. مقدار فوق را c می‌نامیم. در اثبات قسمت (ب) به‌دست آوردیم:

$$۲a_i(x_۱ - x_۲) - ۲r_i(R_۱ - R_۲) = x_۱^۲ - {R_۱}^۲ - x_۲^۲ + R_۲^۲ \Rightarrow a_i = r_i \frac{R_۱ - R_۲}{x_۱ - x_۲} + c$$

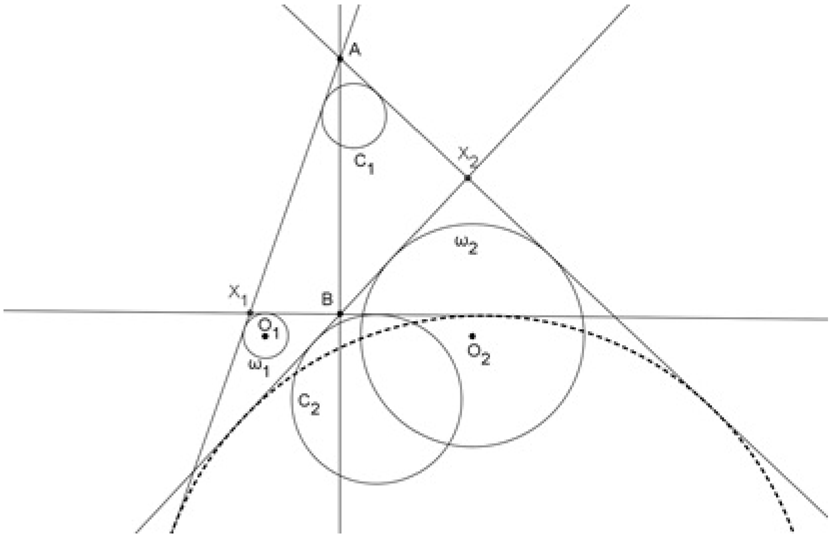
مرکز تجانس $C_۱$ و $C_۲$ روی $P_۱P_۲$ است. پس می‌توانیم بنویسیم $S = (۱ - \alpha)P_۱ + \alpha P_۲$. با توجه به نسبت فاصله‌های آن از $P_۱$ و $P_۲$، می‌توان دید: $S = \frac{r_۲}{r_۲ - r_۱}P_۱ - \frac{r_۱}{r_۲ - r_۱}P_۲$ (در صورتی که $r_۱ \neq r_۲$). بنابراین مؤلفه‌ی اول S برابر است با:

$$\frac{r_۲ a_۱ - r_۱ a_۲}{r_۲ - r_۱} = \frac{۱}{r_۲ - r_۱}\left[r_۲\left(r_۱\frac{R_۱ - R_۲}{x_۱ - x_۲} + c\right) - r_۱\left(r_۲\frac{R_۱ - R_۲}{x_۱ - x_۲} + c\right)\right] = c$$

بنابراین S روی محور اصلی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ است.

در صورتی که $r_۱ = r_۲$، طبق روابط فوق خواهیم داشت $a_۱ = a_۲$. پس خط‌المرکزین $C_۱$ و $C_۲$ موازی محور اصلی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ است.

راه دوم. برای هر i و j، یکی از مماس مشترک‌های C_i و ω_j را رسم کنید و تقاطع‌های آن‌ها را مطابق با شکل A، B، $X_۱$ و $X_۲$ بنامید. مسئله را تنها در حالتی حل می‌کنیم که شکل مسئله شبیه به شکل زیر باشد. در حالت‌های دیگر استدلال مشابه است (البته باید مماس مشترک‌ها به طور مناسبی انتخاب شوند. نوشتن راه حلی که در همه‌ی حالت‌ها معتبر باشد نیاز به تعاریف و نمادگذاری‌های زیادی دارد که از حوصله‌ی خواننده خارج است). با توجه به این که $C_۱$ از $\omega_۱$ و $\omega_۲$ به یک فاصله است، نتیجه می‌گیریم که A نیز از این دو دایره به یک فاصله است. پس A روی محور اصلی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ است. به طور مشابه، B نیز روی محور اصلی آن‌ها است. هم‌چنین با توجه به برابری دو مماس رسم شده از $X_۱$ بر $\omega_۱$ و دو مماس رسم شده از $X_۲$ بر $\omega_۲$ به دست می‌آوریم: $BX_۱ + AX_۱ = BX_۲ + AX_۲$ بنابراین امتداد اضلاع چهارضلعی $AX_۱BX_۲$ مطابق شکل بر یک دایره مثل C مماس‌اند. حال A مرکز تجانس مستقیم C و $C_۱$ است و B مرکز تجانس مستقیم C و $C_۲$. پس طبق قضیه‌ی سه مرکز تجانس، مرکز تجانس مستقیم $C_۱$ و $C_۲$ روی AB است و حکم ثابت می‌شود.



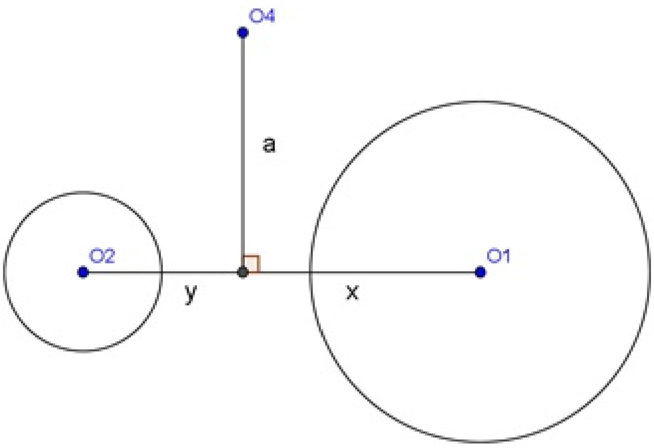
د. خیر.

قرار دهید $\omega_i = C(O_i, R_i)$ و فاصله‌ی O_i و O_j را d_{ij} بنامید. طبق فرض باید داشته باشیم:

$$d_{ij}^{۲} - (R_i - R_j)^{۲} = ۱$$

چون تفاضل R_iها در این روابط ظاهر می‌شود، پس با افزایش یا کاهش همه‌ی شعاع‌ها به مقدار برابر، روابط فوق تغییری نمی‌کنند. پس می‌توانیم فرض کنیم $R_۴ = ۰$. هم‌چنین فرض کنید $R_۱ \geq R_۲ \geq R_۳$. $O_۴$ روی محور اصلی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ است. مطابق شکل زیر داریم:

$$\begin{aligned} a^{۲} + x^{۲} - R_۱^{۲} &= ۱ \\ a^{۲} + y^{۲} - R_۲^{۲} &= ۱ \\ (x+y)^{۲} - (R_۱ - R_۲)^{۲} &= ۱ \end{aligned}$$



با کم کردن دو رابطه‌ی اول از رابطه‌ی سوم به‌دست می‌آوریم:

$$۲xy + ۲R_۱R_۲ + ۲ - ۲a^{۲} = ۱ \Rightarrow a = \sqrt{\frac{۱}{۲} + xy + R_۱R_۲}$$

از طرفی با تفاضل دو رابطه‌ی اول داریم:

$$\begin{cases} x^۲ - y^۲ = R_۱^۲ - R_۲^۲ \\ x + y = d_{۱۲} \end{cases} \Rightarrow x - y = \frac{R_۱^۲ - R_۲^۲}{d_{۱۲}}$$

$$\Rightarrow \{x, y\} = \frac{d_{۱۲}}{۲} \pm \frac{R_۱^۲ - R_۲^۲}{۲d_{۱۲}}$$

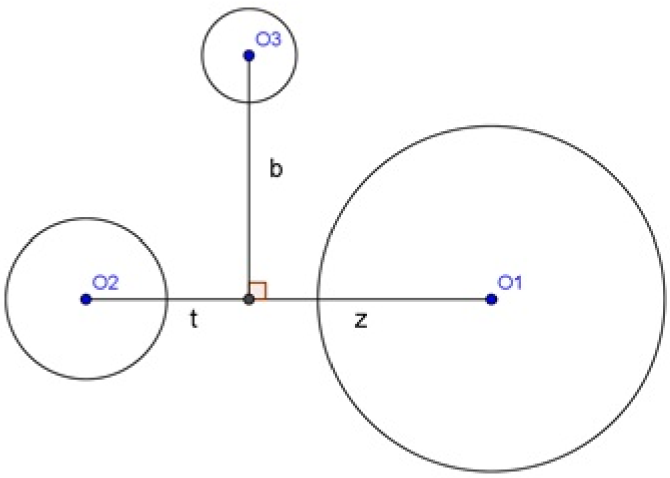
$$\Rightarrow xy = \frac{d_{۱۲}^۲}{۴} - (\frac{R_۱^۲ - R_۲^۲}{d_{۱۲}})^۲$$

بنابراین:

$$a = \sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{d_{۱۲}^۲}{۴} - \frac{(R_۱^۲ - R_۲^۲)^۲}{۴d_{۱۲}^۲} + R_۱R_۲}$$

حال وضعیت $\omega_۱, \omega_۲, \omega_۳$ را بررسی می‌کنیم. به طور مشابه، با کوچک کردن هر سه شعاع به اندازه‌ی $R_۳$ به‌دست می‌آوریم:

$$b = \sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{d_{۱۲}^۲}{۴} - \frac{((R_۱ - R_۳)^۲ - (R_۲ - R_۳)^۲)^۲}{۴d_{۱۲}^۲} + (R_۱ - R_۳)(R_۲ - R_۳)}$$



دو حالت در نظر می‌گیریم:

- **حالت اول**. فرض کنید $O_۳$ و $O_۴$ دو طرف خط $O_۱O_۲$ باشند. در این صورت داریم:

$$O_۳O_۴^۲ - R_۴^۲ = ۱ \Rightarrow ۱ + R_۴^۲ = O_۳O_۴^۲ \geq (a + b)^۲ \geq a^۲ + b^۲$$

اما داریم:

$$a^۲ > \frac{۱}{۲} + R_۱R_۲$$

$$b^۲ > \frac{۱}{۲} + (R_۱ - R_۳)(R_۲ - R_۳)$$

بنابراین:

$$R_۴^۲ > R_۱R_۲ + (R_۱ - R_۳)(R_۲ - R_۳) \Rightarrow (R_۱ + R_۲)R_۳ > ۲R_۱R_۲$$

اما این با $R_۱ \geq R_۲ \geq R_۳$ متناقض است.

- **حالت دوم.** O_3 و O_4 یک طرف خط O_1O_2 هستند. در این صورت:

$$\begin{aligned}
& 1 + R_3^2 = (a-b)^2 + (x-z)^2 = (a^2+x^2) + (b^2+z^2) - 2ab - 2xz \\
&= 1 + R_1^2 + 1 + (R_1 - R_3)^2 - 2ab - 2xz \\
&\Rightarrow 0 = 1 + 2R_1^2 - 2R_1R_3 - 2ab - 2xz \\
&\Rightarrow 4ab + 4xz = 2 + 4R_1(R_1 - R_3)
\end{aligned}$$

از طرفی با قرار دادن $d_{12}^2 = 1 + (R_1 - R_2)^2$ به‌دست می‌آوریم:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{d_{12}^2}{4} - \frac{(R_1^2 - R_2^2)^2}{4d_{12}^2} + R_1R_2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{(R_1+R_2)^2}{4} - \frac{(R_1-R_2)^2(R_1+R_2)^2}{4(1+(R_1-R_2)^2)}}$$

و به طور مشابه:

$$b = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{(R_1+R_2-2R_3)^2}{4} - \frac{(R_1-R_2)^2(R_1+R_2-2R_3)^2}{4(1+(R_1-R_2)^2)}}$$

پس اگر قرار دهیم:

$$\begin{aligned}
t &:= R_1 - R_2 \\
s &:= R_1 + R_2 - 2R_3 \\
r &:= R_1 + R_2
\end{aligned}$$

آن‌گاه:

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{r^2}{4} - \frac{r^2t^2}{4(1+t^2)}} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{r^2}{4(1+t^2)}} \\
b &= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{s^2}{4(1+t^2)}}
\end{aligned}$$

هم‌چنین:

$$xz = \left(\frac{d_{12}}{2} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{2d_{12}}\right)\left(\frac{d_{12}}{2} + \frac{(R_1-R_3)^2 - (R_2-R_3)^2}{2d_{12}}\right) = \frac{1+t^2}{4} + \frac{rt}{4} + \frac{st}{4} + \frac{rst^2}{4(1+t^2)}$$

حال داریم:

$$\begin{aligned}
& 4ab + 4xz = 2 + 4R_1(R_1 - R_3) \\
& \Rightarrow \sqrt{\left(3 + \frac{r^2}{1+t^2}\right)\left(3 + \frac{s^2}{1+t^2}\right)} + 1 + t^2 + rt + st + \frac{rst^2}{1+t^2} = 2 + (r+t)(s+t)
\end{aligned}$$

با ضرب در $1 + t^2$ و ساده کردن به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{(3 + 3t^2 + r^2)(3 + 3t^2 + s^2)} = 1 + t^2 + rs$$

اما این با نامساوی کوشی-شوارتز در تناقض است.

سؤال شماره ۳. تولید توابع!

به اختصار $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k}$ را با f^k نمایش می‌دهیم.

الف. قرار دهید:

$$f(x)=\begin{cases} ۲ & x=۱ \\ ۳ & x=۲ \\ ۱ & x=۳ \\ x & x\notin\{۱,۲,۳\} \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} ۳ & x=۱ \\ ۱ & x=۲ \\ ۲ & x=۳ \\ x & x\notin\{۱,۲,۳\} \end{cases}$$

به سادگی دیده می‌شود $f^۲(x)=g(x),\ g^۲(x)=f(x)$.

ب. فرض کنید حداقل یک تابع مثل g موجود است که $f\to g,\ g\to f$. پس اعداد طبیعی m و n موجودند که $f^m(x)=g(x),\ g^n(x)=f(x)$. در نتیجه $f^{mn}(x)=f(x)$. پس f حداکثر $mn-۱$ تابع مختلف را تولید می‌کند که این تعداد متناهی است.

ج. چنین تابعی وجود دارد. فرض کنید:

$$g(x)=\begin{cases} x+۱ & x\in\mathbb{Z} \\ x & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

با برهان خلف ثابت می‌کنیم هیچ تابعی g را تولید نمی‌کند. فرض کنید تابع حقیقی f و عدد طبیعی $k>۱$ وجود دارد به طوری که $f^k(x)=g(x)$. برای هر $z\in\mathbb{Z}$ اگر $f(z)\notin\mathbb{Z}$ آن‌گاه $f(f(z))=f(z)$ پس $z+۱=g(z)=f^k(z)=f(z)$ که با صحیح نبودن $f(z)$ در تناقض است. پس f هر عدد صحیح، عددی صحیح است. حال برای هر $z\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$f(z)+۱=g(f(z))=f^{k+۱}(z)=f(g(z))=f(z+۱).$$

بنابراین تابع f روی اعداد صحیح تابع انتقال است، یعنی t وجود دارد که برای هر عدد صحیح z، $f(z)=z+t$ ولی در این صورت $z+۱=g(z)=f^k(z)=z+kt$. که در تناقض با $k>۱$ است. پس f وجود ندارد که تابع g را تولید کند.

د. فرض کنید m,n موجودند که $f^m(x)=x^۳,\ f^n(x)=x^۵$. در این صورت $x^{۳^n}=f^{mn}(x)=x^{۵^m}$. بنابراین $۳^n=۵^m$ که تناقض است.

ه با استفاده از لم زیر حکم را ثابت می‌کنیم:

لم. اگر برای تابع حقیقی f اعداد طبیعی $a>b$ موجود باشند که $f^a(x),f^b(x)$ چندجمله‌ای‌های خطی باشند آن‌گاه $f^{a-b}(x)$ هم خطی است.

اثبات. فرض کنید $f^a(x)=a_۱x+a_۰,\ f^b(x)=b_۱x+b_۰$. در نتیجه $a_۱x+a_۰=f^{a-b}(b_۱x+b_۰)$ قرار می‌دهیم $y=b_۱x+b_۰$. پس $f^{a-b}(y)=\frac{a_۱}{b_۱}y+\left(a_۰-\frac{a_۱b_۰}{b_۱}\right)$ و چون y همه‌ی مقادیر را می‌تواند به خود بگیرد پس $f^{a-b}(y)$ هم تابعی خطی است. $\square$

حال فرض کنید $f^m(x)=P(x),\ f^n(x)=Q(x)$ و $(m,n)=d$. آن‌گاه طبق لم بالا و با توجه به الگوریتم تقسیم $f^d(x)$ هم تابعی خطی است که به وضوح $P(x),Q(x)$ را تولید می‌کند.

سؤال شماره ۴. چندضلعی تپل!

الف. فرض کنید xy وتر بیشینه باشد. کمان کوچک‌تر بین x و y را C_1 و کمان بزرگ‌تر را C_2 بنامید. بنابر فرض، طولِ C_1 کوچک‌تر از $\frac{p}{4}$ است. فاصله‌ی دو نقطه روی محیط را با $d(a,b)$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم نشان دهیم نیم‌دایره‌ی به قطر xy که در طرف C_2 است، درون چندضلعی قرار دارد.

لم ۱. C_2 با پاره‌خط xy تنها در x و y اشتراک دارد.

اثبات. فرض کنید z نقطه‌ای از C_2 روی پاره‌خط xy و بین x و y باشد. به وضوح xz و yz وترهایی داخلی هستند. کمان کوتاه‌تر بین x و z نمی‌تواند از y بگذرد زیرا در آن صورت $d(x,z) > d(x,y)$ و این با بیشینه بودن xy تناقض دارد. مشابهاً کمان کوتاه‌تر بین y و z نیز نمی‌تواند از x بگذرد. پس کمان‌های xy، xz و yz محیط چندضلعی را افراز می‌کنند در حالی‌که بنابر فرضِ تپل بودن، طول هر کدام حداکثر $\frac{p}{4}$ است. این تناقض نشان می‌دهد که C_2 با پاره‌خط xy تنها در x و y اشتراک دارد. □

لم ۲. اشتراک ضلع متصل به x با C_2، خارج از نیم‌دایره قرار دارد. مشابهاً برای y.

اثبات. اثبات. فرض کنید این طور نباشد. z را نقطه‌ای درون نیم‌دایره و روی C_2 و بسیار نزدیک به x و روی همان ضلعی که x قرار دارد بگیرید به طوری که yz چندضلعی را تنها در دو سرش قطع کند (با توجه به لم ۱ این کار امکان‌پذیر است). اکنون چون کمان کوچک‌تر بین x و y طولش از $\frac{p}{4}$ بیش‌تر نیست و چون z بسیار نزدیک به x انتخاب شد پس کمان yxz کمان کوچک‌تر بین y و z است و این با بیشینه بودن xy تناقض دارد. □

لم ۳. C_2 با نیم‌دایره تقاطعی ندارد (به جز در x و y).

اثبات. z را نقطه‌ای روی C_2 در نظر بگیرید که درون نیم‌دایره قرار دارد و در بین نقاط با این خاصیت کم‌ترین فاصله را با پاره‌خط xy دارد (بنابر لم ۱ و ۲، این نقطه فاصله‌ی مثبتی از xy دارد). ادعا می‌کنیم xz و yz وترهای داخلی هستند. چون در غیر این صورت نقطه‌ای از چندضلعی مانند z' درون مثلث xyz قرار می‌گیرد که این با نحوه‌ی انتخاب z تناقض دارد.

□

پس xz و yz وترهای داخلی هستند. ادامه‌ی اثبات مشابه لم ۱ است. کمان کوتاه‌تر بین x و z نمی‌تواند از y بگذرد زیرا در آن صورت $d(x,z) > d(x,y)$ و این با بیشینه بودن xy تناقض دارد. مشابهاً کمان کوتاه‌تر بین y و z نیز نمی‌تواند از x بگذرد. پس کمان‌های xy، xz و yz محیط چندضلعی را افراز می‌کنند در حالی‌که بنابر فرضِ تپل بودن، طول هر کدام حداکثر $\frac{p}{4}$ است.
اکنون با توجه به لم ۳، C_2 نیم‌دایره را قطع نمی‌کند. پس C_1 نیز آن را قطع نمی‌کند چون در غیر این صورت چندضلعی خودش را قطع می‌کند. پس نیم‌دایره کاملاً درون چندضلعی قرار دارد.

ب. فرض کنید xy وتر بیشینه باشد. مشابه قسمت قبل کمان کوچک‌تر بین x و y را $C_۱$ و کمان بزرگ‌تر را $C_۲$ بنامید. بنابر فرض، طولِ $C_۱$ کوچک‌تر از $\frac{p}{۴}$ است.
به مرکز x و y نیم‌دایره‌هایی به شعاع ۱ و در طرفی از xy که $C_۲$ قرار دارد رسم می‌کنیم. اشتراک این دو نیم‌دایره را ناحیه‌ی S می‌نامیم. می‌خواهیم نشان دهیم ناحیه‌ی S درون چندضلعی قرار دارد.

لم ۱. $C_۲$ با پاره‌خط xy تنها در x و y اشتراک دارد.

اثبات. مشابه قسمت (الف).

□

لم ۲. اشتراک ضلع متصل به x با $C_۲$، خارج از ناحیه‌ی S قرار دارد. مشابهاً برای y.

اثبات. فرض کنید این طور نباشد. z را نقطه‌ای درون S و روی $C_۲$ و بسیار نزدیک به x و روی همان ضلعی که x قرار دارد بگیرید به طوری که yz چندضلعی را تنها در دو سرش قطع کند (با توجه به لم ۱ این کار امکان‌پذیر است). اکنون چون کمان کوچک‌تر بین x و y طولش از $\frac{p}{۴}$ بیش‌تر نیست و چون z بسیار نزدیک به x انتخاب شد پس کمان yxz کمان کوچک‌تر بین y و z است و این با بیشینه بودن xy تناقض دارد.

□

لم ۳. $C_۲$ با ناحیه‌ی S تقاطعی ندارد (به جز در x و y).

اثبات. z را نقطه‌ای روی $C_۲$ در نظر بگیرید که درون ناحیه‌ی S قرار دارد و در بین نقاط با این خاصیت کم‌ترین فاصله را با پاره‌خط xy دارد (بنابر لم ۱ و ۲، این نقطه فاصله‌ی مثبتی از xy دارد). ادعا می‌کنیم xz و yz وترهای داخلی هستند. چون در غیر این صورت نقطه‌ای از چندضلعی مانند z' درون مثلث xyz قرار می‌گیرد که این با نحوه‌ی انتخاب z تناقض دارد.

□

پس xz و yz وترهای داخلی هستند و چون z درون S قرار دارد پس طول آن‌ها کم‌تر مساوی ۱ است پس بنابر فرضِ تپل بودن، فاصله‌ی دو سر آن‌ها روی محیط کم‌تر مساوی $\frac{p}{۴}$ است. ادامه‌ی اثبات هم مشابه لم ۱ است. کمان کوتاه‌تر بین x و z نمی‌تواند از y بگذرد زیرا در آن صورت $d(x,z) > d(x,y)$ و این با بیشینه بودن xy تناقض دارد. مشابهاً کمان کوتاه‌تر بین y و z نیز نمی‌تواند از x بگذرد. پس کمان‌های xy، xz و yz محیط چندضلعی را افراز می‌کنند در حالی‌که طول آن‌ها کم‌تر مساوی $\frac{p}{۴}$ است. اکنون با توجه به لم ۳، $C_۲$ ناحیه‌ی S را قطع نمی‌کند. پس $C_۱$ نیز آن را قطع نمی‌کند چون در غیر این صورت چندضلعی خودش را قطع می‌کند. پس ناحیه‌ی S کاملاً درون چندضلعی قرار دارد. اکنون به راحتی می‌توان دید که یک دایره به شعاع $\frac{۱}{۴}$ درون ناحیه‌ی S جای می‌گیرد.

ج. فرض کنید چندضلعی تپلی داریم که نمی‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{۱}{۴}$ در آن جای داد. بنابر گزاره دوم می‌توان آن را به وسیله‌ی وترهای داخلی مثلث‌بندی کرد به نحوی که طول اضلاع همه‌ی مثلث‌ها حداکثر واحد باشد.
اکنون در بین وترهای داخلی یکی را که بیش‌ترین فاصله‌ی روی محیط بین دو سرش را دارد در نظر بگیرید مثلاً xy. جزء

بزرگ‌تر محیط چندضلعی بین x و y را C می‌نامیم. دو حالت ممکن است:

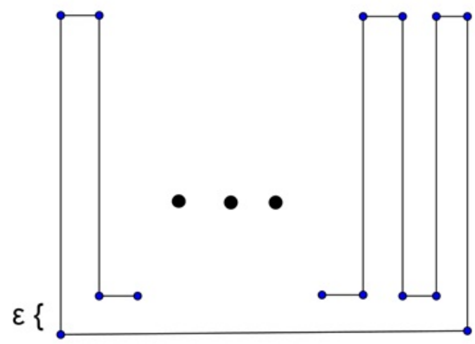
- **حالت اول.** C شامل رأسی دیگر از چندضلعی باشد.

در این حالت حتماً رأسی مانند z روی C وجود دارد که xyz یکی از مثلث‌های مثلث‌بندی است. اکنون کمان کوتاه‌تر بین x و z نمی‌تواند از y بگذرد زیرا در آن صورت $d(x,z) > d(x,y)$ و این با نحوه‌ی انتخاب xy تناقض دارد. مشابهاً کمان کوتاه‌تر بین y و z نیز نمی‌تواند از x بگذرد. پس کمان‌های xy، xz و yz محیط چندضلعی را افراز می‌کنند در حالی‌که بنابر فرض تپل بودن، طول هریک از آن‌ها کم‌تر مساوی $\frac{p}{4}$ است.

- **حالت دوم.** C شامل هیچ رأس دیگری از چندضلعی نباشد.

در این حالت xy باید ضلع چندضلعی باشد و در عین حال، این ضلع جزء بزگ‌تر محیط بین x و y باشد که این با نابرابری مثلث در تناقض است.

د. اگر ϵ به اندازه‌ی کافی کوچک باشد شکل زیر یک مثال نقض برای گزاره‌ی اول است.



سؤال شماره ۵. در جست‌وجوی اعداد از دست رفته!

الف. در بین زیرجمع‌ها کوچک‌ترین عدد را در نظر می‌گیریم. چون زیرجمع‌ها مثبتند پس اعداد اولیه نیز مثبت و در نتیجه کوچک‌ترین زیرجمع همان کوچک‌ترین عدد میان اعداد اولیه است. اعداد اولیه را $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ بگیرید.
پس تا این‌جا ما a_1 را به دست آوردیم . حال فرض کنید $a_1, \ldots, a_i$ به صورت یک‌تا مشخص شده بودند. از زیرجمع‌ها آن‌هایی را که با این i عدد ساخته می‌شوند، حذف می‌کنیم. در میان باقی‌مانده‌ها کوچک‌ترین عدد باید a_{i+1} باشد.

ب. راه اول (اثبات ساختاری، جبری)
فرض کنید $a_1 \leq \cdots \leq a_k < 0 \leq a_{k+1} \leq \cdots \leq a_n$. $(1 + x^{a_1}) \cdots (1 + x^{a_n}) = x^{s_1} + \cdots + x^{s_{2^n}}$ با تقسیم عبارت بر x^{s_1} داریم:

$$(1 + x^{-a_1}) \cdots (1 + x^{-a_k}) (1 + x^{a_{k+1}}) \cdots (1 + x^{a_n}) = x^{s_1 - s_1} + \cdots + x^{s_{2^n} - s_1}$$

که با توجه به حالت مثبت (قسمت (الف)) مقادیر $|a_i|$ها به دست می‌آیند. اکنون باید ثابت کنیم که اگر بخواهیم x^{s_1} را در دو طرف ضرب کنیم به یک طریق یک‌تا می‌شود بین پرانتزها پخش شود. فرض کنید که به دو طریق این کار انجام پذیرد. توجه کنید در این پخش شدن قدرمطلق‌ها نباید تفاوت کنند. پس این معادل این است که ۲ زیرجمع از $|a_i|$ها برابر $-s_1$ خواهد بود. یعنی:

$$|a_{i_1}| + \cdots + |a_{i_l}| = |a_{i_{l+1}}| + \cdots + |a_{i_k}|$$

(اندیس‌های مشترک را حذف کردیم) اما در این صورت در یک حالت $|a_{i_1}|, \ldots, |a_{i_l}|$ ز اعداد اولیه به صورت منفی ظاهر شده و $|a_{i_{l+1}}|, \ldots, |a_{i_k}|$ به صورت مثبت، پس مجموع آن‌ها صفر می‌شود و این تناقض است.

پس به صورت یک‌تا می‌توانیم در پرانتزها پخش کنیم و درنتیجه اعداد اولیه‌مان یک‌تا به دست می‌آیند.
نکته. توجه کنید که عبارت‌های ما یک تابع از اعداد حقیقی مثبت به اعداد حقیقی مثبت هستند و در نتیجه خوش‌تعریف هستند!
راه دوم. (اثبات وجودی، ترکیبیاتی)
ابتدا بزرگ‌ترین عدد و عدد قبلی آن (از نظر بزرگی) را در نظر بگیرید. واضح است که تفاضل این دو کوچک‌ترین قدر مطلق در میان اعداد اولیه‌مان خواهد بود. مجموعه‌ی زیرجمع‌ها به هم‌راه صفر (زیرجمع مجموعه‌ی تهی) را S بگیرید و کوچک‌ترین قدر مطلق را d بنامید.
لم. اگر $A \bigcup (A+d) = B \bigcup (B+d) = S$ آن‌گاه خود A, B برابرند.

اثبات. کوچک‌ترین عدد در S را x بنامید می‌دانیم که x در A آمده، چرا که اگر در $A+d$ آمده باشد ان‌گاه $x-d$ باید در A آمده باشد و درنتیجه در S باید آمده باشد ولی چون $d > 0$ این عدد کم‌تر است و این تناقض است. به طریق مشابه x در B نیز آمده و درنتیجه $x+d$ در $A+d$ و $B+d$ آمده است. حال $x, x+d$ را از S حذف کرده و همین روند را تکرار می‌کنیم نتیجه می‌شود که اعضای A, B دوبه دو با هم مساوی هستند پس $A = B$.

□

حال به اثبات سوال باز می‌گردیم. ثابت می‌کنیم که زیر مجموعه‌ای یک‌تا از زیرجمع‌ها را می‌توان یافت (مانند A) که $S = A \bigcup (A+d)$. در این صورت بنابر استقرا مجموعه‌ی A مجموعه‌ی زیرجمع‌های یک مجموعه‌ی یک‌تای $n-1$

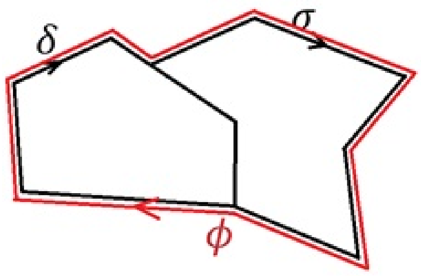
عضوی خواهد بود و مسئله حل می‌شود.
حال فرض کنید در حالتی d عضو مجموعه اعداد اولیه باشد و در حالتی دیگر d عضو مجموعه اعداد اولیه باشد. مجموعه‌ی همه‌ی زیرجمع‌های $n-۱$ عدد دیگر را در حالت اول A و در حالت دوم B می‌نامیم. پس $S = A\bigcup(A+d) = B\bigcup(B-d)$. در نتیجه بنا بر لم داریم $A = B - d$. صفر عضو A است پس d باید عضو B باشد. پس مجموع تعدادی از اعداد در حالت دوم d شده است که اگر d را هم به آن‌ها اضافه کنیم مجموع صفر ظاهر می‌شود. تناقض حاصل نشان می‌دهد که مجموعه‌ی مورد نظر یک‌تا است.

ج. مجموع‌های همه‌ی زیرمجموعه‌های $\{۱,۲,-۳\}$ با مجموع‌های همه‌ی زیرمجموعه‌های $\{-۱,-۲,۳\}$ برابر است. کافی است ۱۳۸۹ تا صفر به هر دو مجموعه اضافه کنیم.

سؤال شماره ۶. جهان‌گردان سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار!

ابتدا به لم زیبای زیر توجه می‌کنیم که کلید حل سوال است.

لم. دو دور هم‌جهت δ, σ را در نظر بگیرید که در یک قسمت مشترک باشند، دور ϕ را اجتماع این دو دور و با حذف قسمت‌های مشترک در نظر می‌گیریم. حال اگر در مسیرهای δ, σ جهان‌گرد پس از اتمام یک دور سرمایه‌اش $\kappa_\sigma, \kappa_\delta$ برابر شود، پس از پیمودن مسیر ϕ، سرمایه‌اش $\kappa_\delta \times \kappa_\sigma$ برابر خواهد شد. در واقع داریم: $\kappa_\phi = \kappa_\sigma \kappa_\delta$.

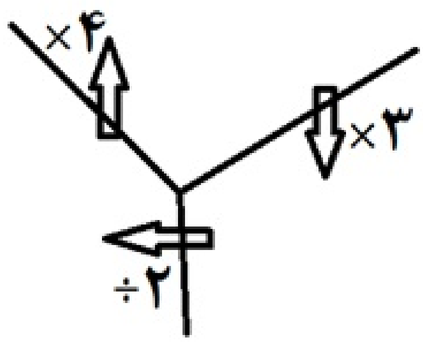


اثبات. اثبات. توجه کنید که هر یال مسیر ϕ در دقیقاً یکی از مسیرهای δ, σ آمده است. و یال‌هایی از δ, σ که در مسیر ϕ نیامده‌اند در هر دوی این دور میسر بوده و جهتشان متفاوت است. پس یال‌های مشترک در $\kappa_\delta \times \kappa_\sigma$ یک‌دیگر را خنثی می‌کنند و یال‌های دیگر موجب می‌شوند که رابطه‌ی $\kappa_\phi = \kappa_\sigma \kappa_\delta$ برقرار باشد.

□

حال یک ۱۳۹۲وجهی را در نظر بگیرید. یک رأس دل‌خواه آن را در نظر گرفته و با تصویر نقطه‌ای کل ۱۳۹۲وجهی را به روی یک صفحه انتقال می‌دهیم. توجه کنید که وجوه مجاور رأس مورد نظر به نواحی مانند چندضلعی بی‌نهایت رفته و دیگر وجوه ۱۳۹۲ وجهی و هر خط‌شکسته‌های بسته روی آن ، چندضلعی خواهند ماند.

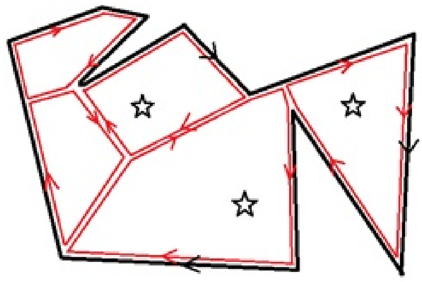
به هر رأس ضرب یال‌های متصل به آن رأس را در جهت ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد نسبت می‌دهیم. برای مثال به رأس شکل زیر، مقدار ساعت‌گرد ۶ و مقدار پادساعت‌گرد $\frac{1}{6}$ را نسبت می‌دهیم. پس اگر دقیقاً یک دور نزدیک و ساعت‌گرد دور این رأس بزنیم، سرمایه‌یمان ۶ برابر می‌شود.



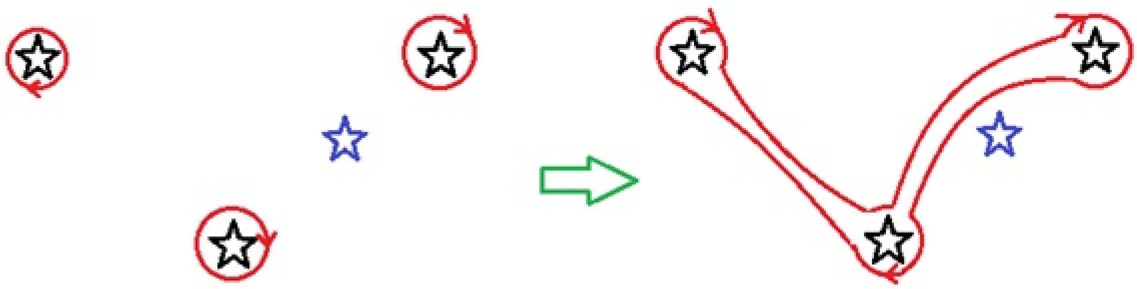
حال ادعا می‌کنیم که κ هر مسیر تنها به مقادیر رئوس درون آن مسیر بستگی دارد. برای اثبات ابتدا توجه می‌کنیم که هر مسیری که درون خود هیچ رأسی نداشته باشد، دارای κ برابر یک است. با در نظر گرفتن هر پاره‌خط و امتداد آن می‌توان به سادگی این نکته را ثابت کرد که هر مسیری که درون خود رأسی ندارد، پاره‌خط را به اندازه‌ی برابر از دو طرف قطع می‌کند.

به عنوان لم دوم به این نکته توجه کنید که اگر مسیری دل‌خواه با ضریب نهایی κ داشته‌باشیم، می‌توان این مسیر را از هر کشور دل‌خواه شروع کرد برای اثبات کافی‌است مسیری بسته که از کشور مورد نظر می‌گذرد و یال مشترکی با مسیر اصلی دارد و هیچ رأسی درونش نیست را به مسیر اصلی اضافه کنیم. طبق لم اول این کار مسیر مناسب با ضریب κ به ما خواهد داد.

اکنون با استفاده از این نکته می‌توان اثبات این قسمت را کامل کرد. یک مسیر ساعت‌گرد را در نظر بگیرید. دور رئوس این مسیر دورهایی مجزا و نزدیک به رأس رسم می‌کنیم. باقی مسیر را نیز با دورهای خالی از رأس می‌پوشانیم. اکنون توجه کنید که κ این دورهای خالی از رأس برابر واحد است و κ دورهای شامل یک رأس و نزدیک به آن برابر مقدار ساعت‌گرد این رأس است. با توجه به لم کلیدی ابتدای سوال و استفاده از استقرا می‌توان ادعا کرد که κ مسیر اصلی برابر ضرب مقادیر ساعت‌گرد درون مسیر است.



پس κ هر مسیر را که در نظر بگیریم با توجه به این که ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد است، برابر حاصل‌ضرب تعدادی مقدار ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد رئوس است. پس برای هر زیرمجموعه از رئوس حداکثر دو مسیر ساعت‌گرد و یا پادساعت‌گرد شامل این رئوس داریم. با توجه به این که مسیر خالی از رأس دارای κ یک است پس این مسیر حداکثر یک κ به ما می‌دهد. پس در کل حداکثر می‌توان $۲^v - ۱$ تا κ متمایز تولید داشت که v تعداد رئوس در صفحه است.
حال ثابت می‌کنیم که این تعداد مسیر با رئوس درونی متمایز وجود دارد.
ابتدا توجه کند که برای $= \kappa$ مسیر وجود دارد.
برای ادامه کار نشان می‌دهیم که برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از رئوس صفحه و هر جهت‌گذاری (ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد) می‌توان مسیری شامل این رئوس و با جهت دل‌خواه پیدا کرد. برای این کار دور رئوسی که قرار است درون دور باشند دورهای کوچکی رسم کرده و این دورها را مانند شکل با هم تلفیق می‌کنیم تا مسیر مناسب به دست آید.



حال کافی است نشان دهیم می‌توان مرزها را طوری عدد گذاری کرد که هر دو مسیر با رئوس درون متمایز، دارای κ متمایز باشند. برای این کار روی مرزها اعداد اول متمایز قرار می‌دهیم. فرض کنید دو مسیر با رئوس درونی متمایز، κی برابر

داشته باشند. اگر هر دو دور جهت برابر داشته باشند، با استفاده از لم اول می‌توان تعدادی رأس یافت که ضرب مقدار آن‌ها (تعدادی ساعت‌گرد و تعدادی پادساعت‌گرد) برابر یک باشد که به سادگی می‌توان این را رد کرد. اگر هم یکی ساعت‌گرد و دیگری پادساعت‌گرد باشد، می‌توان ادعا کرد که این دو مسیر مکمل یک‌دیگرند و با توجه به این که هیچ کدام تهی نیستند به سادگی می‌توان به تناقض رسید. پس همواره انتخاب رأس‌های متمایز و جهت متمایز κی متمایزی به ما می‌دهد.
پس با توجه به آن چه گفته شد می‌توان ادعا کرد که حداکثر تعداد κهای متمایز برابر $۲^v - ۱$ خواهد بود. پس برای ماکزیمم شدن این تعداد کافی است تعداد رئوس در صفحه ماکزیمم شوند که با دو بار محاسبه‌ی زوایای چندضلعی‌ها (هر رأس زاویه‌ی ۳۶۰ درجه دارد و هر چندضلعی (متناهی و نامتناهی) زاویه‌ی حداقل ۱۸۰ درجه) به این نتیجه می‌رسیم که تعداد رئوس روی صفحه حداکثر برابر $۲ \times ۱۳۹۲ - ۵$ است. در حین اثبات به این نتیجه می‌رسیم که حالت تساوی تنها وقتی رخ می‌دهد که تمام رئوس درجه ۳ باشند و این ما را در ساخت حالت تساوی کمک خواهد کرد. این تعداد رأس در صفحه وقتی به دست می‌آید که در فضا $۲ \times ۱۳۹۲ - ۴$ رأس داشته باشیم.
حال توجه کنید این حالت امکان دارد رخ دهد. کافی است یک منشور در نظر بگیرید که دو قاعده‌ی آن ۱۳۹۰ضلعی و وجوه جانبی آن مستطیل‌هایی باشند. این چندوجهی محدب است، ۱۳۹۰ وجه دارد و $۲ \times ۱۳۹۲ - ۴$ رأس دارد.
پس بیشینه‌ی خواسته شده توسط سوال برابر $۲^v - ۱$ است و برای آن مثال هم داریم.

سؤال شماره ۷. خواص جالب معادلات جالب!

الف. دقت کنید که برای هر x ثابت، حداکثر تعدادی متناهی عضو S هستند که مؤلفه‌ی اولشان x باشد. بنابراین برای هر عدد مثبت R، حداکثر تعداد متناهی از اعضای S هستند که مؤلفه‌ی اول آن‌ها از R کم‌تر باشد. مشابهاً برای مؤلفه‌ی دوم هم این گزاره برقرار است.
فرض کنید $P_{\circ}(x) = Q_{\circ}(y)$ معادله‌ای جالب با کم‌ترین درجه باشد که در بی‌نهایت نقطه از S صدق می‌کند (منظور از درجه‌ی معادله‌ی $P(x) = Q(y)$، درجه‌ی $P(x) - Q(y)$ به عنوان یک چندجمله‌ای دو متغیره است). مجموعه نقاطی که این معادله در آن صدق می‌کند را S' بنامید. $P(x) = Q(y)$ را معادله‌ی دل‌خواهی فرض کنید که در S صدق می‌کند.
اکنون P را بر $P_{\circ}$ و Q را بر $Q_{\circ}$ تقسیمِ چندجمله‌ای می‌کنیم، داریم:

$$P(x) = A(x)P_{\circ}(x) + B(x)$$
$$Q(y) = C(y)Q_{\circ}(y) + D(y)$$

به طوری که A، B، C و D چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب گویا هستند و $\deg B < \deg P_{\circ}$ و $\deg D < \deg Q_{\circ}$. عدد صحیح N را طوری بگیرید که وقتی در این چندجمله‌ای‌ها ضرب می‌شود همه‌ی ضرایب صحیح شوند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} NP(x) &= A'(x)P_{\circ}(x) + B'(x) \\ NQ(y) &= C'(y)Q_{\circ}(y) + D'(y) \end{aligned} \qquad (*)$$

به طوری که A'،B' ،C' و D' چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب صحیح هستند.
اگر $(x_{\circ}, y_{\circ}) \in S'$، می‌دانیم که $P(x_{\circ}) = Q(y_{\circ})$ برابر عددی صحیح مانند a و $P_{\circ}(x) = Q_{\circ}(y)$ برابر عددی صحیح مانند b است. اکنون اگر دو معادله‌ی $(*)$ را از هم کم کنیم، به دست می‌آوریم:

$$\big(A'(x_{\circ}) - C'(y_{\circ})\big)b = B'(x_{\circ}) - D'(y_{\circ}) \qquad (**)$$

از طرفی می‌دانیم که $\deg B' < \deg P_{\circ}$ و $\deg D' < \deg Q_{\circ}$. بنابراین عدد مثبت R وجود دارد که اگر $|x|, |y| > R$، آن‌گاه:

$$|B'(x)| < \frac{|P_{\circ}(x)|}{۲} \ , \ |D'(y)| < \frac{|Q_{\circ}(y)|}{۲}$$

در نتیجه اگر $|x_{\circ}|, |y_{\circ}| > R$ بنابر نابرابری مثلث، $|B'(x) - D'(y)| < b$ در حالی که از معادله‌ی $(**)$ نتیجه می‌شود که باید بر b بخش‌پذیر باشد، پس $B'(x_{\circ}) - D'(y_{\circ}) = ۰$ و در نتیجه $A'(x_{\circ}) - C'(y_{\circ}) = ۰$، یعنی $(x_{\circ}, y_{\circ})$ جوابی از $B'(x) = D'(y)$ نیز هست. از طرفی بنابر توضیحی که در ابتدا دادیم، به جز متناهی عضو برای بقیه‌ی اعضا داریم $|x|, |y| > R$. پس معادله‌ی $B'(x) = D'(y)$ نیز بی‌نهایت جواب در S دارد و در عین حال درجه‌اش از معادله‌ی $P_{\circ}(x) = Q_{\circ}(y)$ کم‌تر است.
بنابر این تنها حالت ممکن این است که B' و D' ثابت (و برابر) باشند، یعنی $B'(x) = D'(y) = c$.

بنابراین داریم $A'(x) = \frac{NP(x)-c}{P_{\circ}(x)}$, $C'(y) = \frac{NQ(y)-c}{Q_{\circ}(y)}$. حال اگر معادله‌ی $A'(x) = C'(y)$ هنوز یک معادله‌ی جالب باشد، A' را بر $P_{\circ}$ و C' را بر $Q_{\circ}$ تقسیم کرده و استدلال بالا را تکرار می‌کنیم. با ادامه‌ی این کار نتیجه می‌شود که چندجمله‌ای $F(x)$ با ضرایب گویا وجود دارد که $P(x) = F(P_{\circ}(x))$ و $Q(y) = F(Q_{\circ}(y))$. یعنی معادله‌ی $P(x) = Q(y)$ از $P_{\circ}(x) = Q_{\circ}(y)$ نتیجه می‌شود.

ب. از لم زیر برای اثبات حکم استفاده می‌کنیم.

لم. اگر $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ تکین باشد و $d|\deg P = dm$، آن‌گاه وجود دارند عدد صحیح N و چندجمله‌ای‌های $T(x)$ و $R(x)$ با ضرایب صحیح به طوری که: $NP(x) = (T(x))^d + R(x)$، و برای x به اندازه‌ی کافی بزرگ، $T(x)^d \leq NP(x) < (T(x)+۱)^d$

اثبات. ابتدا چندجمله‌ای $T_۱(x)$ را طوری میابیم که $P(x) - T_۱(x)^d$ از درجه‌ی کم‌تر از $(m-۱)d$ باشد. برای این کار فرض کنید:

$$P(x) = x^{md} + a_{md-۱}x^{md-۱} + \cdots + a_۰$$

و قرار دهید $T_۱(x) = x^m + b_{m-۱}x^{m-۱} + \cdots + b_۰$ کافی است ضرایب $b_۰, \ldots, b_{m-۱}$ را طوری بیابیم که:

$$(x^m + b_{m-۱}x^{m-۱} + \cdots + b_۰)^d = x^{md} + a_{md-۱}x^{md-۱} + \cdots + a_{md-d}x^{md-d} + c_{md-d-۱}x^{md-d-۱} + \cdots$$

ضرایب را می‌توان به طور بازگشتی تعیین کرد و $T_۱$ را به دست آورد. □

ضرایب $T_۱$ اعدادی گویا می‌شوند. سپس می‌توان با ضرب کردن عدد صحیح n همه‌ی ضرایب را صحیح کرد. بنابراین $T_۲(x) = nT_۱(x)$ و $NP(x) - T_۲(x)^d = S_۲(x)$ که در آن $N = n^d$ و $\deg S_۲ < (m-۱)d$. حال اگر ضریب پیشروی $S_۲$ مثبت بود، مسأله حل است و اگر منفی بود قرار می‌دهیم: $T(x) = T_۲(x) - ۱$ و $S(x) = NP(x) - T(x)$.
اکنون به مسأله اصلی باز می‌گردیم. فرض خلف می‌کنیم. فرض کنید $d|(\deg P, \deg Q)$. بنابر لم بالا، عدد صحیح N و چندجمله‌ای‌های T، R، U و V با ضرایب صحیح وجود دارند به طوری که:

$$NP(x) = (T(x))^d + R(x)\ ,\quad NQ(y) = (U(y))^d + V(y)$$

و برای x و y به اندازه‌ی کافی بزرگ،

$$T(x)^d \leq NP(x) < (T(x)+۱)^d,\ U(y)^d \leq NQ(y) < (U(y)+۱)^d$$

اکنون هرگاه $P(x) = Q(y)$، از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود که $T(x) = U(y)$. پس این دو معادله‌ی جالب، بی‌نهایت جواب مشترک دارند و در نتیجه بنابر قسمت (الف) هر دو توسط یک معادله تولید می‌شوند.

سؤال شماره ۸. پنج‌ضلعی گویا!

قبل از اثبات حکم چند نکته‌ی لازم را متذکر می‌شویم:

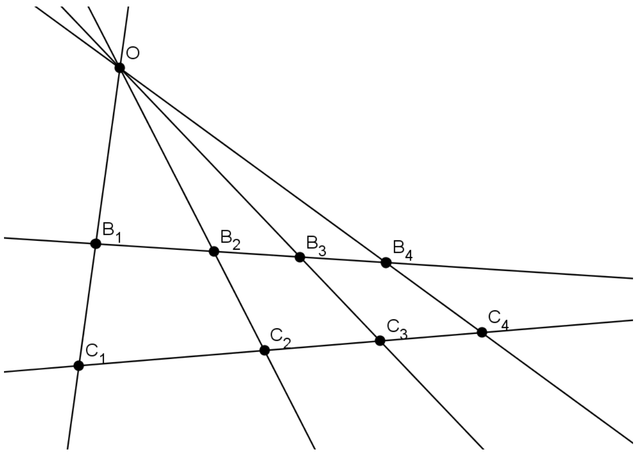
نکته ۱. اگر B_1، B_2، B_3 و B_4 چهار نقطه روی یک خط باشند، نسبت «ناهمساز» آن‌ها به این صورت تعریف می‌شود:

$$(B_1B_2, B_3B_4) = \frac{|B_1B_3|}{|B_1B_4|} / \frac{|B_2B_3|}{|B_2B_4|}$$

(در این تعریف یک جهت برای خط گذرا از B_iها در نظر گرفته می‌شود و طول هر پاره‌خط بسته به این‌که هم جهت با جهت خط یا خلاف آن باشد، مثبت یا منفی در نظر گرفته می‌شود.)

مهم‌ترین خاصیت نسبت ناهمساز چهارتایی‌ها، ناوردا بودن آن نسبت به تصویر از یک کانون روی خط دیگر است:

$$(B_1B_2, B_3B_4) = (C_1C_2, C_3C_4).$$



روابط زیر را می‌توان با اندکی محاسبه از تعریف نسبت ناهمساز به دست آورد: (B_iها نقاطی هم‌خط هستند.)

رابطه‌ی (۱) $$(B_1B_2, B_3B_4) = (B_3B_4, B_1, B_2)$$

رابطه‌ی (۲) $$(B_1B_4, B_3B_2) = \frac{(B_1B_2, B_3B_4)}{(B_1B_2, B_3B_4) - 1}$$

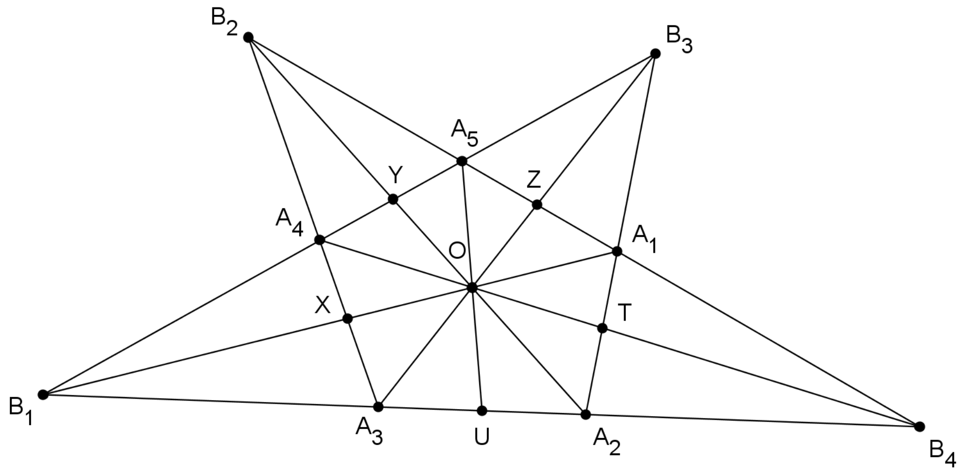
رابطه‌ی (۳) $$(B_1B_2, B_3B_4)(B_1B_2, B_4B_5) = (B_1B_2, B_3B_5)$$

نکته ۲. اگر (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دو نقطه با مختصات گویا در صفحه باشند، معادله‌ی خط گذرنده از آن‌ها به صورت:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

است. در نتیجه معادله‌ی این خط را نیز می‌توان با اعداد گویا بیان کرد؛ به چنین خطی «گویا» می‌گوییم. به راحتی می‌توان دید که تقاطع دو خط گویا، نقطه‌ای گویاست و نسبت فواصل نقاط گویا روی یک خط، عددی گویاست. علی‌الخصوص نسبت ناهمساز چهار نقطه‌ی گویای هم‌خط، گویاست.

حال به سراغ اثبات حکم مسأله با استفاده از برهان خلف می‌رویم. فرض کنید $A_1 \dots A_5$ یک پنج‌ضلعی گویا باشد که برای آن، چهار تا از خطوط A_iB_i مثل $A_1B_1, \dots, A_4B_4$ در نقطه‌ای مانند O هم‌رسند. با توجه به گویا بودن A_iها، خطوط واصل آن‌ها و تقاطع‌های این خطوط همگی گویا هستند. در نتیجه همه‌ی نقاطی که در شکل نام‌گذاری شده‌اند و همه‌ی نسبت‌های ناهمسازی که با آن‌ها ساخته می‌شوند، گویا هستند.



نسبت ناهمساز (B_1A_3, A_2B_4) را λ می‌نامیم. با توجه به شکل بالا داریم:

$$\lambda = (B_1A_3, A_2B_4) = (B_1A_4, YA_5) \quad (\text{تصویر از } B_2)$$
$$\lambda = (B_1A_3, A_2B_4) = (B_1B_4, A_2U) \quad (\text{تصویر از } O)$$

همین‌طور:

$$\lambda = (B_1A_3, A_2B_4) = (A_5Z, A_1B_4) \quad (\text{تصویر از } B_3)$$
$$= (UA_3, B_1B_4) \quad (\text{تصویر از } O)$$
$$= (B_1B_4, UA_3) \quad (\text{رابطه‌ی } (1))$$

درنتیجه با توجه به روابط (۲) و (۳):

$$\lambda^2 = (B_1B_4, A_2U)(B_1B_4, UA_3) = (B_1B_4, A_2A_3) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

پس λ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $X^2 = X + 1$ است که ریشه‌ی گویا ندارد! پس هم‌رسی چهارتا از خطوط A_iB_i با گویا بودن پنج‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5$ سازگار نیست.