به نام او

پاسخ‌های آزمون مرحلهٔ دوم ۱۳۹۲

۱. همهٔ a و b های طبیعی و نسبت به هم اول را بیابید که $b/a = \frac{a}{b}$.

راه حل اول. فرض کنید k تعداد ارقام a باشد، یعنی $(10^{k-1} \le a < 10^k)$. در این صورت $b/a = b + \frac{a}{10^k}$، بنابراین با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} = b + \frac{a}{10^k} \Rightarrow 10^k a = 10^k b^2 + ab$$

با توجه به عبارت بالا و توجه به روابط بخش‌پذیری، $a\,\big|\,10^k b^2$، $b|10^k a$ و $10^k|ab$ به دست می‌آیند. از آن‌جا که a و b نسبت به هم اول هستند، با به کاربردن لم اقلیدس و استفاده از دو رابطهٔ اول قبلی به دست می‌آید $b\,\big|\,10^k$ و $a\,\big|\,10^k$. مجدداً چون ب.م.م a و b برابر یک است، خواهیم داشت $ab\,\big|\,10^k$. بنابراین $ab = 10^k$. حال بار دیگر با توجه به این که a و b نسبت به هم اول هستند، عامل مشترکی ندارند و لذا چهار حالت زیر ممکن است:

حالت۱. $a = 10^k$ و $b = 1$.

حالت۲. $a = 2^k$ و $b = 5^k$.

حالت۳. $a = 5^k$ و $b = 2^k$.

حالت۴. $a = 1$ و $b = 10^k$.

حالت ۱ با k رقمی بودن a تناقض دارد. ضمناً از فرض مسئله $(\frac{a}{b} = b/a)$ به دست می‌آید $\frac{a}{b} > b$ و لذا $a > b^2$ و با توجه به این نکته حالت های ۲ و ۴ هم امکان ندارند $(2^k < 5^{2k},\ 1 < 10^{2k})$. پس تنها حالت مورد قبول ۳ است. با توجه به k رقمی بودن a، $10^{k-1} \le a = 5^k$ و در نتیجه $2^{k-1} \le 5$. یعنی k نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۳ باشد$(2^{k-1} \le 5 < 8 = 2^3 \Rightarrow k \le 3)$.

- $k = 1$. در این صورت $a = 5$ و $b = 2$ که به وضوح $\frac{5}{2} = 2/5$ و این جوابی از مسئله است.
- $k = 2$. در این صورت $a = 25$ و $b = 4$ که امکان ندارد زیرا $\frac{25}{4} > 6 > 4/25$.
- $k = 3$. در این صورت $a = 125$ و $b = 8$ که این هم ممکن نیست چون $\frac{125}{8} > 10 > 8/125$.

بنابراین تنها جواب مسئله $a = 5$ و $b = 2$ است.

راه حل دوم. فرض کنید k تعداد ارقام a باشد. پس خواهیم داشت $\frac{a}{b} = b/a = b + \frac{a}{10^k}$ و این معادل با این است که $\frac{a-b^2}{b} = \frac{a}{10^k}$. چون $(a,b) = 1$، پس $(a-b^2, b) = 1$ یعنی $\frac{a-b^2}{b}$ کسری تحویل‌ناپذیر و مساوی با(ساده شدهٔ) $\frac{a}{10^k}$ است. بنابراین $s \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $s(a-b^2) = a$ و $sb = 10^k$. پس خواهیم داشت $a - b^2\,|a$ و چون $(a-b^2, a) = 1$، $a - b^2\,|\,1$ و لذا $a - b^2 = \pm 1$. اما از آن‌جا که $\frac{a-b^2}{b} = \frac{a}{10^k} > 0$ تنها حالت ۱+ قابل قبول است. یعنی $a = b^2 + 1$ و $\frac{a}{10^k} = \frac{1}{b}$. حال توجه کنید که چون k تعداد ارقام a است، پس $a \ge 10^{k-1}$ و $\frac{1}{b} = \frac{a}{10^k} \ge \frac{1}{10}$، در نتیجه $b \le 10$. از طرفی $ab = b(b^2+1) = 10^k$ توانی از ۱۰ است، پس عوامل اول b، ۲ یا ۵ است یعنی $b \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$. در این صورت $b^2 + 1 \in \{2, 5, 17, 26, 65, 101\}$ و چون $b^2 + 1$ هم عامل

اولی جز ۲ و ۵ ندارد تنها حالت $b = ۱$ و $b = ۲$ می‌ماند. اما اگر $b = ۱$، $b(b^{۲} + ۱) = ۲$ توانی از ۱۰ نیست. پس تنها حالت $a = ۵$ و $b = ۲$ باقی می‌ماند که این هم به وضوح جوابی از مسئله است. ($\frac{a}{b} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵ = b/a$).

۲. فرض کنید اعداد طبیعی $w_1, w_2, \ldots$ و w_n وزن n وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه‌ها «کامل» می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ است، مجموع وزن تعدادی از این وزنه‌ها برابر W شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنهٔ کامل، یک وزنه با سنگین‌ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه وزنهٔ باقی‌مانده نیز کامل است.

راه حل. نشان می‌دهیم مجموعهٔ n عدد $w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w_n$ کامل است اگر و تنها اگر $w_1 = 1$ و برای هر $2 \leq i \leq n$ داشته باشیم $w_i \leq w_1 + w_2 + \cdots + w_{i-1} + 1$. توجه کنید اگر $w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w_n$ دارای شرط یاد شده باشند اعداد $w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w_{n-1}$ نیز دارای آن شرط هستند پس برای اثبات حکم کافیست ادعای خود را ثابت کنیم.

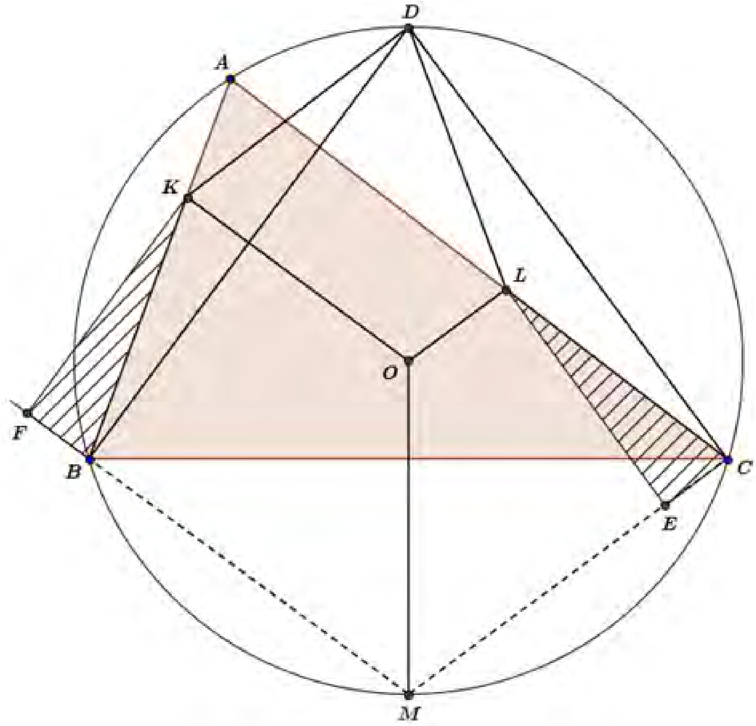
روشن است که اگر $w_1 > 1$ یا برای یک $2 \leq i \leq n$ داشته باشیم $w_i > w_1 + w_2 + \cdots + w_{i-1} + 1$ آنگاه به ترتیب عدد ۱ یا عدد $w_1 + w_2 + \cdots + w_{i-1} + 1$ مجموع هیچ تعدادی از وزنه‌ها نمی‌شود. پس اگر تعدادی وزنه کامل باشند شرط بالا دربارهٔ آن‌ها صادق است. حال اگر برای تعدادی وزنه شرط یاد شده برقرار باشد به استقرا روی n نشان می‌دهیم که کامل هستند. پایهٔ استقرا در حالتی که تنها یک وزنه داریم واضح است. حال حکم را برای $n = k - 1$ فرض می‌کنیم. اگر $w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w_k$ دارای شرط یاد شده باشند اعداد $w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w_{k-1}$ نیز دارای آن شرط هستند پس طبق فرض استقرا مجموعه‌ای کاملند پس هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_1 + w_2 + \cdots + w_{k-1}$ باشد به صورت جمع تعدادی از $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ است. حال برای آن W های طبیعی که $w_1 + w_2 + \cdots + w_{k-1} < W < w_1 + w_2 + \cdots + w_k$ چون $w_k \leq w_1 + w_2 + \cdots + w_{k-1} + 1$ داریم:

$$-1 \leq w_1 + w_2 + \cdots + w_{k-1} - w_k < W - w_k < w_1 + w_2 + \cdots + w_{k-1}$$

در حالت $W - w_k = 0$ مطلوب حاصل است. در غیر این صورت $1 \leq W - w_k < w_1 + w_2 + \cdots + w_{k-1}$ پس طبق فرض استقرا $W - w_k$ به صورت جمع تعدادی از $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ است. حال اگر w_k را به آن مجموعه اضافه کنیم مجموع اعضای مجموعهٔ جدید برابر W خواهد بود و حکم برای $n = k$ نیز نتیجه می‌شود.

۳. مثلث دل‌خواه $\overset{\triangle}{ABC}$ داده شده است. وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ از دایرهٔ محیطی مثلث که شامل رأس A نیست را M می‌نامیم. از نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، دوخط به موازات MB و MC رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع کنند. ثابت کنید اگر امتداد ارتفاع نظیر رأس A در مثلث، با دایرهٔ محیطی در نقطهٔ N تلاقی کند آن‌گاه $NK = NL$.

راه حل اول.



ابتدا ثابت می‌کنیم $KB = LC$ است. از نقاط K و L عمودهای KF و LE را بر خطوط MB و MC رسم می‌کنیم. این دو عمود، برابر فاصله O تا دو وتر برابر MB و MC از دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ هستند و در نتیجه با هم برابرند.

از طرف دیگر داریم: $\angle KBF = \angle LCE$ (چهارضلعی $ABMC$ محاطی است.) در نتیجه $\overset{\triangle}{KBF} \cong \overset{\triangle}{LCE}$ و $KB = LC$ است.

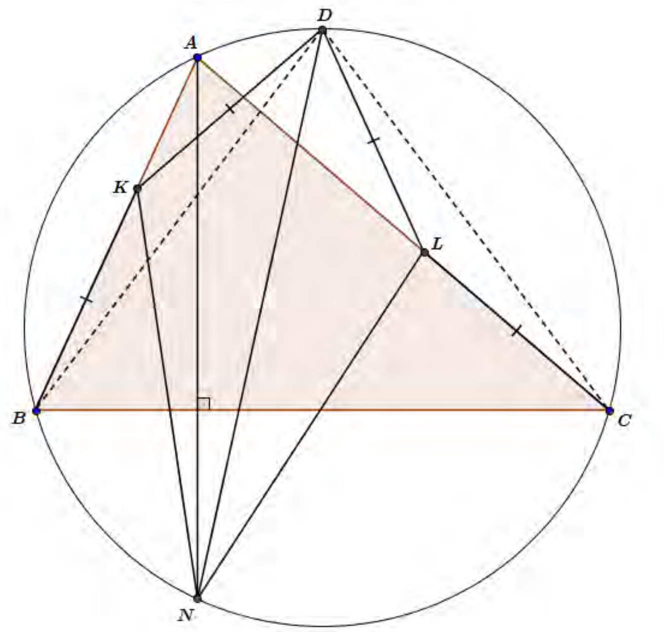
اگر D نقطهٔ وسط کمان $\overset{\frown}{BAC}$ باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{c} DB = DC \\ \angle DBA = \angle DCA \\ KB = LC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \overset{\triangle}{DBK} \cong \overset{\triangle}{DCL} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \angle KDL = \angle BDC = \angle BAC \\ KD = LD \end{cases}$$

از طرفی $\angle KOL = \angle BMC$ پس نتیجه می‌شود که $AKOLD$ محاطی است و داریم:

$$\left.\begin{array}{c} \angle AKD = \angle ALD = \angle AOD = \hat{B} - \hat{C} \\ \angle KBD = \angle LCD = \frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle KDB = \angle LDC = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{۲}$$

$$\Rightarrow \quad KB = KD = LD = LC \quad (*)$$

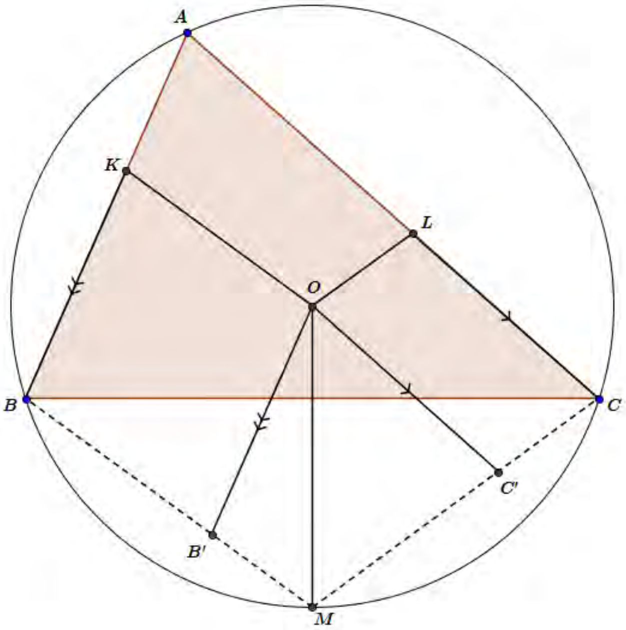


در انتها با اثبات هم‌نهشتی دو مثلث $\overset{\triangle}{NDK}$ و $\overset{\triangle}{NDL}$ حکم مساله اثبات خواهد شد.

$$\left.\begin{array}{c} \angle NDK = \angle NDB + \angle BDK = (۹۰^\circ - \hat{B}) + (\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}) = \frac{\hat{A}}{۲} \\ \\ \angle NDL = \angle NDC - \angle CDL = (۹۰^\circ - \hat{C}) - (\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}) = \frac{\hat{A}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle NDK = \angle NDL$$

اکنون با کمک رابطهٔ $(*)$ هم‌نهشتی دو مثلث $\overset{\triangle}{NDK}$ و $\overset{\triangle}{NDL}$ اثبات می‌شود و داریم: $NK = NL$.

راه حل دوم.

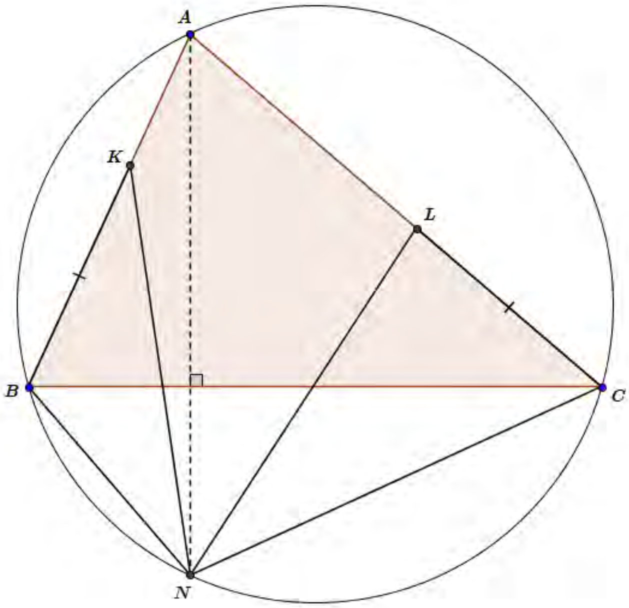


از نقطهٔ O دو خط به موازات اضلاع AB و AC مثلث رسم می‌کنیم تا MB و MC را در B' و C' قطع کنند.
طبق قضیهٔ سینوس‌ها در دو مثلث $\overset{\triangle}{OMB'}$ و $\overset{\triangle}{OMC'}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{OB'}{\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲})} = \frac{R}{\sin(\hat{B}+\frac{\hat{A}}{۲})} \\ \sin(\hat{B}+\frac{\hat{A}}{۲}) = \sin(\hat{C}+\frac{\hat{A}}{۲}) \\ \frac{OC'}{\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲})} = \frac{R}{\sin(\hat{C}+\frac{\hat{A}}{۲})} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad OB' = OC' \quad \Rightarrow \quad KB = LC = x \quad (۱)$$

طبق رابطهٔ (۱) بدست می‌آید که:

$$\frac{x}{R} = \frac{\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲})}{\sin(\hat{C}+\frac{\hat{A}}{۲})} = \frac{\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲})}{\cos(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲})} \qquad (۲)$$



اکنون طول دو پاره‌خط NK و NL را با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث $\overset{\triangle}{BNK}$ و $\overset{\triangle}{CNL}$ بدست آورده و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

$$\begin{cases} NK^۲ = NB^۲ + BK^۲ - ۲NB \cdot BK \cdot \cos(۹۰^\circ - \hat{C} + \hat{B}) \\ \\ NL^۲ = NC^۲ + CL^۲ - ۲NC \cdot CL \cdot \cos(۹۰^\circ - \hat{B} + \hat{C}) \end{cases}$$

حال چون $BK = CL = x$ داریم:

$$NK = NL$$

$$\Leftrightarrow NB^۲ - ۲NB \cdot x \cdot \cos(۹۰^\circ - \hat{C} + \hat{B}) = NC^۲ - ۲NC \cdot x \cdot \cos(۹۰^\circ - \hat{B} + \hat{C})$$

$$\Leftrightarrow NB^۲ - ۲NB \cdot x \cdot \sin(\hat{C} - \hat{B}) = NC^۲ - ۲NC \cdot x \cdot \sin(\hat{B} - \hat{C}) \qquad (۳)$$

از قضیه سینوس‌ها داریم:

$$NB = ۲R \cdot \sin(۹۰^\circ - \hat{B}) = ۲R \cdot \cos \hat{B} \quad , \quad NC = ۲R \cdot \sin(۹۰^\circ - \hat{C}) = ۲R \cdot \cos \hat{C}$$

حال رابطهٔ (۳) را می‌توان به صورت ساده‌تری نوشت:

$$۴R^۲ \cdot \cos^۲ \hat{B} + ۴R \cdot x \cdot \cos \hat{B} \cdot \sin(\hat{B} - \hat{C}) = ۴R^۲ \cdot \cos^۲ \hat{C} - ۴R \cdot x \cdot \cos \hat{C} \cdot \sin(\hat{B} - \hat{C})$$

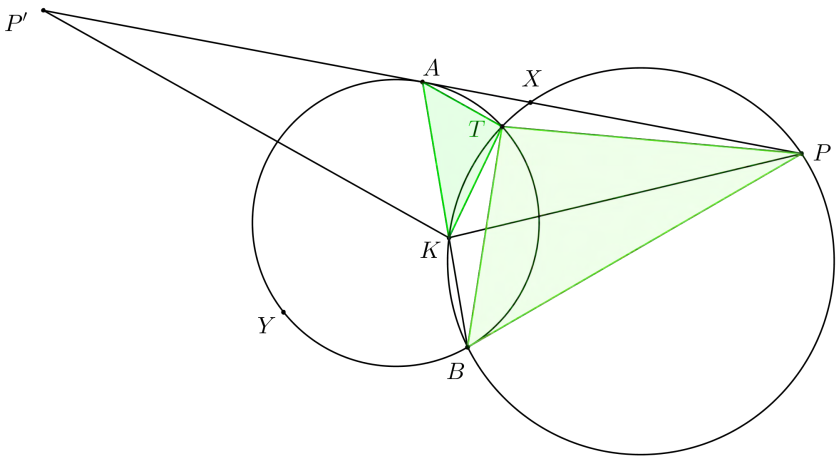
$$\Leftrightarrow \quad x \cdot \sin(\hat{B} - \hat{C}) \cdot \left[\cos \hat{B} + \cos \hat{C}\right] = R \cdot \left[\cos \hat{C} - \cos \hat{B}\right] \cdot \left[\cos \hat{B} + \cos \hat{C}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{R} = \frac{\cos \hat{C} - \cos \hat{B}}{\sin(\hat{B} - \hat{C})} = \frac{۲\,\sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲})\ \sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲})}{۲\,\sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲})\ \cos(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲})} = \frac{\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲})}{\cos(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲})}$$

این تساوی، همان رابطهٔ (۲) می‌باشد و از آنجا که این مراحل بازگشت‌پذیرند خواهیم داشت: $NK = NL$.

۴. فرض کنید C یک دایره و P نقطه‌ای خارج از آن باشد. دو مماس PA و PB را بر دایره رسم و نقطهٔ K را روی پاره‌خط AB انتخاب کرده‌ایم. دایرهٔ محیطی مثلث $\overset{\triangle}{PBK}$ برای بار دوم دایرهٔ C را در نقطهٔ T قطع می‌کند. قرینهٔ P نسبت به A را P' می‌نامیم. نشان دهید $\angle PBT = \angle P'KA$.

راه حل اول. در این راه حل همهٔ کمان‌ها متعلق به دایرهٔ C هستند.

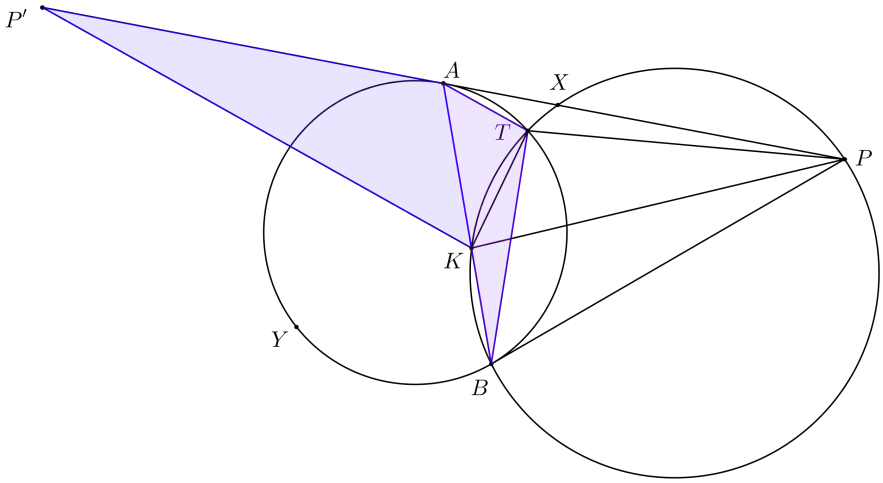


چهارضلعی $KTPB$ محاطی است بنابراین $\angle AKT = \angle BPT$:

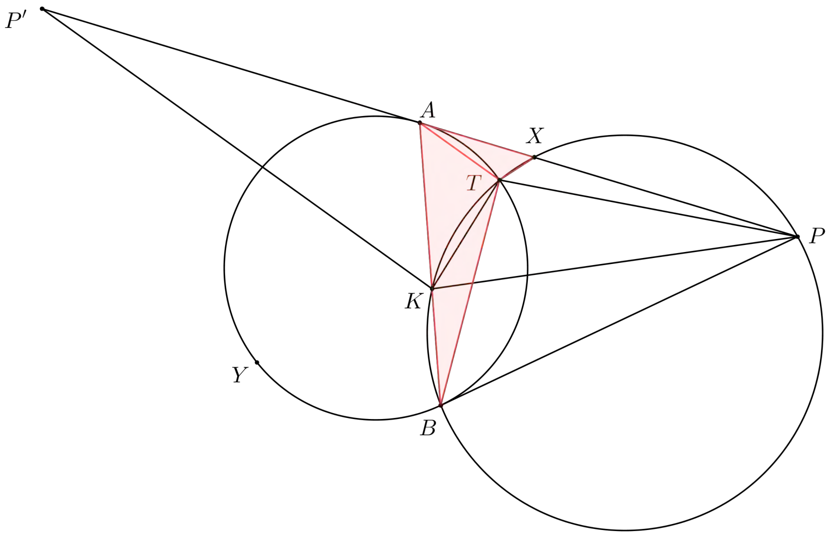
$$\left.\begin{array}{c}\angle TAK = \frac{\overset{\frown}{TB}}{۲} = \angle TBP \\ \angle AKT = \angle BPT\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{TAK} \sim \overset{\triangle}{TBP} \Rightarrow \frac{TA}{TB} = \frac{AK}{BP} = \frac{AK}{AP'} \Rightarrow \frac{AP'}{TB} = \frac{AK}{TA} \quad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$\left.\begin{array}{c}\angle P'AK = \frac{\overset{\frown}{AYB}}{۲} = \angle BTA \\ (۱)\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{P'AK} \sim \overset{\triangle}{BTA} \Rightarrow \angle P'KA = \angle BAT = \angle PBT.$$



راه حل دوم. در این راه حل تنها رابطهٔ (۱) را از راه دیگری ثابت می‌کنیم. قوت نقطهٔ A را نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث $P\overset{\triangle}{B}K$ محاسبه می‌کنیم:

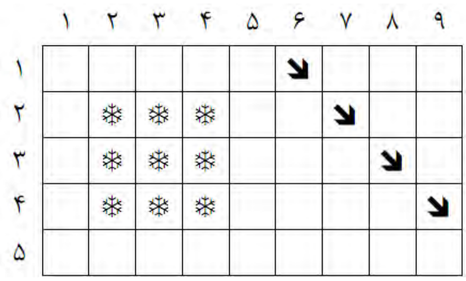


$$AX \cdot AP = AK \cdot AB \Rightarrow \frac{AB}{AX} = \frac{AP}{AK} = \frac{AP'}{AK} \quad (۱)$$

از طرفی چهارضلعی $TKBP$ محاطی است:

$$\left.\begin{array}{c} \angle TBP = \angle TXA \\ \angle TAX = \frac{\overset{\frown}{AT}}{۲} = \angle TBA \\ \angle TAB = \frac{\overset{\frown}{TB}}{۲} = \angle TBP \end{array}\right\} \Rightarrow T\overset{\triangle}{A}B \sim T\overset{\triangle}{X}A \Rightarrow \frac{AB}{XA} = \frac{TB}{TA} \overset{(۱)}{\Rightarrow} \frac{AP'}{AK} = \frac{TB}{TA} \Rightarrow \frac{AP'}{TB} = \frac{AK}{TA}$$

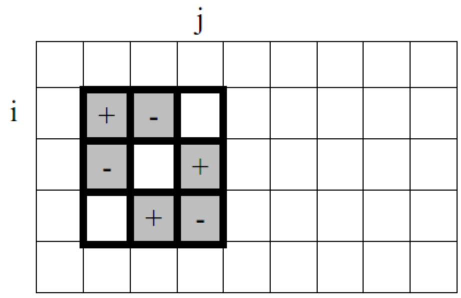
۵. در خانه‌های یک جدول $n \times m$ اعداد صحیح نوشته شده است. منظور از یک ردیف اریب، خانه‌هایی از جدول است که تفاضل شمارهٔ ستون و شمارهٔ سطر آن‌ها برابر مقداری ثابت است. می‌خواهیم طی چند مرحله اعداد داخل جدول را صفر کنیم. در هر مرحله می‌توانیم خانه‌های یک ردیف افقی یا یک ردیف عمودی و یا یک ردیف اریب را انتخاب و از همه یک واحد کم کنیم یا به همه یک واحد اضافه کنیم. ثابت کنید اگر بتوان اعداد داخل هر زیرجدول ۳×۳ را، صرف نظر از خانه‌های دیگر، صفر کرد آن‌گاه می‌توان همهٔ اعداد داخل جدول را صفر کرد. به عنوان مثال در جدول ۹×۵ زیر، خانه‌های یکی از ردیف‌های اریب و خانه‌های یکی از زیرجدول‌های ۳×۳ مشخص شده‌اند. توجه کنید که خانهٔ گوشهٔ راست-بالا (سطر ۱، ستون ۹) نیز به تنهایی یک ردیف اریب حساب می‌شود.



راه حل. ابتدا حکم مسأله را در حالتی که $m, n \geq ۳$ اثبات می‌کنیم. در حالتی که یکی از m و n کمتر از ۳ باشد، زیر جدول ۳×۳ وجود ندارد. پس می‌توان هر زیر جدول ۳×۳ آن را صفر کرد. در این حالت باید ثابت کنیم جدول را می‌توان با اعمال معرفی شده صفر کرد. این قسمت را در انتها ثابت می‌کنیم.

عدد نوشته‌شده در خانه‌ی سطر i و ستون j را با $A(i, j)$ نشان می‌دهیم. یک زیرجدول ۳×۳ در نظر بگیرید که خانهٔ گوشهٔ بالا-راست آن، (i, j) باشد. این زیرجدول را با $S(i, j)$ نشان می‌دهیم. منظور از شاخص این زیر جدول، عدد حاصل از جمع زدن اعداد خانه‌های مشخص شده در شکل زیر با علامت‌های مشخص شده است، یعنی عدد

$$A(i + ۱, j) - A(i + ۲, j) + A(i + ۲, j - ۱) - A(i + ۱, j - ۲) + A(i, j - ۲) - A(i, j - ۱)$$



خانه‌های مشخص شده در شکل بالا دارای این خاصیت هستند که هر ردیف افقی یا عمودی یا اریب، خانه‌های مشخص شده در شکل بالا را یا قطع نمی‌کند و یا در دو خانه با علامت مخالف قطع می‌کند. پس با انجام هر یک از اعمال مجاز در صورت مسأله، شاخص یک زیرجدول تغییر نمی‌کند. حال از آن‌جا که بنابر فرض، می‌توان اعداد هر

زیرجدول ۳×۳ را صفر کرد، و چون شاخص در طول این فرآیند تغییر نمی‌کند پس شاخص هر زیرجدول ۳×۳ از ابتدا صفر است و در طول فرآیند نیز صفر می‌ماند.

اکنون مقدمات لازم برای اثبات حکم را داریم. حکم را با استقرا روی $m + n$ اثبات می‌کنیم. پایهٔ استقرا در حالتی است که $m + n = ۶$، یعنی $m = n = ۳$. در این حالت حکم بدیهی است چون کل جدول یک زیرجدول ۳×۳ است. حال فرض کنید $m + n > ۶$. پس دست‌کم یکی از m و n از ۳ بیش‌تر است. فرض می کنیم $m > ۳$ (حالت $n > ۳$ مشابه است). حال زیرجدولی از جدول اصلی را در نظر بگیرید که از حذف ستون آخر به دست آمده است. فرض استقرا برای این زیرجدول $n \times (m - ۱)$ برقرار است. پس بنابر استقرا، می‌توان با استفاده از اعمال مجاز، همهٔ اعداد این زیرجدول را صفر کرد. پس به جدولی می‌رسیم که تنها ستون آخر آن ممکن است ناصفر باشد. ادعا می‌کنیم که در این حالت اعداد ستون آخر به جز عدد خانهٔ بالا-راست، باید برابر باشند. زیرجدول $S(۱, m)$ را در نظر بگیرید. شاخصِ این جدول برابر است با

$$A(۲, m)-A(۳, m)+A(۳, m-۱)-A(۲, m-۲)+A(۱, m-۲)-A(۱, m-۱) = A(۲, m)-A(۳, m)$$

از طرفی بنابر آن‌چه گفته شد، این شاخص باید صفر باشد. پس $A(۳, m) = A(۲, m)$. با در نظر گرفتن زیرجدول‌های $S(۳, m)$، $S(۴, m)$، ... و $S(n - ۲, m)$ و تکرار استدلال فوق، مشابهاً نتیجه می‌شود $A(۴, m) = A(۳, m)$، $A(۵, m) = A(۴, m)$، ... و $A(n, m) = A(n - ۱, m)$. پس در ستون آخر، مقادیر همهٔ خانه‌ها به جز خانه $(۱, m)$ با یک‌دیگر برابرند. پس با استفاده از تعدادی عمل مجاز روی ستون آخر می‌توان همهٔ آن‌ها را صفر کرد و سپس با استفاده از ردیف اریبی که تنها از خانهٔ$(۱, m)$ تشکیل شده، می‌توان خانه‌ی $(۱, m)$ را نیز صفر کرد و بنابراین کل جدول صفر می‌شود.

تنها می‌ماند حالتی را ثابت کنیم که حداقل یکی از m و n از ۳ کم‌تر باشند. مثلاً فرض کنید $m < ۳$ (حالت $n < ۳$ مشابه است). اگر $m = ۱$، به وضوح می‌توان با استفاده از سطرها، همهٔ خانه‌ها را صفر کرد. اگر $m = ۲$، روش زیر را به کار می‌بریم.

ابتدا با استفاده از سطر nام، $A(n, ۱)$ را صفر می‌کنیم. سپس با استفاده از ردیف اریب گذرنده از خانه $(n, ۲)$، $A(n, ۲)$ را صفر می‌کنیم. سپس با استفاده از سطر $(n - ۱)$ام، $A(n - ۱, ۱)$ را صفر می‌کنیم. سپس با استفاده از ردیف اریب گذرنده از خانه $(n - ۱, ۲)$، $A(n - ۱, ۲)$ را صفر می‌کنیم و همین فرآیند را ادامه می‌دهیم تا همهٔ جدول صفر شود.

۶. دنبالهٔ $\{a_n\}$ از اعداد طبیعی در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+۲} = \left[\frac{۲a_{n+۱}}{a_n}\right] + \left[\frac{۲a_n}{a_{n+۱}}\right]$$

که در آن منظور از $[x]$، جزء صحیح عدد x است. ثابت کنید عدد طبیعی m وجود دارد که $a_m = ۴$ و $a_{m+۱} \in \{۳, ۴\}$.

راه حل.

لم۱. به ازای هر $n \geq ۳$ داریم: $a_n \geq ۳$

اثبات. فرض کنید $a_n < ۳$ اگر $a_{n-۱} \geq a_{n-۲}$ نتیجه می‌شود

$$\frac{۲a_{n-۱}}{a_{n-۲}} \geq ۲ \Rightarrow \left[\frac{۲a_{n-۱}}{a_{n-۲}}\right] \geq ۲ \Rightarrow \left[\frac{۲a_{n-۲}}{a_{n-۱}}\right] = ۰ \Rightarrow a_{n-۱} > ۲a_{n-۲} \Rightarrow \frac{۲a_{n-۱}}{a_{n-۲}} > ۴$$

که با فرض $a_n < ۳$ در تناقض است. در حالتی که $a_{n-۲} \geq a_{n-۱}$ نیز استدلال کاملاً مشابه است چون رابطهٔ بازگشتی نسبت به دو جمله قبل متقارن است.

لم۲. به ازای هر $n \geq ۳$ داریم: $a_{n+۲} < \max\{a_{n+۱}, a_n\}$ یا $a_{n+۱} = a_n$.

اثبات. فرض می‌کنیم $a_{n+۱} \neq a_n$. همچنین به علت تقارن رابطهٔ بازگشتی بدون کاسته شدن از کلیت فرض می‌کنیم $a_n = \max\{a_{n+۱}, a_n\}$ پس:

$$\frac{۲a_{n+۱}}{a_n} < ۲$$

ازطرفی

$$a_{n+۱}, a_n \geq ۳ \Rightarrow \frac{۲a_n}{a_{n+۱}} \leq \frac{۲a_n}{۳} \Rightarrow a_{n+۲} = \left[\frac{۲a_{n+۱}}{a_n}\right] + \left[\frac{۲a_n}{a_{n+۱}}\right] \leq ۱ + \frac{۲a_n}{۳} \leq \frac{a_n}{۳} + \frac{۲a_n}{۳} = a_n$$

و با توجه به فرض $a_{n+۱} \neq a_n$ هر دوی نابرابری‌های $\frac{۲a_n}{a_{n+۱}} \leq \frac{۲a_n}{۳}$ و $۱ \leq \frac{a_n}{۳}$ نمی‌توانند تساوی باشند و حکم نتیجه می‌شود.

لم۳. k وجود دارد که $a_k = a_{k+۱}$

اثبات. اگر چنین نباشد طبق لم ۲ برای هر $n \geq ۳$:

$$a_{n+۲} < \max\{a_{n+۱}, a_n\}$$

و

$$a_{n+۳} < \max\{a_{n+۲}, a_{n+۱}\}$$

در حالتی که $a_{n+۲} < a_{n+۳}$ نتیجه می‌شود $a_{n+۳} < a_{n+۱}$ یعنی

$$\max\{a_{n+۳}, a_{n+۲}\} < \max\{a_{n+۱}, a_n\}$$

و در حالتی که $a_{n+۲} > a_{n+۳}$ نیز نتیجه می‌شود

$$\max\{a_{n+۳}, a_{n+۲}\} < \max\{a_{n+۱}, a_n\}$$

یعنی ماکزیمم جفت جمله‌های متوالی همواره اکیداً نزولی است که غیر ممکن است. توجه کنید که این استدلال نتیجه می‌دهد که دو جمله برابر و متوالی بی‌نهایت بار در دنباله ظاهر می‌شود.

حال توجه کنید که همواره پس از دو جملهٔ برابر در دنباله عدد ۴ ظاهر می‌شود و اگر آن دو عدد برابر ۳ یا ۴ باشند مطلوب حاصل می‌شود چون اگر ۳ و ۴ پشت سر هم بیایند جملهٔ بعد از ۴ هم ۳ می‌شود. اما اگر آن دو عدد برابر بزرگتر از ۴ باشند مثلاً $a_k = a_{k+۱} > ۴$ اگر اولین باری که دو عدد مساوی دیگر در دنباله ظاهر می‌شود $a_{k+m} = a_{k+m+۱}$ باشد که m فرد است، با توجه به اثبات لم ۳ داریم:

$$a_{k+۱} = \max\{a_{k+۱}, a_{k+۲} = ۴\} > \max\{a_{k+۳}, a_{k+۴}\} > \cdots > \max\{a_{k+m}, a_{k+m+۱}\} = a_{k+m}$$

و در حالتی که m زوج است داریم:

$$a_{k+۱} = \max\{a_{k+۱}, a_{k+۲} = ۴\} > \max\{a_{k+۳}, a_{k+۴}\} > \cdots > \max\{a_{k+m-۱}, a_{k+m}\} \geq a_{k+m}$$

یعنی تا وقتی اعداد متوالی برابر بیش از ۴ باشند همواره یک جفت برابر متوالی کمتر از جفت برابر متوالی قبلی است ولی این روند نمی‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد و پس از مدتی به دو عدد ۳ یا ۴ متوالی می‌رسیم که مطلوب ما را به دست می‌دهد.