سؤالات و پاسخ‌های تشریحی آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی ایران

وبگاه المپیاد ریاضی ایران

mathysc.ir

کمیته ی ملی المپیاد ریاضی ایران
باشگاه دانش پژوهان جوان

بسم الله الرحمن الرحیم

آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱ اسفند ۱۳۹۲ و با شرکت ۲۵۸۷۱ نفر از دانش‌آموزان پایه‌های اول، دوم و سوم دبیرستان به طور همزمان در سراسر کشور برگزار گردید. دفترچه‌ی پیش رو مجموعهٔ سؤالات و پاسخ‌های تشریحی این آزمون است که به همت وبگاه المپیاد ریاضی ایران تهیه و منتشر می‌گردد.

زمان: ۱۸۰ دقیقه

تعداد سؤالات: ۲۵

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

۱. سینا می‌خواهد برای دوره‌کردن کتاب‌های ریاضیات، ادبیات و فیزیک سه سال دبیرستان (۹ کتاب) برنامه‌ریزی کند به‌نحوی که کتاب‌های هر مبحث به ترتیب پایهٔ آن‌ها مطالعه شود (برای مثال کتاب فیزیک ۱ پیش از کتاب فیزیک ۲ مطالعه شود). او به چند ترتیب مختلف می‌تواند همهٔ کتاب‌ها را مطالعه کند؟

پاسخ: ۱۶۸۰

هر روش مطالعه معادل است با یک نحوه‌ی قرار دادن سه کلمه‌ی ریاضی، سه کلمه‌ی فیزیک و سه کلمه‌ی ادبیات در یک ردیف ۹ تایی.

بدین منظور، برای انتخاب مکان سه کلمه‌ی ریاضی، $\binom{۹}{۳}$ حالت مختلف داریم. سپس از بین ۶ جایگاه باقی‌مانده، برای انتخاب مکان سه کلمهٔ ادبیات، $\binom{۶}{۳}$ حالت مختلف داریم و بعد از آن، مکان کلمات فیزیک به طور یکتا مشخص می‌شود. پس جواب مسأله برابر است با

$$\binom{۹}{۳} \times \binom{۶}{۳} = \frac{۹!}{۶!۳!} \times \frac{۶!}{۳!۳!} = \frac{۹!}{۳!۳!۳!} = ۱۶۸۰$$

۲. x و y دو عدد حقیقی هستند که $x + y = ۶$ و $x^۲ + y^۲ = ۴۰$. مقدار $x^۶ + y^۶$ چه‌قدر است؟

پاسخ: ۶۳۵۲۰

راه حل اول. ابتدا می‌توان مقدار xy را محاسبه کرد.

$$۳۶ = (x + y)^۲ = x^۲ + y^۲ + ۲xy = ۴۰ + ۲xy \Rightarrow xy = -۲$$

حال با استفاده از اتحاد مجموع مکعب‌ها داریم:

$$x^۶ + y^۶ = (x^۲ + y^۲)(x^۴ + y^۴ - x^۲y^۲) = ۴۰(x^۴ + y^۴ - ۴)$$

می‌توان مقدار $x^۴ + y^۴$ را هم به سادگی محاسبه کرد.

$$۱۶۰۰ = ۴۰^۲ = (x^۲ + y^۲)^۲ = x^۴ + y^۴ + ۲x^۲y^۲ = x^۴ + y^۴ + ۸ \Rightarrow x^۴ + y^۴ = ۱۵۹۲$$

پس در نهایت داریم:

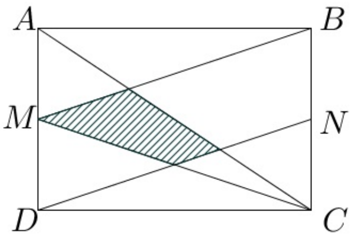
$$x^۶ + y^۶ = ۴۰(۱۵۹۲ - ۴) = ۴۰ \times ۱۵۸۸ = ۶۳۵۲۰$$

راه حل دوم. طبق قسمت اول راه‌حل بالا می‌دانیم که حاصل‌ضرب x و y برابر -۲ است. بنابراین با توجه به این که مجموع آن‌ها هم برابر ۶ است، x و y دو ریشهٔ چندجمله‌ای $z^۲ - ۶z - ۲$ هستند. بنابراین

$$\{x, y\} = \{۳ + \sqrt{۹ + ۲}, ۳ - \sqrt{۹ + ۲}\} = \{۳ + \sqrt{۱۱}, ۳ - \sqrt{۱۱}\}$$

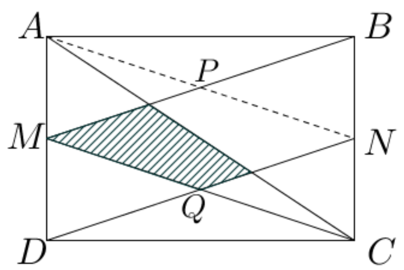
حال با به دست آمدن مقدار x و y، می‌توان مقدار $x^۶ + y^۶$ را با بسط دادن $(۳ \pm \sqrt{۱۱})^۶$ به دست آورد.

۳. در شکل روبه‌رو M و N به ترتیب وسط‌های اضلاع AD و BC از مستطیل $ABCD$ هستند. مساحت مستطیل چه مضربی از چهارضلعی هاشورخورده است؟



پاسخ: ۸

راه حل اول. مطابق شکل زیر اگر با پاره‌خطی نقطه‌ی A را به N وصل کنیم، با توجه به این که $MC \parallel AN$ و $DN \parallel MB$، چهارضلعی $PNQM$ یک متوازی‌الاضلاع است. مرکز این چهارضلعی وسط قطرهای آن یعنی وسط MN است که همان محل برخورد قطرهای مستطیل است. دقت کنید که خط AC از مرکز این متوازی‌الاضلاع عبور می‌کند و بنابراین مساحت آن را نصف می‌کند.

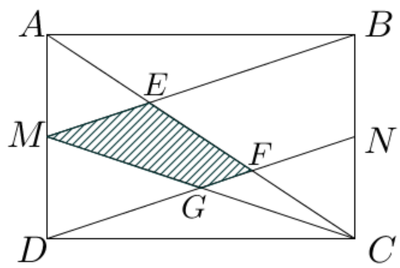


پس مساحت چهارضلعی هاشورخورده، نصف مساحت چهارضلعی $MPNQ$ است که برابر مساحت مثلث MQN است. برای به دست آوردن مساحت این مثلث دقت کنید که ارتفاع نظیر

Q، $\frac{۱}{۴}$ طول ضلع AD و قاعده‌ی آن یعنی MN برابر طول ضلع AB است. پس در کل مساحت مستطیل ۸ برابر مساحت مثلث MNQ و بنابراین ۸ برابر مساحت چهارضلعی هاشورخورده است.

راه حل دوم. مطابق شکل زیر این بار سه رأس دیگر چهارضلعی هاشورخورده را E، F و G می‌نامیم. هم‌چنین مساحت مستطیل را با S نمایش می‌دهیم.

$$AMC \text{ مساحت} = \frac{۱}{۲}AM.CD = \frac{۱}{۲} \times \frac{AD}{۲} \times DC = \frac{۱}{۴}S$$



دقت کنید که دو مثلث AEM و CEB متشابه هستند. پس نسبت ارتفاع‌های این دو مثلث برابر نسبت $\frac{AM}{BC}$ است که برابر $\frac{۱}{۲}$ است. از طرفی می‌دانیم مجموع طول ارتفاع‌های این دو مثلث برابر طول ضلع AB است. پس طول ارتفاع AEM برابر $\frac{۱}{۳}AB$ است و در نتیجه

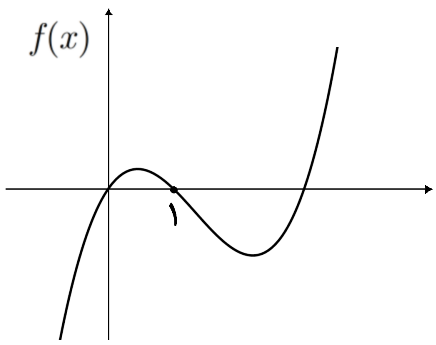
$$AME \text{ مساحت} = \frac{۱}{۲} \times \text{ارتفاع} \times AM = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}AB \times \frac{۱}{۲}AD = \frac{۱}{۱۲}S$$

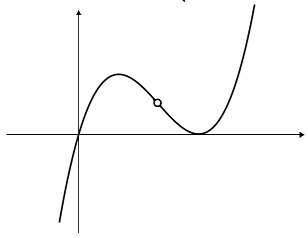
پس مساحت مثلث EMC که تفاضل مساحت مثلث‌های AMC و AME است، برابر $\frac{۱}{۴}S - \frac{۱}{۱۲}S = \frac{۱}{۶}S$ است.

در نهایت توجه کنید که چون مثلث‌های CFG و CEM متشابه هستند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر $\frac{۱}{۴} = (\frac{CG}{CM})^۲$ است. پس

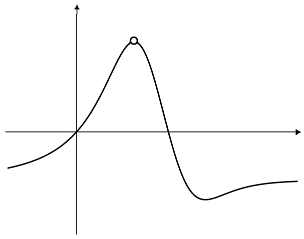
$$MEFG \text{ مساحت} = \frac{۳}{۴} \times MEC \text{ مساحت} = \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۶}S = \frac{۱}{۸}S$$

۴. فرض کنید نمودار تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به شکل روبه‌رو باشد. در این صورت نمودار تابع $\frac{f(x)}{x-۱}$ شبیه کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (نمودارهای همهٔ گزینه‌ها در نقطهٔ $x = ۱$ تعریف نشده هستند.)

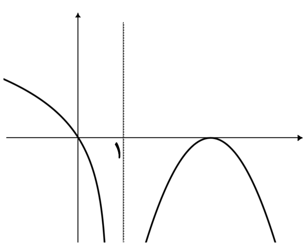




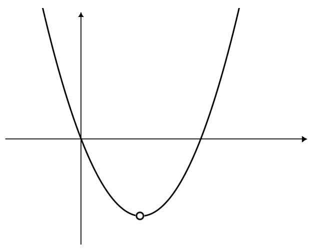
۱)



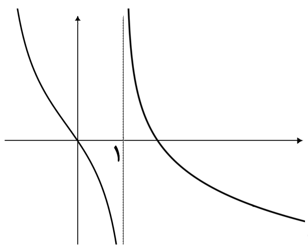
۲)



۳)



۴)



۵)

پاسخ: ۴

از آنجا که برای اعداد کمتر از صفر $f(x)$ و $x - ۱$ هر دو منفی هستند، حاصل تقسیم آن‌ها عددی مثبت خواهد شد. بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ نمی‌توانند نمودار تابع $\frac{f(x)}{x-۱}$ باشند. فرض کنید f به جز نقاط صفر و یک، در نقطه c صفر شده است. برای اعداد بیشتر از c، $f(x)$ و $x - ۱$ هر دو مثبت هستند. بنابراین در این محدوده نیز حاصل تقسیم آن‌ها مثبت است. به این ترتیب گزینه های ۳ و ۵ نیز نمی‌توانند جواب مسأله باشند. بنابراین جواب تنها می‌تواند گزینه ۴ باشد. اگر $f(x) = x(x-۱)(x-۲)$، آنگاه $\frac{f(x)}{x-۱} = x(x-۲)$ نموداری شبیه گزینه ۴ دارد.

۵. یک عدد طبیعی را کوچولو می‌نامیم، هرگاه دست‌کم سه مقسوم‌علیه مثبت داشته باشد و برابر مجموع کوچک‌ترین سه مقسوم‌علیه مثبتش باشد. چند عدد کوچولو وجود دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶ ۵) بی‌نهایت

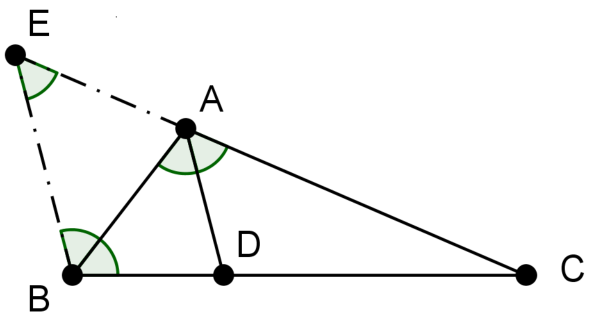
پاسخ: ۲

کوچک‌ترین مقسوم‌علیه مثبت هر عددی یک است و دومین مقسوم‌علیه کوچک عدد اولی مثل p است. سومین مقسوم‌علیه هم عدد اول دیگری مثل q و یا $p^۲$ است. اگر n عددی کوچولو باشد، مقسوم‌علیه سوم آن نمی‌تواند $p^۲$ باشد، چون در این صورت $n = ۱ + p + p^۲$ که در این صورت n نمی‌تواند بر p بخش‌پذیر باشد.
پس $n = ۱ + p + q$ که $p < q$ دو مقسوم‌علیه اول کوچک n هستند. چون $p|n$ و $q|n$، نتیجه می‌شود، $p|۱ + q$ و $q|۱ + p$. پس $q \leq ۱ + p$، از طرف دیگر $p < q$. بنابراین $q = p + ۱$ و در نتیجه p و q دو عدد اول متوالی هستند. این یعنی $p = ۲$ و $q = ۳$. در این صورت n برابر ۶ می‌شود که خاصیت مورد نظر را دارد. پس تنها همین یک عدد کوچولو را داریم و پاسخ گزینه‌ی ۲ است.

۶. در مثلث ABC نقطهٔ D روی ضلع BC به گونه‌ای قرار گرفته که زاویه‌های $\widehat{BAD}$ ، $\widehat{CAD}$ و $\widehat{ABC}$ با هم برابرند و طول پاره‌خط‌های BD و DC به ترتیب برابر ۱ و ۲ است. طول AB چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۵) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

پاسخ: ۳



طول AB را x می‌نامیم. از نقطه‌ی B خطی به موازات AD رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AC را در E قطع کند.

با توجه به موازی بودن BE و AD داریم:

$$\widehat{BEA} = \widehat{CAD}, \quad \widehat{EBA} = \widehat{BAD}$$

بنابراین، $\widehat{EBA} = \widehat{BEA}$ و در نتیجه مثلث ABE متساوی‌الساقین است، یعنی $EA = BA = x$.

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ تالس برای دو خط موازی AD و BE،

$$\frac{CA}{AE} = \frac{CD}{BD} = \frac{۲}{۱}$$

بنابراین $CA = ۲AE = ۲x$ و نیز، $CE = ۳x$.

از طرف دیگر، توجه کنید که $\widehat{CBE} = \widehat{CAB}$، پس دو مثلث CAB و CBE با همین ترتیب رئوس با یک‌دیگر متشابه‌اند. بنابراین،

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{EC}$$

که با توجه به روابط قبلی به دست می‌آید

$$\frac{۲x}{۳} = \frac{۳}{۳x}$$

که از آن به دست می‌آید $x^۲ = \frac{۳}{۲}$ و در نتیجه $x = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$.

۷. دنبالهٔ $a_۰, a_۱, a_۲, \ldots$ از اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_۰ = ۱, \\ a_{n+۱} = ۱۳^{a_n} \quad n \geq ۰. \end{cases}$$

رقم یکان $a_{۱۳۹۲}$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷ ۵) ۹

پاسخ: ۲

برای تعیین رقم یکان $a_{۱۳۹۲}$ کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم آن به ۱۰ را مشخص کنیم.

برای این منظور دقت کنید که برای هر عدد طبیعی n:

$$a_{n+1} \equiv 13^{a_n} \equiv 1^{a_n} \equiv 1 \quad \text{(به پیمانه‌ی ۴)}$$

یعنی هر a_n ای به شکل $4b_n + 1$ است که b_n خود یک عدد صحیح است. حال داریم

$$a_{1392} \equiv 13^{a_{1391}} \equiv 3^{4b_{1391}+1} \equiv (3^4)^{b_{1391}} \times 3 \equiv (81)^{b_{1391}} \times 3 \equiv 3 \quad \text{(به پیمانه‌ی ۱۰)}$$

۸. در مورد اعداد زیر کدام گزینه درست است؟

$$a = 100!, \quad b = 2^{100}, \quad c = 2^{2^{2^{2}}}$$

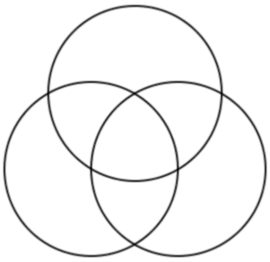
۱) $b < a < c$ ۲) $a < b < c$ ۳) $c < a < b$ ۴) $b < c < a$ ۵) $a < c < b$

پاسخ: ۱

$$b = 2^{100} = \overbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}^{100} = (\overbrace{2 \times \cdots \times 2}^{98}) \times 2 \times 2 <$$
$$(2 \times 3 \times \cdots \times 99) \times 100 = 100! = a$$
$$a = 1 \times 2 \times \cdots \times 100 < 100^{100} < 128^{100} = 2^{700} < 2^{2^{10}} < 2^{2^{2^{2}}} = c$$

پس $b < a < c$.

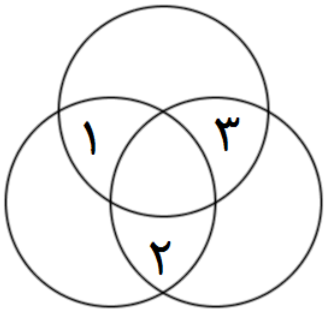
۹. می‌خواهیم با سه رنگ آبی، قرمز و سبز، هفت ناحیهٔ درون شکل روبه‌رو را رنگ‌آمیزی کنیم، به طوری که ناحیه‌های همسایه رنگ‌های متفاوتی داشته‌باشند (ناحیه‌هایی که فقط در یک نقطه اشتراک دارند همسایه <u>نیستند</u>). این کار به چند طریق ممکن است؟



پاسخ: ۸۴

فرض می‌کنیم ناحیه‌های مشخص شده با اعداد $1, 2, 3$ در شکل زیر به ترتیب دارای رنگ‌های X, Y, Z باشند. توجه کنید که تمامی رنگ‌های X, Y, Z نمی‌توانند متمایز باشند زیرا در غیر

این صورت ناحیه‌ی مرکزی را با هیچ رنگی نمی‌توان رنگ کرد. اکنون دو حالت را بررسی می‌کنیم.



حالت اول: X, Y, Z همرنگ باشند. در این حالت رنگ مشترک را می‌توان به ۳ حالت انتخاب کرد. همچنین هر یک از دیگر نواحی را می‌توان به دو صورت رنگ‌آمیزی کرد. پس در این حالت تعداد رنگ‌آمیزی‌ها برابر ۴۸ = ۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۳ است.
حالت دوم: در میان X, Y, Z از یک رنگ دوبار و از یک رنگ یک بار استفاده شده باشد. برای انتخاب ناحیه‌ی با رنگ متمایز ۳، برای انتخاب رنگ این ناحیه ۳ و برای انتخاب رنگ دیگر ۲ انتخاب داریم. پس برای مشخص نمودن رنگ ناحیه‌ی ۱, ۲, ۳ در این حالت ۱۸ = ۲ × ۳ × ۳ روش متمایز داریم. حال توجه کنید که رنگ ناحیه‌ی مرکزی به صورت یکتا مشخص می‌شود چرا که از دو رنگ متمایز، همسایه دارد. همچنین دو تا از نواحی گوشه‌ای نیز با هر دو رنگ مجاور هستند و رنگ این نواحی نیز به صورت یکتا مشخص می‌گردد. تنها ناحیه‌ی نامشخص ناحیه‌ی گوشه‌ای است که با دو ناحیه‌ی همرنگ مجاور است و در نتیجه می‌توان آن را به دو شیوه رنگ‌آمیزی کرد. پس در این حالت طبق اصل ضرب تعداد شیوه‌های رنگ‌آمیزی برابر ۳۶ = ۲ × ۱۸ است.
پس طبق اصل جمع تعداد راه‌های رنگ‌آمیزی شکل برابر ۸۴ = ۳۶ + ۴۸ است.

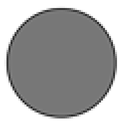
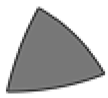
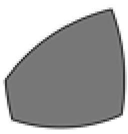
۱۰. وزارت راه و ترابری آزادراهی به طول ۵۲۴۲۸۸ = $۲^{۱۹}$ متر بین زاهدان و مشهد احداث کرده است و قصد دارد در یک پروژهٔ بلندمدت این آزادراه را مجهز به چراغ‌های روشنایی کند. در هر روز از بین بزرگ‌ترین قطعه‌هایی از آزادراه که هیچ چراغی در آن نیست، نزدیک‌ترین قطعه

به زاهدان انتخاب شده و در نقطهٔ وسط آن یک چراغ نصب می‌شود. هزار و یکمین چراغی که نصب می‌شود، چند متر با مشهد فاصله دارد؟

پاسخ: ۲۳۰۴۰

اولین چراغ در وسط آزادراه احداث می‌شود. چراغ‌های دوم و سوم به ترتیب در $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۳}{۴}$ مسیر زاهدان به مشهد احداث می‌شوند. به همین شکل چراغ‌های چهارم تا هفتم بین آن‌ها و در حالت کلی برای عدد طبیعی n چراغ‌های ۲^n ام تا $۲^{n+۱} - ۱$ ام در میانه راه‌های بین چراغ‌های فعلی قرار خواهند گرفت. می‌دانیم که ۱۰۰۱ بین $۵۱۲ = ۲^۹$ و $۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$ است و فاصله بین چراغ های متوالی تا قبل از نصب چراغ ۵۱۲ برابر $\frac{۲^{۱۹}}{۲^۹} = ۱۰۲۴$ متر است. در نتیجه فاصله مشهد تا چراغ ۱۰۰۱ ام برابر $(۱۰۲۳ - ۱۰۰۱) \times ۱۰۲۴ + ۵۱۲ = ۲۳۰۴۰$ است.

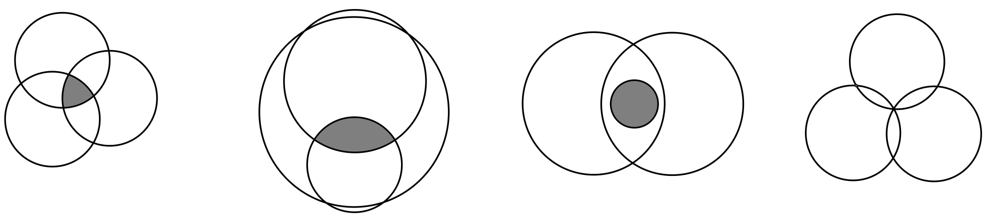
۱۱. چوپانی گوسفند گرسنهٔ خود را در چراگاهی سرسبز با سه طناب مختلف به سه درخت بسته است. گوسفند علف‌های همهٔ قسمت‌هایی از چراگاه که به آن دست‌رسی دارد را می‌خورد. ناحیه‌ای از چراگاه که گوسفند علف‌های آن را خورده است، کدام شکل نمی‌تواند باشد؟

۱) تک نقطه
۲) 
۳) 
۴) 
۵) 

پاسخ: ۵

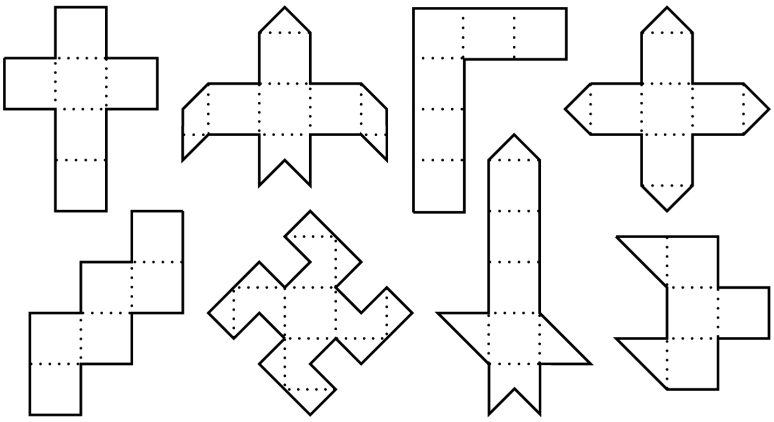
به مرکز هر درخت، دایره‌ای به شعاع طول طنابی که به آن وصل است رسم می‌کنیم. ناحیه‌ای که گوسفند علف‌های آن را می‌خورد دقیقاً اشتراک ناحیهٔ درونی این سه دایره است. بنابراین باید تعیین کنیم که اشتراک ناحیه‌ی داخل سه دایره، کدام شکل نمی‌تواند باشد.

گزینه‌های ۱ تا ۴ می‌توانند باشند، مانند شکل‌های زیر:



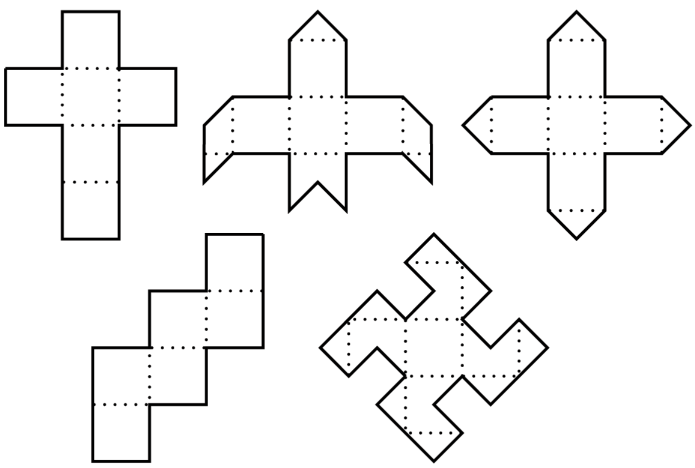
اما گزینه‌ی ۵ نمی‌تواند ناحیهٔ اشتراک سه دایره باشد. زیرا مرز آن از ۴ کمان تشکیل شده در حالی که ما تنها سه دایره داریم پس باید دوتا از کمان‌ها متعلق به یک دایره باشند اما به توجه به شکل، هیچ دوتایی متعلق به یک دایره نیستند. پس گزینه‌ی ۵ صحیح است.

۱۲. با تا کردن چند تا از شکل‌های زیر از روی خط‌چین‌ها می‌توان یک مکعب ساخت؟

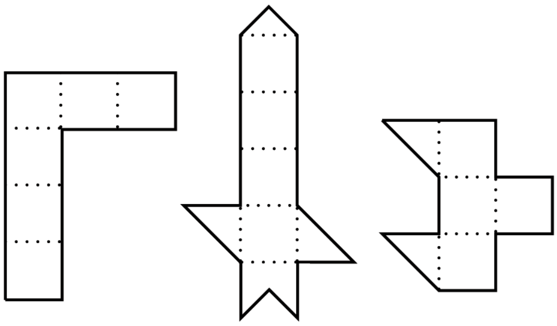


پاسخ: ۵

با اندکی تجسم فضایی می‌توان دید که شکل‌های زیر می‌توانند باز شدهٔ یک مکعب باشند.



اما با اشکال زیر نمی‌توان یک مکعب ساخت. شکل سمت راست پنج مربع دارد. در شکل وسط نیز مسیری موازی اضلاع به طول پنج وجود دارد. در شکل سمت چپ نیز مشاهده می‌شود که هر طور شکل را تا کنیم یک مکعب کامل به دست نمی‌آید.



۱۳. کوچک‌ترین عدد طبیعی که دارای ۱۳۹۲ مقسوم‌علیه مثبت است، چند عامل اول دارد؟

پاسخ: ۶

می‌دانیم $۳ \times ۱۶ \times ۲۹ = ۱۳۹۲$ حالت‌های مختلف برای عددی با ۱۳۹۲ مقسوم‌علیه مثبت فقط چهار حالت زیر است که در آن‌ها همهٔ p_iها اعدادی اول هستند.

حالت اول: $p_۱^{۲۸} \times p_۲^{۱۵} \times p_۳^{۲}$

حالت دوم: $p_۱^{۲۸} \times p_۲^{۷} \times p_۳^{۲} \times p_۴^{۱}$

حالت سوم: $p_۱^{۲۸} \times p_۲^{۳} \times p_۳^{۳} \times p_۴^{۲}$

حالت چهارم: $p_۱^{۲۸} \times p_۲^{۲} \times p_۳^{۱} \times p_۴^{۱} \times p_۵^{۱} \times p_۶^{۱}$

در هرکدام از حالت‌های بالا برای کوچک‌تر شدن عدد باید از عددهای اول کوچک به ترتیب استفاده کنیم پس کافی است عددهای زیر را باهم مقایسه کنیم و کوچک‌ترین آن‌ها را بیابیم.

$a_۱ = ۲^{۲۸} \times ۳^{۱۵} \times ۵^{۲}$

$a_۲ = ۲^{۲۸} \times ۳^{۷} \times ۵^{۲} \times ۷^{۱}$

$a_۳ = ۲^{۲۸} \times ۳^{۳} \times ۵^{۳} \times ۷^{۲}$

$a_۴ = ۲^{۲۸} \times ۳^{۲} \times ۵^{۱} \times ۷^{۱} \times ۱۱^{۱} \times ۱۳^{۱}$

حال با انجام محاسبات جواب را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{a_۱}{a_۲} = \frac{۳^۸}{۷} \Rightarrow a_۱ > a_۲$$

$$\frac{a_۴}{a_۳} = \frac{۱۱ \times ۱۳}{۳ \times ۵^۲ \times ۷} \Rightarrow a_۳ > a_۴$$

$$\frac{a_۲}{a_۴} = \frac{۳^۵ \times ۵}{۱۱ \times ۱۳} \Rightarrow a_۲ > a_۴$$

پس جواب سوال $a_۴$ است که دارای ۶ عامل اول است.

۱۴. در وب‌گاه المپیاد ریاضی ایران (www.mathysc.ir)کیفیت آزمون مرحلهٔ اول سال گذشته به نظرسنجی گذاشته شده است. گزینه‌های نظرسنجی عبارت‌اند از «خیلی خوب بود.»، «عالی بود.» و «به‌تر از این نمی‌شد.»! پیش از این که عباس نظر خود را ثبت کند، درصد گزینه‌ها به ترتیب دقیقاً برابر ۲۵، ۵۰ و ۲۵ بوده است و پس از آن این نسبت‌ها به ۲۴، ۴۸ و ۲۸ تبدیل می‌شود. به غیر از عباس چند نفر در نظر سنجی شرکت کرده‌اند؟

پاسخ: ۲۴

فرض کنید پیش از عباس n نفر در نظر سنجی شرکت کرده‌باشند. از آنجایی که یکی از گزینه‌ها دقیقاً ۲۵ درصد از آرا را به دست آورده است، پس n باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد. فرض کنید $n = ۴k$. پس از رأی عباس گزینه‌ی آخر («به‌تر از این نمی‌شد.») افزایش یافته است پس عباس به این گزینه رأی داده‌است. با توجه به صورت سوال پیش از این که عباس نظر خود را ثبت کند، k نفر به گزینه‌ی آخر رأی دادند. پس بعد از رأی عباس $k + ۱$ نفر و در نتیجه $\frac{k+۱}{۴k+۱} \times ۱۰۰$ درصد از افراد این گزینه‌را انتخاب کرده‌اند. با توجه به صورت سوال این مقدار برابر ۲۸ بوده و در نتیجه داریم:

$$\frac{k+۱}{۴k+۱} \times ۱۰۰ = ۲۸ \Rightarrow ۱۰۰k + ۱۰۰ = ۱۱۲k + ۲۸ \Rightarrow ۷۱ = ۱۲k \Rightarrow k = ۶$$

پس $n = ۴k = ۲۴$ پاسخ سوال است.

۱۵. چند زوج مرتب (p,q) از اعداد اول وجود دارد که برای آن‌ها داشته باشیم $p^۲ - pq + q^۲ = ۳۷^۲$.

پاسخ: ۱

به دلیل تقارن مسئله نسبت به p و q می‌توان فرض کرد $q \leq p$. حال داریم:

$$p(p-q) = (۳۷-q)(۳۷+q)$$

با توجه به این که سمت چپ نامنفی است، باید سمت راست هم نامنفی باشد و در نتیجه $q \leq ۳۷$. توجه کنید که چون $(۳۷-q)(۳۷+q)$ بر p بخش‌پذیر است، $p|۳۷-q$ و یا $p|۳۷+q$. اگر $p|۳۷-q$، نتیجه می‌شود که $p < ۳۷$ و در نتیجه $p(p-q) < ۳۷(۳۷-q) < (۳۷+q)(۳۷-q)$. پس این حالت ممکن نیست و تنها حالت $p|۳۷+q$ باقی می‌ماند. دقت کنید که اگر $p = ۳۷+q$ باشد، زوجیت p و q متفاوت است، و چون $p > q$ است، $q = ۲$ و $p = ۳۹$ است. اما ۳۹ اول نیست. در نتیجه داریم $p \leq \frac{۳۷+q}{۲} \leq ۳۷$.

$$p^۲ - pq + q^۲ = p^۲ + q(q-p) \leq ۳۷^۲ + ۰ = ۳۷^۲$$

چون این نابرابری به تساوی تبدیل شده است، باید $p = ۳۷$ و $q = p$ باشد. ضمناً اگر $p = q = ۳۷$ باشد، این معادله برقرار است. بنابراین با توجه به اول بودن ۳۷، $(۳۷,۳۷)$ تنها جواب این معادله در اعداد اول است.

۱۶. «ضربین‌حساب» ماشینی است که از یک صفحهٔ نمایش‌گر با قابلیت نمایش اعداد خیلی بزرگ و دکمه‌هایی با شماره‌های ۱ الی ۹ تشکیل شده است. با فشار دادن هر دکمه، ضربین‌حساب بلافاصله عدد صفحهٔ نمایش‌گر را در عدد مربوط به آن دکمه ضرب می‌کند و حاصل را به جای عدد قبلی در صفحه نمایش می‌دهد. اگر ابتدا عدد ۱ روی صفحهٔ نمایش‌گر نوشته شده باشد، برای به دست آوردن عدد $۲^{۲۰۱۴} \times ۳^{۱۴۳۵} \times ۵^{۱۳۹۲}$ دست‌کم چند بار باید از دکمه‌های ضربین‌حساب استفاده کرد؟ (برای مثال می‌توان با سه بار استفاده از دکمه‌های ضربین‌حساب به ۷۲۹ دست یافت، زیرا $۹ \times ۹ \times ۹ = ۷۲۹$.)

پاسخ: ۲۷۸۱

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

عدد مورد نظر در صورت مسأله را A بنامید. ابتدا نشان می‌دهیم که با ۲۷۸۱ بار استفاده از دکمه‌ها می‌توان عدد A را نمایش داد:

۱۳۹۲ بار دکمه‌ی ۵ را فشار می‌دهیم، سپس $\frac{۲۰۱۳}{۳}$ بار دکمه‌ی ۸ را فشار می‌دهیم، سپس $\frac{۱۴۳۴}{۲}$ بار دکمه‌ی ۹ را فشار می‌دهیم و در نهایت یک بار دکمه‌ی ۶ را فشار می‌دهیم. عددی که به دست می‌آید برابر است با

$$۵^{۱۳۹۲} \times ۸^{\frac{۲۰۱۳}{۳}} \times ۹^{\frac{۱۴۳۴}{۲}} \times ۶$$

که برابر با A است. به این ترتیب در مجموع $۱۳۹۲ + \frac{۲۰۱۳}{۳} + \frac{۱۴۳۴}{۲} + ۱ = ۲۷۸۱$ بار از دکمه‌های ضربین حساب استفاده کرده‌ایم.

اکنون نشان می‌دهیم با کم‌تر از این تعداد نمی‌توان این کار را انجام داد. یک روش استفاده از دکمه‌ها را بهینه می‌نامیم اگر با کم‌ترین تعداد استفاده از دکمه‌ها به عدد A برسیم. توجه کنید که ما ناگزیر هستیم که ۱۳۹۲ بار از دکمه‌ی ۵ استفاده کنیم. زیرا در بین ارقام ۱ تا ۹، تنها عددی که عامل ۵ دارد، رقم ۵ است و ما باید ۱۳۹۲ عامل ۵ را ایجاد کنیم پس باید ۱۳۹۲ بار از رقم ۵ استفاده کنیم.

ادعا می‌کنیم روش بهینه‌ای وجود دارد که در آن حداکثر یک بار از رقم ۶ استفاده شده است، زیرا به جای هر دو بار استفاده از رقم ۶ می‌توانیم یک بار ۴ و یک بار ۹ را استفاده کنیم. به این ترتیب می‌توانیم ۶ها را دوتا دوتا با ۴ و ۹ جایگزین کنیم تا در نهایت حداکثر یک ۶ باقی بماند. از طرف دیگر روشن است که در روش بهینه، ما حداکثر یک بار از ۳ استفاده کرده‌ایم چون اگر بیش از یک بار از ۳ استفاده کرده باشیم، می‌توانیم به جای دو تا ۳، یک بار از ۹ استفاده کنیم و به این ترتیب تعداد دکمه‌های استفاده شده را کاهش دهیم که این با بهینه بودن روش مورد نظر تناقض دارد. بنابراین حداکثر یک بار از ۳ استفاده کرده‌ایم. مشابهاً می‌توان نتیجه گرفت که حداکثر یک بار از ۲ استفاده کرده‌ایم چون به جای دو بار استفاده از ۲ می‌توان یک بار از ۴ استفاده کرد. همچنین روش بهینه‌ای وجود دارد که در آن حداکثر یک بار از ۴ استفاده شده است. زیرا به جای هر دو بار استفاده از ۴ می‌توان یک بار از ۲ و یک بار از ۸ استفاده کرد. همچنین روشن است که امکان ندارد هم از ۲ و هم از ۴ استفاده کرده باشیم زیرا به جای آن‌ها می‌توان یک بار از ۸ استفاده کرد.

حال دقت کنید که عوامل ۲ از یکی از اعداد ۸ یا ۶ یا ۴ یا ۲ می‌آیند. اگر تعداد استفاده از این

ارقام به ترتیب a_8، a_6، a_4 و a_2 باشند، داریم

$$2014 = 3a_8 + 2a_4 + a_6 + a_2$$

زیرا در نهایت باید ۲۰۱۴ عامل ۲ به دست بیاوریم.

با توجه به اینکه باقیمانده‌ی ۲۰۱۴ بر ۳، ۱ است و $3a_8$ بر ۳ بخش‌پذیر است، پس باید باقیمانده‌ی $2a_4 + a_6 + a_2$ نیز بر ۳ برابر با ۱ باشد، اما با توجه به توضیحات بالا، a_2، a_4 و a_6 هرکدام صفر یا یک هستند و a_2 و a_4 هر دو نمی‌توانند یک باشند. با بررسی همه‌ی حالتها، به راحتی می‌توان دید که تنها حالات ممکن عبارتند از

$$a_2 = 1, a_4 = a_6 = 0$$

$$a_6 = 1, a_2 = a_4 = 0$$

اگر حالت اول رخ دهد، از رقم ۶ استفاده نکرده‌ایم و از طرف دیگر چون از رقم ۲ استفاده کرده‌ایم با توجه به توضیحات قبل از رقم ۳ هم استفاده نکرده‌ایم بنابراین تنها رقمی که عامل ۳ دارد رقم ۹ است ولی این غیر ممکن است زیرا هر ۹، دو عامل ۳ دارد و حال آنکه در مجموع به ۱۴۳۵ عامل ۳ نیاز داریم که عددی فرد است.

پس حالت اول غیر ممکن است و حالت دوم رخ می‌دهد. پس یک بار از ۶ استفاده کرده‌ایم و یک عامل ۲ به دست آورده‌ایم و سایر عوامل ۲ را باید از ۸ به دست بیاوریم. پس باید $\frac{2013}{3}$ بار از ۸ استفاده کنیم.

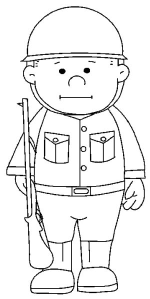
حال چون یک بار از ۶ استفاده کرده‌ایم پس یک عامل ۳ به دست آورده‌ایم و ۱۴۳۴ عامل ۳ باقی می‌ماند که چون ۱۴۳۴ بر ۲ بخش‌پذیر است می‌توانیم همه‌ی آن‌ها را با استفاده از ۹ به دست آوریم. پس $\frac{1434}{2}$ بار از ۹ استفاده می‌کنیم.

به این ترتیب در روش بهینه، به همان تعداد ۲۷۸۱ تا استفاده از دکمه‌ها نیاز داریم.

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

---

۱۷. در یک پادگان ۱۱۹۶ سرباز در ۱۳ ردیف ۹۲تایی به شکل منظم ایستاده‌اند. آخرین سرباز از ردیف آخر یک سرباز را می‌بیند اگر روی خط واصل بین آن‌ها، سرباز دیگری نباشد. او چند سرباز از ردیف اول را می‌بیند؟ (سربازها را نقطه فرض می‌کنیم.)

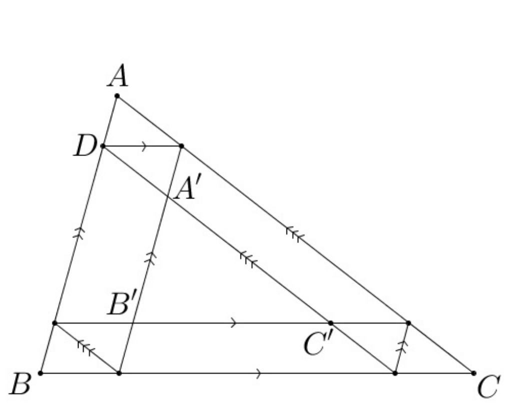


پاسخ: ۳۱

فرض کنید که این سرباز در ردیف آخر نفر سمت چپ باشد و سربازهای هر ردیف را به ترتیب از چپ به راست با شماره‌های ۰، ۱، ... و ۹۱ مشخص کنیم. به وضوح سرباز آخر، سرباز شمارهٔ ۰ از ردیف اول را نمی‌بیند. اما برای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots, ۹۱\}$، سرباز شمارهٔ i دیده می‌شود، هرگاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه i و ۱۲ برابر ۱ باشد. زیرا اگر i و ۱۲ مقسوم‌علیه مشترکی غیر از ۱ مثلاً j داشته باشند، سرباز شماره‌ی $\frac{i}{j}$ که در $\frac{۱۲}{j}$ ردیف جلوتر از ردیف آخر ایستاده است، بین آن‌ها قرار دارد و بنابراین سرباز شمارهٔ i از ردیف اول دیده نمی‌شود.
بنابراین باید، تعداد اعدادی در $\{۱, ۲, \ldots, ۹۱\}$ را بشماریم که نسبت به ۱۲ اول هستند، یعنی معادلاً بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر نیستند. باقی‌ماندهٔ تقسیم چنین اعدادی بر ۶ برابر ۱ یا ۵ است.
باقی‌ماندهٔ تقسیم۱۶ عدد $\{۱, ۷, \ldots, ۹۱\}$ در تقسیم بر ۶ برابر ۱ است.
باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۵ عدد $\{۵, ۱۱, \ldots, ۸۹\}$ در تقسیم بر ۶ برابر ۵ است.

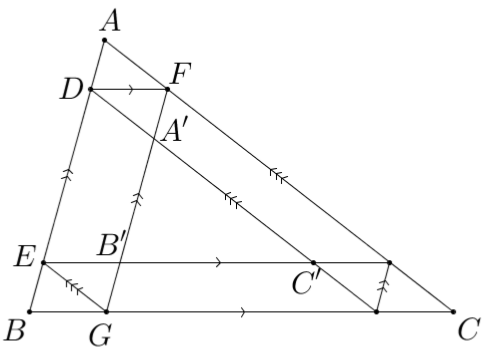
پس در کل $۳۱ = ۱۶ + ۱۵$ عدد در این مجموعه وجود دارند که نسبت به ۱۲ اول هستند و بنابراین ۳۱ سرباز از ردیف اول دیده می‌شوند.

۱۸. مطابق شکل روبه‌رو خطوطی موازی اضلاع مثلث ABC رسم کرده‌ایم تا مثلث $A'B'C'$ ایجاد شود، به گونه‌ای که محیطش نصف محیط ABC باشد. طول AB چند برابر طول AD است؟



پاسخ: ۶

نقطه‌های E، F و G را مطابق شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم.



در این صورت چهارضلعی‌های $DAFA'$، $EAFG$، $EDA'G$، $BDFG$، $EDFB'$ و $BEB'G$ همگی متوازی‌الاضلاع هستند و در نتیجه $FB' = DE$ و $FB' = DE = A'G$. پس $FA' = B'G$ و این مقدار برابر طول AD و همین‌طور طول BE است.

$$AB = AD + DE + EB = DE + ۲AD = FB' + ۲AD = A'B' + ۳AD$$

با توجه به این که اضلاع ABC و $A'B'C'$ موازی هستند، این دو مثلث متشابه هستند و چون محیط ABC دو برابر $A'B'C'$ است داریم $AB = ۲A'B'$ و با توجه به بالا $A'B' = ۳AD$. پس در نهایت

$$AB = A'B' + ۳AD = ۶AD$$

پس طول AB شش برابر AD است.

۱۹. مجموعهٔ S را مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی مثل a می‌گیریم که برای آن‌ها اعداد حقیقی x و y موجود باشند، به گونه‌ای که

$$a(a-۱) + x(x-۱) + y(y-۱) = \frac{۳}{۲}$$

می‌دانیم که S یک بازه است. طول این بازه چه‌قدر است؟

پاسخ: ۳

توجه کنید که معادلهٔ صورت سوال را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

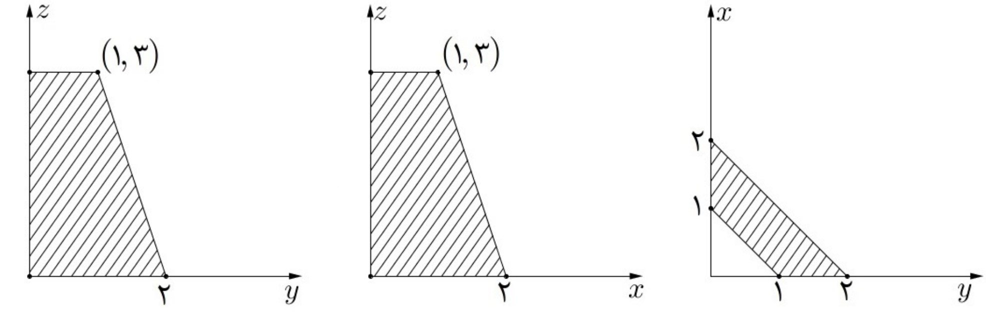
$$(a^2-a+\frac{1}{4})+(x^2-x+\frac{1}{4})+(y^2-y+\frac{1}{4})=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

و در نتیجه:

$$(a-\frac{1}{2})^2+(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

حال توجه کنید که $(x-\frac{1}{2})^2, (y-\frac{1}{2})^2$ عباراتی نامنفی هستند پس همواره $(a-\frac{1}{2})^2 \leq \frac{9}{4}$ پس a همواره در بازهٔ $[-1,2]$ قرار دارد. همچنین به سادگی دیده می‌شود که به ازای هر a در بازهٔ $[-1,2]$، با قرار دادن $x=\frac{1}{2}$ و با توجه به پوشا بودن $(y-\frac{1}{2})^2$ روی بازه‌ی $[0,\infty)$، معادله می‌تواند برقرار باشد. پس طول بازهٔ مورد نظر برابر ۳ است.

۲۰. تصویر عمود یک چهارضلعی مسطح در فضا روی سه صفحهٔ مختصات به شکل‌های زیر است. مجموع مربع‌های طول قطرهای این چهارضلعی چه‌قدر است؟



پاسخ: ۲۸

چون تصویر این چهارضلعی روی هریک از صفحه‌ها خود یک چهار ضلعی مسطح است، رأس‌های آن باید به رأس‌های چهارضلعی تصویر برود. به این ترتیب رأسی که تصویرش در صفحه xy به نقطه $(1,0)$ می‌رود، در صفحه xz تنها می‌تواند به $(1,3)$ برود و درنتیجه مختصات آن در فضا برابر $(1,0,3)$ است. به همین شکل سه راس دیگر چهار ضلعی نقاط

$(۳,۱,۰)$، $(۰,۰,۲)$ و $(۰,۲,۰)$ است. بنابراین مجموع مربع‌های قطرهای این چهارضلعی برابر $۲(۱^۲+۲^۲+۳^۳)=۲۸$ است.

۲۱. چند چهارتایی مرتب (x,y,z,t) از اعداد حقیقی یافت می‌شود که در معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} xy+yz+zx=t^۲ \\ yz+zt+ty=x^۲ \\ zt+tx+xz=y^۲ \\ tx+xy+yt=z^۲ \end{cases}$$

۱) ۱
۲) ۵
۳) ۹
۴) ۲۵
۵) بی‌نهایت

پاسخ: ۱

با کم کردن رابطه دوم از اول داریم:

$$z(x-t)+y(x-t)=(t-x)(t+x) \Rightarrow (x-t)(x+y+z+t)=۰$$

و مشابه آن با کم کردن رابطه سوم از دوم، چهارم از سوم و اول از چهارم:

$$(y-x)(x+y+z+t)=۰, \quad (z-y)(x+y+z+t)=۰, \quad (t-x)(x+y+z+t)=۰$$

بنابراین اگر $x+y+z+t\neq ۰$، چهار عدد با هم برابر می‌شوند که با جایگذاری در معادله هر چهار متغیر برابر صفر می‌شوند.

اما اگر $x+y+z+t=۰$ آنگاه $t=-x-y-z$ و در نتیجه با جایگذاری در معادله اول:

$$xy+yz+zx=(-x-y-z)^۲=x^۲+y^۲+z^۲+۲xy+۲yz+۲zx \Rightarrow$$

$$x^۲+y^۲+z^۲+xy+yz+zx=۰ \Rightarrow$$

$$(x+y)^۲+(y+z)^۲+(z+x)^۲=۰ \Rightarrow x=-y, y=-z, z=-x \Rightarrow x=y=z=۰$$

و در نتیجه t هم صفر می‌شود. پس در این حالت به همان جواب (۰, ۰, ۰, ۰) می‌رسیم. بنابراین این چهارتایی تنها جواب معادله است.

۲۲. تنها دزد شکرستان از دو سال پیش تحت تعقیب نظمیهٔ شکرستان قرار دارد. طبق تحقیقات نظمیه، تعداد سفرهای او بین شکرستان و ۴ نمکستان‌های شرقی، غربی، شمالی و جنوبی به صورت زیر بوده است، (برای مثال این دزد سه سفر از نمکستان شرقی به شکرستان داشته است). اکنون او در کدام شهر مخفی شده است؟

از

به	شکرستان	ن. شرقی	ن. غربی	ن. شمالی	ن. جنوبی
شکرستان	×	۳	۱	۰	۲
ن. شرقی	۰	×	۲	۰	۱
ن. غربی	۱	۰	×	۳	۰
ن. شمالی	۲	۰	۱	×	۱
ن. جنوبی	۲	۰	۰	۲	×

۱) شکرستان
۲) نمکستان شرقی
۳) نمکستان غربی
۴) نمکستان شمالی
۵) نمکستان جنوبی

پاسخ: ۱

جدول زیر نشان می‌دهد که این دزد از هر کدام از شهرها چند بار خارج شده است و چند بار به هر کدام از شهرها وارد شده است.

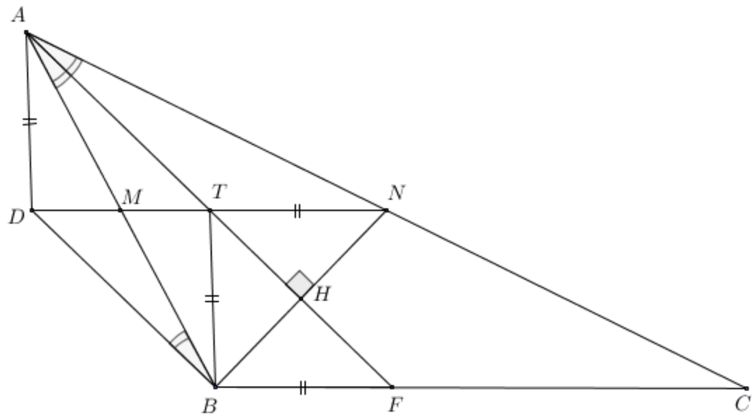
نام شهر	شکرستان	ن. شمالی	ن. جنوبی	ن. غربی	ن. شرقی
تعداد خروج	۵	۵	۴	۴	۳
تعداد ورود	۶	۴	۴	۴	۳

بنابراین او از شکرستان ۵ بار خارج شده است و ۶ بار به این شهر برگشته است، بنابراین اکنون در این شهر است و پاسخ درست گزینه‌ی (۱) است.

توضیح. هم‌چنین با استدلال مشابه می‌توان فهمید که او سفر را از نمکستان شمالی آغاز کرده است، چون ۵ بار از این شهر خارج شده و تنها ۴ بار به آن بازگشته است.

۲۳. طول اضلاع AB، AC و BC از مثلث ABC به ترتیب ۲ و ۴ و $\sqrt{7}$ است. خطی که وسط‌های AB و AC را به هم وصل می‌کند با خطی که از B موازی با نیم‌ساز A رسم می‌شود در نقطهٔ D برخورد می‌کند. طول AD چه‌قدر است؟

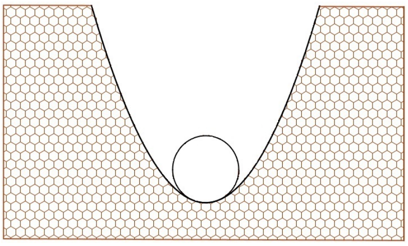
پاسخ: ۰



مطابق شکل زیر فرض کنید M وسط AB و N وسط AC باشد خط BN را رسم کنید چون مثلث ABN متساوی‌الساقین است پس نیم‌ساز آن ارتفاع نیز هست فرض کنید H پای ارتفاع وارد از A بر BN و T تقاطع MN با AH باشد. چهارضلعی $ADBT$ متوازی‌الاضلاع است زیرا دو مثلث AMT و BMD با هم برابر هستند در نتیجه $AD = BT$. از طرفی چون مثلث ABH با مثلث ANH هم‌نهشت است بنابرین می‌توان نتیجه گرفت $BT = TN$. پس کافی است مقدار TN را حساب کنیم، فرض کنید F محل برخورد نیم‌ساز با ضلع BC باشد، در مثلث AFC چون TN میان‌خط (خطی موازی یک ضلع که از وسط دو ضلع دیگر عبور می‌کند) است پس $TN = \frac{1}{2}FC$ و هم‌چنین می‌دانیم نیم‌ساز ضلع را به نسبت دو ضلع دیگر قطع می‌کند

درنتیجه

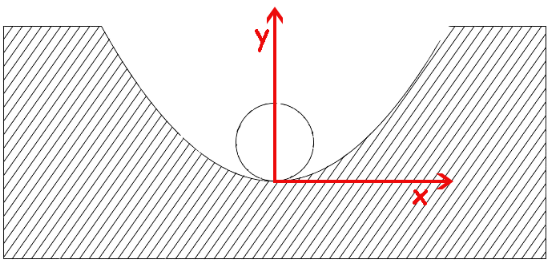
$$AD = BT = TN = \frac{۱}{۲}FC = \frac{۱}{۲}\frac{AC \times BC}{AC + AB} = \frac{\sqrt{۷}}{۳} = ۰.۸۸۱...$$



۲۴. وزارت نفت کانالی بین بوشهر و ایلام حفر کرده است و قصد دارد لولهٔ انتقال گازی را در آن قرار دهد. سطح مقطع لوله دایره و سطح مقطع کانال به شکل قسمتی از یک سهمی است. (سهمی نمودار یک چندجمله‌ای درجه دوم است.) اگر عرض و عمق کانال برابر ۱ متر باشد، قطر بزرگ‌ترین لوله‌ای که می‌توان در کانال قرار داد به طوری که با پایین‌ترین نقطهٔ کانال تماس داشته باشد، چند سانتی‌متر است؟

پاسخ: ۲۵

ابتدا فرض می‌کنیم لوله و کانال در مبدأ با یکدیگر تماس دارند و مختصات را مانند شکل معین می‌کنیم. قطر لوله در صورتی مناسب است که اگر پایین لوله (دایره) را در کف کانال (سهمی) قرار دهیم، دایره و سهمی برخورد دیگری نداشته باشند.



معادله‌ی سهمی معرفی شده در صورت سوال برابر است با:

$$y = ۴x^۲$$

همچنین معادله‌ی دایره‌ی معرفی شده به قطر D و مماس بر سهمی در مبدأ برابر است با:

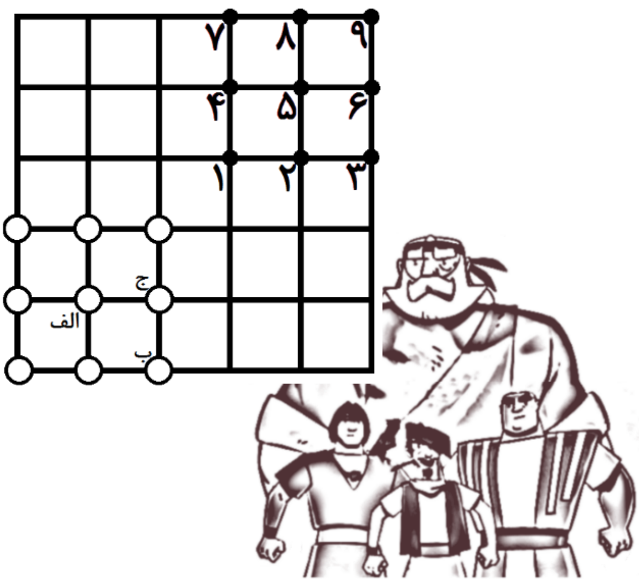
$$(y - \frac{D}{۲})^۲ + x^۲ = \frac{D^۲}{۴} \Rightarrow y^۲ - yD + \frac{D^۲}{۴} + x^۲ = \frac{D^۲}{۴} \Rightarrow y^۲ - yD + x^۲ = ۰$$

با استفاده از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌گیریم که:

$$y^۲ - yD + \frac{y}{۴} = ۰$$

و معادلهٔ فوق برقرار است اگر $y = ۰$ (که همان نقطهٔ تماس است و نقطه‌ی جدیدی به حساب نمی‌آید) و یا $y = D - \frac{۱}{۴}$. چنانچه $D \leq \frac{۱}{۴}$، y عددی نامثبت خواهد بود که نشان دهندهٔ عدم برخورد جدید است اما اگر $D > \frac{۱}{۴}$، در نقطه‌ی $(D - \frac{۱}{۴}, \sqrt{\frac{D}{۴} - \frac{۱}{۱۶}})$ برخورد خواهند داشت و این نشان می‌دهد که در این صورت قطر لوله مناسب نبوده است. پس حداکثر قطر لوله برابر $\frac{۱}{۴}$ متر یا همان ۲۵ سانتی‌متر است.

۲۵. پهلوان پوریای ولی از یاور خواسته که ۹ میل زورخانه را از نقاطی که با دایرهٔ توخالی نمایش داده شده به نقاطی که با دایرهٔ توپر نمایش داده شده ببرد، به‌نحوی که مجموع فواصل ۹ جفت نقطهٔ ابتدایی و انتهایی، بیش‌ترین مقدار ممکن شود. (دقت کنید که در هر نقطه یک میل قرار می‌گیرد.) در این صورت میل‌های الف و ب و ج به‌ترتیب باید به کدام نقاط منتقل شوند؟



۱) ۵، ۳، ۲
۲) ۵، ۷، ۸
۳) ۹، ۷، ۸
۴) ۵، ۷، ۴
۵) نمی‌توان تعیین کرد.

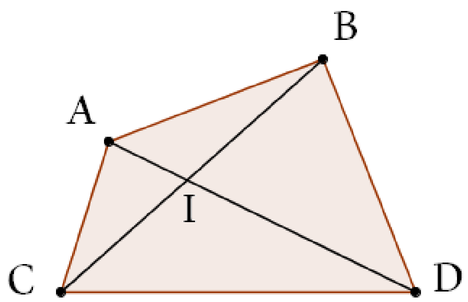
پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

پاسخ: ۵

لم: در هر چهار ضلعی محدب مجموع طول قطرها از مجموع طول دو ضلع روبرو بیشتر است.

با نوشتن نامساوی مثلث برای مثلث‌های ABI و CDI مشاهده می‌کنیم که:

$$AD + BC > AB + CD$$



ادعا می‌کنیم اگر مجموع فواصل ۹ زوج نقطه بیشترین مقدار شود، باید هر دو مسیری بین نقاط ابتدایی و انتهایی همدیگر را قطع کنند. زیرا اگر میل نقطه A به B و میل نقطه C به D برود و AB و CD برخورد نداشته باشند، طبق لم بالا با بردن میل نقطه A به D و میل نقطه C به B مسیر بیشتری طی می‌شود. حال به میل نقطه ب در صورت سوال نگاه کنید. این میل تنها به نقطه‌ای ۷ می‌تواند منتقل شود تا با تمام مسیرها برخورد داشته باشد. (اگر به این نقطه نرود با مسیری که به نقطه ۷ می‌رسد برخورد ندارد.) پس نقطه ب به نقطه ۷ می‌رود. به همین شکل شمال غربی ترین میل نیز باید به نقطه ۳ برود. به همین طریق می‌توان بررسی کرد که میل‌های نقاط ج ، بالا، پایین و سمت راست الف نیز باید به ترتیب به نقاط ۴، ۲، ۶ و ۸ بروند تا با تمام خطوط دیگر برخورد کند

اما میل‌های روی قطر مربع باقی می‌مانند. این میل‌ها به هر ترتیبی به نقط ۱، ۵ و ۹ منتقل شوند مجموع جابه جایی ثابت می‌ماند. بنابراین برای جای‌گذاری میل نقطه الف سه حالت وجود دارد و به طور یکتا مشخص نمی‌شود.