به نام او

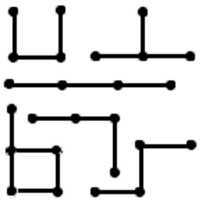
آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

سه‌شنبه ۱۳۹۲/۶/۱۹

مدت امتحان ۱۲۰ دقیقه

۱. چند چوبه!



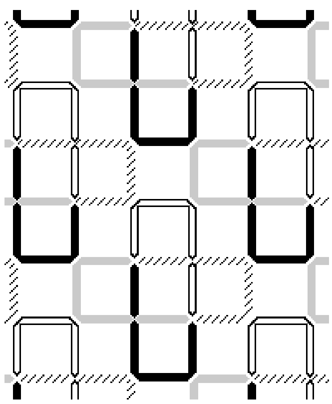
یک n **چوبه**، شکلی همبند است که با n چوب کبریت افقی یا عمودی به طول واحد ساخته می‌شود. شکل‌هایی را که با دوران و تقارن به یکدیگر تبدیل می‌شوند یکی میگیریم. مثلاً در شکل روبرو همه‌ی ۳چوبه‌ها و یک ۵چوبه دیده می‌شود.

یک n **مینو** شکلی است که با چسباندن n مربع واحد از روی یال‌ها به یکدیگر به دست آید به طوریکه بین هر دو مربع واحد مسیری از مربع‌های متصل در شکل یافت شود.

فرض کنید S_n تعداد n چوبه‌ها و M_n تعداد n مینوها باشد. مثلاً با توجه به شکل‌های بالا داریم $S_۳ = ۵$ و $M_۳ = ۲$.

الف) ثابت کنید به ازای هر n طبیعی داریم: $S_n \geq M_{n+۱}$

ب) ثابت کنید برای n های به اندازه کافی بزرگ داریم: $\left(۲.۴\right)^n \leq S_n \leq ۱۶^n$



یک **یال شبکه‌ای** پاره خطی به طول واحد در صفحه است که مختصات رئوس آن صحیح باشد. یک چندچوبه را **دانا** گوییم، هرگاه به وسیله‌ی آن بتوان مجموعه‌ی یال‌های شبکه‌ای را فرش کرد (استفاده از دوران و تقارن مجاز است). در غیر این صورت آن را **نادان** می‌نامیم. برای مثال شکل مقابل نشان می‌دهد که ۴چوبه‌ی  دانا است. همچنین به سادگی دیده می‌شود که ۵چوبه‌ی  نادان است.

ج) ثابت کنید حداقل $۲^{n-۶}$ تا n چوبه‌ی نادان وجود دارد.

د) ثابت کنید هر چندچوبه به شکل یک مسیر که هربار به سمت راست یا بالا می رود، دانا است.

ه) (نمره اضافه) ثابت کنید برای n های به اندازه کافی بزرگ داریم: $۳^n \leq S_n \leq ۱۲^n$

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

سه‌شنبه ۱۳۹۲/۶/۱۹

مدت امتحان ۱۵۰ دقیقه

۲. فاصله‌ی بین دوایر!

***فاصله‌ی** بین دو دایره ω, ω' را برابر با طول مماس مشترک خارجی آن‌ها تعریف می کنیم و با نماد $d(\omega, \omega')$ نمایش می دهیم. اگر دو دایره مماس مشترک خارجی نداشته باشند، فاصله‌ی بین آن‌ها تعریف نمی‌شود. توجه کنید که یک نقطه هم یک دایره‌ی به شعاع صفر است و فاصله‌ی دو دایره می‌تواند صفر باشد.*

الف) مرکزثقل. تعدادی دایره ثابت $\omega_1, \dots, \omega_n$ در صفحه داریم. نشان دهید دایره یکتای $\overline{\omega}$ در صفحه وجود دارد که برای دایره متغیر ω، مربع فاصله‌ی بین ω و $\overline{\omega}$ منهای میانگین مربعات فواصل بین ω و ω_iها عددی ثابت باشد (به ازای ωهایی که همه این فواصل تعریف شده هستند). یعنی:

$$\forall \omega: \quad d(\omega, \overline{\omega})^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(\omega, \omega_i)^2 = \text{مقدار ثابت}$$

$\overline{\omega}$ را **مرکز ثقل** $\omega_1, \dots, \omega_n$ می‌نامیم، زیرا خاصیت فوق مشابه خاصیت مرکز ثقل نقاط است.

ب) عمود منصف. فرض کنید دایره‌ی ω از دوایر ω_1 و ω_2 هم‌فاصله باشد. ω_3 را دایره‌ی دلخواهی بگیرید که مرکز آن روی خط‌المرکزین ω_1 و ω_2 است و بر مماس مشترک خارجی ω_1 و ω_2 مماس است. ثابت کنید « فاصله‌ی بین ω و مرکز ثقل ω_1 و ω_2 » از « فاصله‌ی بین ω و ω_3 » بیشتر نیست. (در صورتی که این فواصل همگی تعریف شده باشند)

ج) مرکز دایره‌ی محیطی. C را مجموعه همه‌ی دایره‌هایی را در نظر بگیرید که هر کدام از آن‌ها از سه دایره‌ی ثابت ω_1، ω_2 و ω_3 هم فاصله است. ثابت کنید نقطه‌ی ثابتی در صفحه وجود دارد که مرکز تجانس مستقیم دو به دوی اعضای C است.

د) چهاروجهی منتظم. آیا چهار دایره در صفحه وجود دارد که فاصله‌ی هر دو تا از آنها برابر واحد باشد؟

موفق باشید.

به نام او

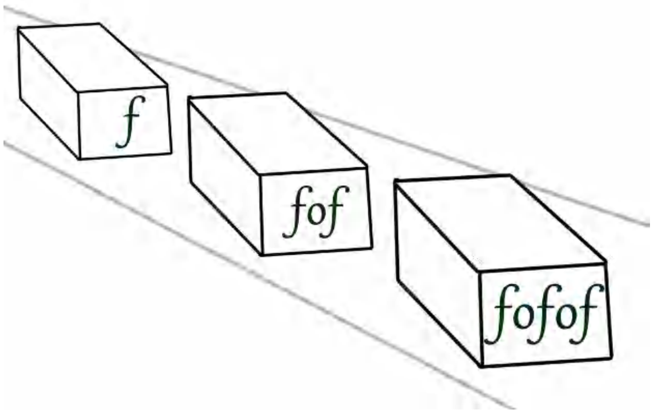
آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

سه‌شنبه ۱۳۹۲/۶/۱۹

مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۳. تولید توابع!



می گوییم تابع حقیقی f تابع g را **تولید** می‌کند (و با نماد $f \to g$ نمایش می دهیم)، اگر g از ترکیب چندباره f با خودش بدست آید؛ یعنی عدد طبیعی k موجود باشد که: $\underbrace{fofo \ldots of}_{k \text{ بار}} = g$

به دنبال یافتن خواصی برای این رابطه هستیم. مثلاً به راحتی می توان ثابت کرد که اگر $f \to g$ و $g \to h$ آنگاه $f \to h$. (خاصیت ترایایی)

الف) دو تابع حقیقی $f \neq g$ مثال بزنید که $f \to g, g \to f$.

ب) ثابت کنید به ازای هر تابع حقیقی f، تعداد متناهی تابع g وجود دارد که $f \to g, g \to f$.

ج) آیا تابع g وجود دارد که هیچ تابعی جز خودش، آن را تولید نکند؟

د) آیا تابع f وجود دارد که $x^۳$ و $x^۵$ را تولید کند؟

ه) ثابت کنید اگر تابعی دو چندجمله‌ای درجه یک P, Q را تولید کند آنگاه یک چندجمله‌ای درجه یک نیز P, Q را تولید می‌کند.

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

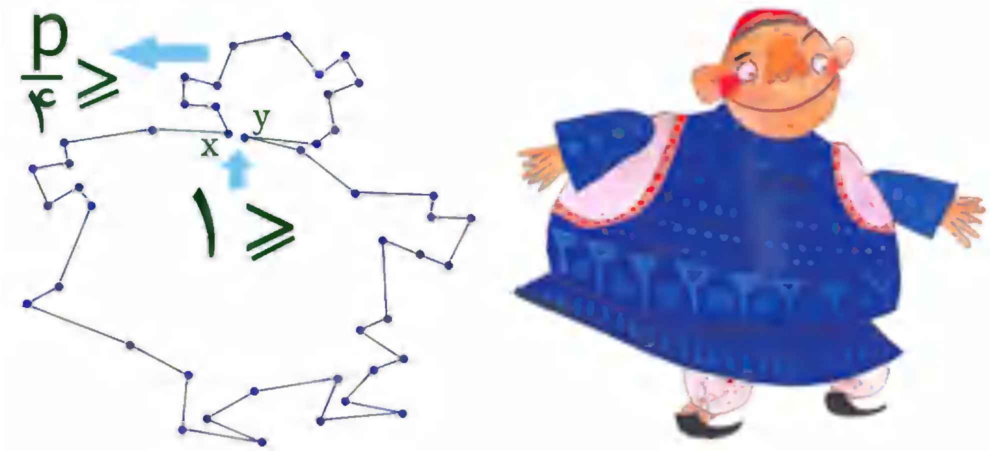
چهارشنبه ۱۳۹۲/۶/۲۰

مدت امتحان ۱۵۰ دقیقه

۴. چندضلعی تپل!

*چندضلعی A را که خودش را قطع نمی‌کند و دارای محیط p است، **چندضلعی تپل** می‌گوییم، در صورتی که برای هر دو نقطه‌ی x,y روی محیط A که فاصله‌ی آنها در صفحه حداکثر ۱ باشد، فاصله‌ی آنها روی محیط A (یعنی جزء کوچکتر محیط A که بین x,y قرار دارد) حداکثر $\frac{p}{۴}$ باشد.*

می‌خواهیم ثابت کنیم در هر چندضلعی تپل می‌توان دایره ای به شعاع $\frac{۱}{۴}$ جای داد.



متفکران سیاره‌ی زمین و محققان **سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار** دو رویکرد متفاوت برای حل سوال در پیش گرفتند. در هر دو رویکرد منظور از **وتر** پاره خطی است که دو سر آن روی محیط چندضلعی باشد. **قطر** وتری است که دو سر آن رئوس چندضلعی باشد. **وتر داخلی**، وتری است که هر نقطه از آن داخل یا روی محیط چندضلعی است. **فاصله روی محیط** بین دو نقطه روی چندضلعی را طول جزء کوچکتر محیط بین آن دو نقطه در نظر می‌گیریم.

رویکرد زمینی: وتر بیشینه!

این واقعیت را می دانیم که برای هر چندضلعی، وتر داخلی xy با طول حداکثر واحد یافت می‌شود به طوری که برای هر وتر داخلی $x'y'$ با طول حداکثر واحد، فاصله روی محیط x,y بزرگتر یا مساوی فاصله روی محیط x',y' باشد. این وتر را **وتر بیشینه** می نامیم.

در چندضلعی تپل A_o دو حالت برای وتر بیشینه وجود دارد:

الف) **حالت اول:** طول وتر بیشینه برابر واحد باشد. ثابت کنید نیم دایره‌ای به قطر وتر بیشینه به طور کامل درون A_o قرار دارد و در نتیجه در این حالت می توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ در داخل چندضلعی جای داد.

ب) **حالت دوم:** طول وتر بیشینه کمتر از واحد باشد. ثابت کنید در این حالت نیز دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ یافت می‌شود که به طور کامل درون A_o قرار می گیرد.

زمینی‌ها بارها گمان کردند این سؤال را حل کرده‌اند ولی هر بار متوجه ایرادی ظریف در اثبات خود شدند تا نهایتاً موفق به حل سؤال شدند.

رویکرد آب‌دوغ‌خیاری: مثلث بندی!

دو گزاره زیر را در نظر بگیرید.

گزاره اول: « هر چندضلعی دلخواه را که طول اضلاعش حداکثر واحد است و نمی‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ در آن جای داد می‌توان به وسیله‌ی قطرهایی داخلی با طول حداکثر واحد مثلث‌بندی کرد. »

گزاره دوم: « هر چندضلعی دلخواه را که نمی‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ در آن جای داد می‌توان به وسیله‌ی وترهایی داخلی مثلث‌بندی کرد به نحوی که طول اضلاع همه‌ی مثلث‌ها حداکثر واحد باشند.»

آب‌دوغ‌خیاری‌ها با برهان خلف به این نتیجه رسیدند که اگر گزاره دوم درست باشد آنگاه در هر چندضلعی تپل می‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ جای داد.

ج) شما نیز ثابت کنید اگر گزاره دوم درست باشد آنگاه در هر چندضلعی تپل می‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ جای داد.

آنها به سادگی دریافتند که اگر گزاره اول درست باشد آنگاه گزاره دوم هم درست است. پس برای حل گزاره اول یک دوغ جایزه گذاشتند! مدتی بعد، جوانی به نام **ج.ن.** که خود را زمینی می‌دانست، موفق شد با نقض گزاره اول، نقشه‌های آب‌دوغ‌خیاری‌ها را نقش بر آب کرده و دوغ را از آن خود کند.

د) یک ۱۳۹۲ضلعی مثال بزنید که گزاره اول را نقض کند.

با این حال آب‌دوغ‌خیاری‌ها ناامید نیستند و می‌خواهند گزاره دوم را مستقیماً اثبات کنند.

ه) (نمره اضافه) درباره درست بودن گزاره دوم هرچه می توانید بنویسید.

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

چهارشنبه ۱۳۹۲/۶/۲۰

مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۵. در جستجوی اعداد از دست رفته!

یک ***زیرجمع*** n عدد حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_n$ *به معنای جمع تعدادی از این* n *عدد است؛ یعنی* $\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + \cdots + \epsilon_n a_n$ *که* ϵ_i*ها صفر یا یک هستند و حداقل یکی از* ϵ_i*ها ناصفر است. اکنون با داشتن این زیرجمع‌ها در جستجوی اعداد هستیم!*

سال‌ها پیش لیستی ارزشمند شامل n عدد حقیقی (نه لزوماً متمایز) به همراه تمام $2^n - 1$ زیرجمع آن‌ها را در دست داشتیم. تعدادی موجود عجیب از سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار، (پس از شکست در حل مسئله‌ی چندضلعی تپل!)، n عدد اولیه‌ی ما را دزدیده‌اند و تنها چیزی که از آن‌ها در دست داریم همان $2^n - 1$ زیرجمع است!

الف) ثابت کنید اگر همه‌ی زیرجمع‌ها مثبت باشند، می‌توانیم اعداد دزدیده شده را به صورت یکتا بدست آوریم.

ب) فرض کنید تعدادی از زیرجمع‌ها مثبت و تعدادی منفی باشند، اما هیچ یک از آن‌ها صفر نباشد. نشان دهید در این حالت نیز می‌توانیم اعداد دزدیده شده را به صورت یکتا بدست آوریم.

ج) نشان دهید برای $n = ۱۳۹۲$، مثالی وجود دارد که نتوانیم به طور یکتا n عدد دزدیده شده را با داشتن تمام $2^n - 1$ زیرجمع آنها تعیین کنیم.

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

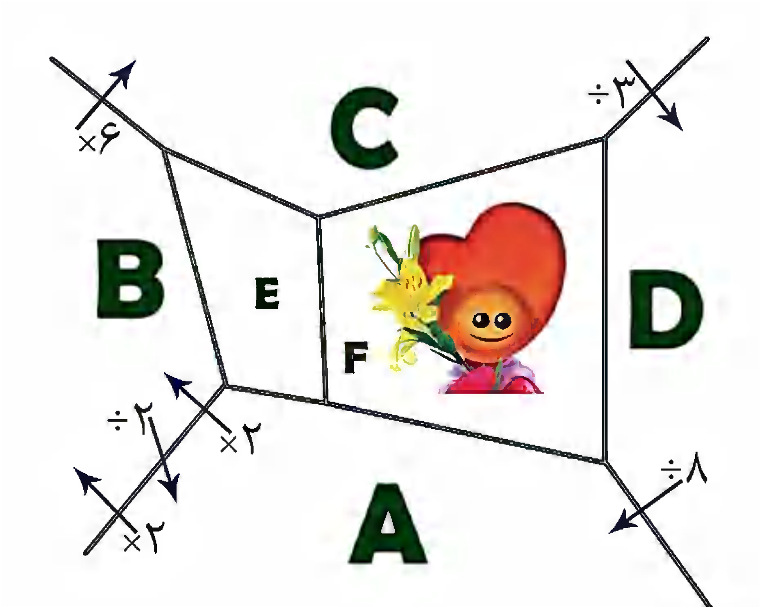
دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

چهارشنبه ۱۳۹۲/۶/۲۰

مدت امتحان ۹۰ دقیقه

۶. جهانگردان سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار!

در گیر و دارهای میان‌سیاره‌ای، منجمان خبره‌ی زمینی، **سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار** را در کهکشان راه دوغی کشف کردند. این سیاره به شکل یک ۱۳۹۲وجهی محدب است ولی منجمان هیچ اطلاعی از شیوه‌ی قرار گیری وجه‌های آن ندارند. دانشمندان با تجزیه‌ی طیفی پرتوهایی که از سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار ساطع می‌شوند، حقایقی راجع به زندگی موجودات روی این سیاره کشف کرده‌اند! از جمله این که هر وجه سیاره یک کشور است، هر کشور واحد پول جداگانه‌ای دارد و سرتاسر مرز هر دو کشور مجاور، **نرخی ثابت** برای تبدیل ارز این دو کشور موجود است. کسانی که از مرز دو کشور عبور می‌کنند باید تمام پول خود را به واحد پول کشور مقصد تبدیل کنند و هیچ راه دیگری برای تبدیل ارز وجود ندارد. منجمان در کمال ناباوری مشاهده کردند که ممکن است یک مسافر طی چندین سفر و بازگشت به نقطه‌ی اولیه، پولش تغییر کرده‌باشد. متفکران دلیل این پدیده را تفاوت نرخ تبادل ارز روی مرزها با نسبت واقعی ارزش پول‌ها می‌دانند. مثلاً در شکل زیر اگر کسی از کشور A به ترتیب به کشورهای B، A، B، C و D برود و سپس به کشور خودش باز گردد، دارایی نهایی‌اش نصف دارایی اولیه‌اش خواهد بود. اما اگر کسی فقط به یک کشور همسایه برود و برگردد دارایی‌اش تغییر نمی‌کند (زیرا حاصلضرب نرخ تبدیل ارز دو طرف یک مرز برابر واحد است).



آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

در یک پروژه‌ی تحقیقاتی، تعداد زیادی جهانگرد در سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار کشف شدند که با سرمایه اولیه‌ی یکسان از یک کشور شروع به سفر کردند و هر کدام پس از طی مسیری به شکل خط‌شکسته‌ی بسته روی چندوجهی که خودش را قطع نکرده است به نقطه‌ی شروعشان بازگشته‌اند! حداکثر چند تا از این جهانگردها وجود دارند که سرمایه‌ی نهایی آنها دو به دو متمایز باشد؟

توجه ۱: هیچ جهانگردی در طول سفر پولی خرج نمی‌کند!

توجه ۲: تنها ثابت سوال تعداد کشورها (۱۳۹۲) است. باقی مقادیر مانند چیدمان کشورها و نرخ تبدیل ارز روی مرزها متغیرهای سوال به حساب می‌آیند. پس پاسخ شما باید یک عدد باشد.

توجه ۳: با توجه به ناشناخته بودن ساختار سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار، باید در بین همه‌ی ۱۳۹۲وجهی‌های ممکن این حداکثر را بیابید.

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

پنج‌شنبه ۱۳۹۲/۶/۲۱

مدت امتحان ۱۲۰ دقیقه

۷. خواص جالب معادلات جالب!

معادله‌ی $P(x) = Q(y)$ را **جالب** می‌گوییم اگر P و Q چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب صحیح و درجه‌ی حداقل یک باشند و این معادله بی‌نهایت جواب در اعداد طبیعی داشته باشد. می‌گوییم معادله‌ی $F(x) = G(y)$ از معادله‌ی $P(x) = Q(y)$ **نتیجه می‌شود،** اگر چندجمله‌ای R با ضرایب گویا موجود باشد که $F(x) = R(P(x))$ و $G(y) = R(Q(y))$.

الف) فرض کنید S زیرمجموعه‌ای نامتناهی از $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ باشد. می‌گوییم S در معادله‌ی جالب $P(x) = Q(y)$ **صدق می‌کند،** اگر هر عضو آن در این معادله صدق کند. نشان دهید معادله‌ی جالب $P_o(x) = Q_o(y)$ وجود دارد که هر معادله‌ی جالبی که S در آن صدق کند (در صورت وجود)، از معادله‌ی $P_o(x) = Q_o(y)$ نتیجه می‌شود.

ب) درجه‌ی معادله‌ی جالب $P(x) = Q(y)$ را برابر بزرگترین درجه بین درجات P و Q تعریف می‌کنیم. یک معادله‌ی جالب را **اولیه** می‌گوییم اگر از هیچ معادله‌ی جالبی با درجه‌ی کمتر نتیجه نشود. نشان دهید اگر $P(x) = Q(y)$ یک معادله‌ی جالب اولیه باشد و P و Q تکین باشند، آن‌گاه درجه‌ی P و درجه‌ی Q نسبت به هم اول هستند.

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

پنج‌شنبه ۱۳۹۲/۶/۲۱

مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۸. پنج‌ضلعی گویا!

فرض کنید $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵$ یک پنج‌ضلعی محدب در صفحه باشد که مختصات رئوس آن گویا است. برای هر $۱ \leq i \leq ۵$، محل تقاطع امتداد اضلاع $A_{i+۱}A_{i+۲}$ و $A_{i+۳}A_{i+۴}$ را با B_i نامگذاری می‌کنیم. (رئوس پنج‌ضلعی به صورت دوری شماره‌گذاری شده‌اند؛ یعنی برای هر i، $A_i = A_{i+۵}$.)

نشان دهید حداکثر سه تا از خطوط A_iB_i $(۱ \leq i \leq ۵)$ همرس‌اند.

موفق باشید.