به نام او

آزمون انتخابی تیم المپیاد ریاضی

چهارشنبه، ۲۸ فروردین ۱۳۹۲ | امتحان اول (روز اول) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱. در مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC، H را پای ارتفاع نظیر رأس A بگیرید و به علاوه فرض کنید J و I به ترتیب مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی نظیر ضلع AH از مثلث‌های ABH و ACH هستند. اگر P محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی ABC با ضلع BC باشد، ثابت کنید I، J، P و H روی یک دایره قرار دارند.

۲. حداکثر چند زیرمجموعه از $\{۱,۲,\ldots,n\}$ می‌توان انتخاب کرد که اگر A و B دو زیرمجموعه‌ی انتخابی باشند و $A \subset B$ آن‌گاه $|B-A| \geq ۳$؟ (منظور از $|X|$ تعداد اعضای مجموعه‌ی X است.)

۳. برای اعداد صحیح و نامنفی m و n، دنباله‌ی $a(m,n)$ از اعداد حقیقی به این صورت تعریف می‌شود که $a(۰,۰)=۲$، و برای هر عدد طبیعی n، $a(۰,n)=۱$ و $a(n,۰)=۲$. هم‌چنین برای $m,n \geq ۱$:

$$a(m,n)=a(m-۱,n)+a(m,n-۱)$$

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی k، همه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ای $P_k(x)=\sum_{i=۰}^{k} a(i,۲k+۱-۲i)x^i$ حقیقی هستند.

موفق باشید.

به نام او

آزمون انتخابی تیم المپیاد ریاضی

پنج‌شنبه، ۲۹ فروردین ۱۳۹۲ امتحان اول (روز دوم) زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴. m و n دو عدد صحیح نامنفی هستند. در بازی شطرنجِ فلاسفه صفحه‌ی شطرنج، شبکه‌ی نامتناهی شش‌ضلعی است و مهره‌ی الاغ به این صورت حرکت می‌کند:

((در یکی از شش جهت m خانه حرکت می‌کند، سپس 60° ساعت‌گرد می‌چرخد و n خانه در این جهت جدید حرکت می‌کند و به این ترتیب در نقطه‌ی نهایی قرار می‌گیرد.))

حداکثر چند خانه در صفحه‌ی شطرنج فلاسفه وجود دارد که از هیچ‌کدام از آن‌ها نتوان با تعداد متناهی حرکت مهره‌ی الاغ به دیگری رفت؟

۵. آیا اعداد طبیعی a، b و c وجود دارند که $a^2 + b^2 + c^2$ بر $2013(ab + bc + ca)$ بخش‌پذیر باشد؟

۶. نقاط A، B، C و D به همین ترتیب روی خط l قرار دارند. دو کمان C_1 و C_2 در یک طرف خط l از A و B می‌گذرند و دو کمان C_3 و C_4 از C و D می‌گذرند به طوری که C_1 بر C_3 و C_2 بر C_4 مماس است. ثابت کنید مماس مشترک خارجی C_2 و C_3 و مماس مشترک خارجی C_1 و C_4 روی خط l متقاطع هستند.

موفق باشید.

به نام او

آزمون انتخابی تیم المپیاد ریاضی

سه‌شنبه، ۳ اردیبهشت ۱۳۹۲	امتحان دوم (روز اول)	زمان: چهار ساعت و نیم

۱. اعداد حقیقی نامنفی $p_1, p_2, \dots, p_n$ و $q_1, q_2, \dots, q_n$ داده شده اند که

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$$

بین تمام ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های نامنفی که مجموع درایه‌های سطر iام آن‌ها برابر p_i و مجموع درایه‌های ستون jام برابر q_j باشد، بیش‌ترین مقدار مجموع درایه‌های قطر اصلی را بیابید.

۲. همه‌ی تصاعدهای حسابی $a_1, a_2, \dots$ از اعداد طبیعی را بیابید، طوری که عدد طبیعی $N > 1$ موجود باشد که برای هر $k \in \mathbb{N}$:

$$a_1 a_2 \cdots a_k | a_{N+1} a_{N+2} \cdots a_{N+k}$$

۳. تمام توابع $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را بیابید که f صعودی باشد و داشته باشیم:

$$f(f(x) + 2g(x) + 3f(y)) = g(x) + 2f(x) + 3g(y)$$

$$g(f(x) + y + g(y)) = 2x - g(x) + f(y) + y$$

موفق باشید.

به نام او

آزمون انتخابی تیم المپیاد ریاضی

چهارشنبه، ۴ اردیبهشت ۱۳۹۲ امتحان دوم (روز دوم) زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴. روی هر یال از یک گراف عددی حقیقی قرار داده‌ایم، به طوری که به ازای هر گشت زوج از این گراف، مجموع یال‌ها با علامت یکی در میان مثبت و منفی برابر صفر است. ثابت کنید می‌توان روی هر رأس عددی حقیقی قرار داد طوری که عدد هر یال برابر مجموع اعداد دو سرش باشد. (گشت مسیری بسته از یال‌هاست که ممکن است رأس یا یال تکراری داشته باشد.)

۵. مثلثی با اضلاع a، b و c مفروض است که $a \geq b \geq c$. نشان دهید

$$\sqrt{a(a+b-\sqrt{ab})}+\sqrt{b(a+c-\sqrt{ac})}+\sqrt{c(b+c-\sqrt{bc})} \geq a+b+c$$

۶. چهارضلعی $ABCD$ در دایره‌ی ω محاط است. فرض کنید I_1، I_2، r_1 و r_2 به ترتیب مرکزها و شعاع‌های دوایر محاطی مثلث‌های ACD و ABC باشند و $r_1 = r_2$. ω' دایره‌ای است که بر AB و AD مماس و بر ω در نقطه‌ی T مماس است. مماس از T و A بر ω یک‌دیگر را در K قطع می‌کنند. ثابت کنید I_1، I_2 و K هم‌خط هستند.

موفق باشید.

به نام او

آزمون انتخابی تیم المپیاد ریاضی

چهارشنبه، ۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۲ — امتحان سوم (روز اول) — زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱. P نقطه‌ای دل‌خواه درون مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC و A_1، B_1 و C_1 قرینه‌ی P نسبت به اضلاع مثلث هستند. ثابت کنید مرکز ثقل مثلث $A_1B_1C_1$ داخل مثلث ABC قرار دارد.

۲. n مستطیل در صفحه رسم کرده‌ایم. ثابت کنید از بین $4n$ زاویه‌ی قائمه‌ی ایجادشده، حداقل $[4\sqrt{n}]$ زاویه‌ی مختلف وجود دارد.

۳. الف) آیا دنباله‌ی $a_1 < a_2 < \cdots$ از اعداد طبیعی موجود است که از جایی به بعد، a_m دقیقاً بر $d(m)-1$ تا از اعضای دنباله بخش‌پذیر باشد؟ ($d(n)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های n است.)

ب) آیا دنباله‌ی $a_1 < a_2 < \cdots$ از اعداد طبیعی موجود است که از جایی به بعد، a_m دقیقاً بر $d(m)+1$ تا از اعضای دنباله بخش‌پذیر باشد؟

موفق باشید.

به نام او

آزمون انتخابی تیم المپیاد ریاضی

پنج‌شنبه، ۱۹ اردیبهشت ۱۳۹۲ امتحان سوم (روز دوم) زمان: چهار ساعت و نیم

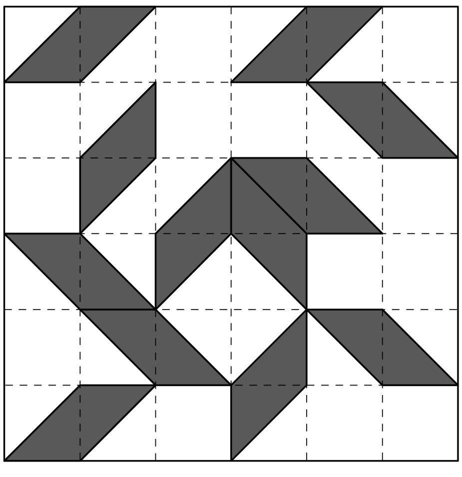
۴. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ دارای این خاصیت است که برای هر زوج x و y از اعداد حقیقی

$$f(x)+f(y)+f(f(x^{۲}+y^{۲}))=۱$$

می‌دانیم که اعداد حقیقی a و b وجود دارند که $f(a)-f(b)=۳$. ثابت کنید اعداد حقیقی c و d می‌توان یافت که $f(c)-f(d)=۱$.

۵. AD و AH به ترتیب نیم‌ساز و ارتفاع مثلث ABC هستند. عمود منصف AD، نیم‌دایره‌های به قطر AB و AC که در خارج از مثلث قرار دارند را به ترتیب در X و Y قطع می‌کند. ثابت کنید چهارضلعی $XYDH$ محاطی است.

۶. یک نوع کاشی متوازی‌الاضلاع شکل از کنار هم قرار دادن ساق دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به طول ساق ۱ تشکیل شده است. می‌خواهیم تعدادی از این نوع کاشی را در کف یک اتاق $n\times n$ قرار دهیم طوری که فاصله‌ی رأس‌های هر کاشی تا ضلع‌های اتاق صحیح باشد و به علاوه هیچ دو کاشی روی هم قرار نگیرند. ثابت کنید حداقل به اندازه‌ی مساحت n از کف اتاق خالی می‌ماند.



موفق باشید.