بسم الله الرحمن الرحیم

راه‌حل آزمون خلاقیت ۱۳۹۱

سؤال شماره ۱. جهت‌گذاری بی‌دور

الف. در هر جهت‌گذاری بدون دور از گراف G، حتماً رأسی مثل v_i وجود دارد که یال‌های متصل به v_i همه به سمت v_i جهت‌گذاری شده اند، زیرا در غیر این صورت همیشه می‌توان از هر رأس (با استفاده از یکی از این یال‌ها) خارج شد که این به دلیل متناهی بودن تعداد کل یال‌ها منجر به ایجاد یک دور در گراف می‌شود. حال با حذف v_i به یک جهت‌گذاری فاقد دور برای $G-v_i$ می‌رسیم که تعدادشان $f(G-v_i)$ است. از طرف دیگر هر جهت‌گذاری بدون دور روی $G-v_i$ با توجه به نکته‌ی بالا با جهت‌دار کردن همه‌ی یال‌های متصل به v_i به سمت آن به یک جهت‌گذاری بدون دور برای G منجر می‌شود. اما دقت کنید که در برخی از جهت‌گذاری‌های روی G بیش از یک رأس با خاصیت گفته‌شده پیدا می‌شود و بنابراین یک جهت‌گذاری روی G ممکن است چند بار در $\sum_{i=1}^{n} f(G-v_i)$ شمرده شود و بنابراین حکم ثابت می‌شود.

ب. هر جهت‌گذاری بدون دور از $G-e$ یک جهت‌گذاری بدون دور از G به ما می‌دهد؛ زیرا اگر فرض کنیم v_i و v_j دو رأس متصل به e هستند، آن‌گاه این که نتوانیم e را از v_j به v_i جهت‌گذاری کنیم، نتیجه می‌دهد که مسیری جهت‌دار از یال‌ها در $G-e$ از v_i به v_j وجود دارد. به طریق مشابه اگر نتوانیم e را از v_i به v_j جهت‌گذاری کنیم، نتیجه می‌دهد که مسیری جهت‌دار از یال‌های در $G-e$ از v_j به v_i وجود دارد. پس اگر نتوانیم هیچ یک از این دو جهت را روی e اعمال کنیم، نتیجه می‌گیریم که مسیری جهت‌دار از v_i به v_j و از v_j به v_i در $G-e$ وجود دارد که این خود به معنی وجود دور در $G-e$ است که تناقض است. پس نشان دادیم که هر جهت‌گذاری بدون دور از $G-e$، یک یا دو جهت‌گذاری بدون دور از G به ما می‌دهد.

اگر هر دو جهت روی e قابل اعمال کردن باشد، این به معنی آن است که در $G-e$ هیچ‌کدام از دو مسیر یاد شده در بالا (از v_i به v_j و از v_j به v_i) وجود ندارد. پس اگر دو رأس v_i و v_j را با هم یکی کنیم تا G/e به دست بیاید، جهت‌گذاری بدون دور روی G یک جهت‌گذاری بدون دور روی G/e به دست می‌دهد. به عکس یک جهت‌گذاری بدون دور روی G/e به یک جهت‌گذاری یک‌تا روی G منجر می‌شود. پس اثبات این قسمت هم به پایان می‌رسد.

ج. کافی است G را گراف کامل nرأسی در نظر بگیرید. در این صورت $f(G)=n!$؛ زیرا طبق الف رأس وجود دارد که همه‌ی یال‌ها به سمت آن جهت‌گذاری شده‌اند و با حذف این رأس به یک جهت‌گذاری بدون دور برای گراف کامل $n-۱$رأسی می‌رسیم و چون همه‌ی رأس‌ها به هم متصل هستند، هم‌زمان نمی‌توانند دو رأس این خاصیت را داشته باشند و بنابراین در (الف) تساوی اتفاق می‌افتد. دقت کنید که همه‌ی $G-v_i$ها در این‌جا گراف کامل با $n-۱$ رأس است و بنابراین طبق (الف) $f(K_n)=nf(K_{n-1})$ که این رابطه‌ی بازگشتی با محاسبه‌ی مقادیر اولیه نشان می‌دهد که $f(K_n)=n!$ است.

دقت کنید که برای یک یال دل‌خواه e از K_n، K_n/e با تعریف قسمت (ب) همان K_{n-1} است. پس با توجه به قسمت

(ب) $f(G-e) = n! - (n-1)! = (n-1)(n-1)!$. در نتیجه

$$\frac{f(G)}{f(G-e)} = \frac{n!}{(n-1)(n-1)!} = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$$

که برای هر $\alpha > 1$ می‌توان n یافت که $\frac{1}{n-1} < \alpha - 1$ و این حکم را نتیجه می‌دهد.

سؤال شماره ۲. نابرابری محدب

ایده‌ی اصلی حل مسئله حذف کردن یک هم‌سایگی از A و B است، زیرا در نزدیکی این نقطه‌ها نمی‌توانیم کران بالایی مناسبی برای $\frac{AA'}{BB'}$ پیدا کنیم. فرض کنید Z نقطه‌ی تقاطع نیم‌خط AB با مرز S باشد و ZB'، AA' را در نقطه‌ی A'' قطع کند. با توجه به محدب بودن S، A'' بین A و A' قرار دارد و بنابراین اگر S'' را مجموعه نقطه‌هایی از S مثل X بگیریم که $AA'' > \frac{۱}{۳}BB'$، S'' زیرمجموعه‌ای از S' خواهد بود. بنابراین برای حل مسئله کافی است نشان دهیم که مساحت S'' حداقل برابر ۶ است. برای این منظور هم با توجه به قضیه‌ی منه‌لائوس داریم:

$$\frac{AA''}{A''X}\cdot\frac{XB'}{B'B}\cdot\frac{BZ}{ZA} = ۱ \Rightarrow \frac{AA''}{A''X}\cdot\frac{XB'}{B'B} = ۲ \Rightarrow \frac{A''X}{AA''} = \frac{۱}{۲}\cdot\frac{XB'}{B'B}$$

برای حذف $A''X$ از این روابط، $\frac{AA''}{A''X}$ را بر حسب AA'' و AX می‌نویسیم. در مورد $B'X$ هم به طریق مشابه عمل می‌کنیم.

$$\frac{AX}{AA''} = ۱ - \frac{۱}{۲}(۱ - \frac{BX}{BB'}) \Rightarrow \frac{AX}{AA''} = \frac{۱}{۲}\cdot\frac{BX}{BB'} + \frac{۱}{۲}$$

$D_۱$ را مجموعه نقطه‌هایی مثل x بگیرید که برای یک مقدار ثابت و مثبت α، $\frac{۱}{۲}\cdot\frac{BX}{BB'} + \frac{۱}{۲} \geq \alpha\frac{BX}{BB'}$ (با انتخاب مناسب α، $D_۱$ یک هم‌سایگی از B خواهد بود). حال اگر $X \notin D_۱$، آن‌گاه

$$\frac{AX}{AA''} < \alpha\frac{BX}{BB'} \Rightarrow \frac{AA''}{BB'} > \frac{۱}{\alpha}\cdot\frac{AX}{BX}$$

حال $D_۲$ را مجموعه نقطه‌هایی مثل X در صفحه بگیرید که $\frac{AX}{BX} < \frac{\alpha}{۳}$ (با انتخاب مناسب α، $D_۲$ یک هم‌سایگی از A خواهد بود). اگر X در هیچ‌یک از $D_۱$ و $D_۲$ نباشد، آن‌گاه $\frac{AA''}{BB'} > \frac{۱}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{۳} = \frac{۱}{۳}$ و در نتیجه $S - D_۱ - D_۲ \subseteq S'' \subseteq S'$. در ادامه سعی می‌کنیم مساحت $D_۱$ و $D_۲$ را محاسبه کنیم. اگر $\alpha < ۳$، $D_۲$ درون یک دایره‌ی آپولونیوس برای دو نقطه‌ی A و B خواهد بود و

$$X \in D_۱ \quad \Leftrightarrow \quad \frac{۱}{۲}\cdot\frac{BX}{BB'} + \frac{۱}{۲} \geq \alpha\frac{BX}{BB'} \Leftrightarrow \frac{BX}{BB'} < \frac{۱}{۲\alpha - ۱}$$

پس اگر $\alpha > ۱$، $D_۱$ یک هم‌سایگی B متجانس با S است. حال اگر α را برابر $\frac{۳}{۲}$ اختیار کنیم، نتیجه می‌گیریم که مساحت $D_۱$ برابر $\frac{۱}{۴}$ مساحت S است که برابر ۲/۵ می‌شود. هم‌چنین اگر C و D اشتراک مرز $D_۲$ با خط AB باشند و C بین A و B قرار داشته باشد، داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{AD}{AD + ۱} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AD = ۱, \quad \frac{AC}{CB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{AC}{۱ - AC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AC = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین قطر $D_۲$ برابر $\frac{۴}{۳} = \frac{۱}{۳} + ۱$ و مساحت آن برابر $\pi^۲(\frac{۲}{۳})$ که عددی کم‌تر از ۱/۵ است. بنابراین مساحت $S - D_۱ - D_۲$ با توجه به مساحت این سه مجموعه حداقل برابر ۶ است که نتیجه می‌دهد مساحت S' هم حداقل ۶ هست.

سؤال شماره ۳. فی اویلر نزولی

دنباله‌ی خواسته‌شده در صورت مسئله را به صورت استقرایی برای مقادیر مختلف n می‌سازیم. برای این منظور دقت کنید که اگر $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ خاصیت مطلوب مسئله را داشته باشد و a عددی طبیعی باشد که نسبت به همه‌ی a_iها اول است، $aa_1 < aa_2 < \cdots < aa_n$ هم خاصیت مطلوب مسئله را دارد؛ زیرا برای هر $1 \le i \le n$، $\phi(aa_i) = \phi(a)\phi(a_i)$.
وجود چنین دنباله‌ای برای $n = 1$ واضح است. حال فرض کنید اعداد طبیعی $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ را یافته‌ایم که $\phi(a_1) > \phi(a_2) > \cdots > \phi(a_n)$. می‌خواهیم دنباله‌ای به طول $n+1$ از اعداد بسازیم که همین خواص را داشته باشند.
فرض کنید p_N بزرگ‌ترین عامل اول $a_1 a_2 \cdots a_n$ باشد (منظور ما از p_m، mامین عدد اول است). اگر x عددی طبیعی باشد که همه‌ی عوامل اول آن از p_N بزرگ‌تر باشند، دنباله‌ی $a_1 x < a_2 x < \cdots < a_n x$ هم با توجه به توضیحات ابتدای راه‌حل خاصیت مطلوب مسئله را دارد . حال اگر y را بتوان به گونه‌ای یافت که $a_1 x > y > \phi(y) > \phi(a_1 x)$، اعداد $y < a_1 x < a_2 x < \cdots < a_n x$ دنباله‌ای از $n+1$ عدد می‌شوند که باز هم خاصیت مسئله را دارا هستند.
برای این منظور ادعا می‌کنیم که می‌توان عدد طبیعی x یافت که همه‌ی عوامل اول آن از p_N بزرگ‌تر باشند و به علاوه $\frac{a_1 x}{\phi(a_1 x)} > 4$. در صورت وجود چنین xای می‌توان عدد طبیعی l یافت که $\phi(a_1 x) < 2^{l-1} = \phi(2^l) < 2^l < a_1 x$ (چرا؟) و اگر y را برابر 2^l قرار دهیم کار تمام می‌شود.
حال برای یافتن x با خاصیت مورد نظر، برای هر عدد طبیعی مثل m، x_m را برابر $p_{N+1} p_{N+2} \cdots p_{N+m}$ می‌گیریم، در این صورت

$$\phi(a_1 x_m) = \phi(a_1)\phi(x_m) = a_1 (p_{N+1} - 1)(p_{N+2} - 1) \cdots (p_{N+m} - 1)$$

و بنابراین

$$\frac{x_m}{\phi(x_m)} = \prod_{i=N+1}^{N+m} \frac{p_i}{p_i - 1} = \prod_{i=N+1}^{N+m} \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) \ge \sum_{i=N+1}^{N+m} \frac{1}{p_i - 1} > \sum_{i=N+1}^{N+m} \frac{1}{p_i}$$

اما مجموع $\sum_{i=N+1}^{N+m} \frac{1}{p_i}$ با زیاد شدن m از هر مقداری بزرگ‌تر می‌شود[1]. پس می‌توان عدد طبیعی به اندازه‌ی کافی بزرگ M یافت که $\frac{x_M}{\phi(x_M)} > 4\frac{\phi(a_1)}{a_1}$ و این نتیجه می‌دهد که x_M خاصیت مورد نظر ما را دارد.

[1] این حکم معروفی است که مجموع معکوس اعداد اول، برابر بی‌نهایت می‌شود و اثبات‌های مختلفی برای آن وجود دارد. برای یافتن اثبات‌هایی از آن می‌توانید به "کتاب اثبات" مراجعه کنید.

سؤال شماره ۴. سکه‌های تقلبی

به وضوح اگر در n کیسه با k بار وزن کردن بتوان کیسه‌ی تقلبی را پیدا کرد، در کم‌تر از n کیسه هم با k بار وزن کردن می‌توان این کار را انجام داد. $f(k)$ را بیش‌ترین تعداد کیسه‌ای بگیرید که با حداکثر k مرتبه استفاده از ترازو، بتوان کیسه‌ی تقلبی را در بین آن‌ها یافت. هدف این است که $f(k)$ را برای مقادیر مختلف k به دست بیاوریم.
ابتدا نشان می‌دهیم $f(1) = 14$. فرض کنید ۱۴ کیسه داشته باشیم. از کیسه‌ی iام، $i - 1$ سکه روی ترازو قرار می‌دهیم. در این صورت اگر مجموع وزن کیسه‌ها برابر $910 - k$ شد می‌فهمیم که k سکه‌ی تقلبی داشته‌ایم و بنابراین سکه‌های تقلبی مربوط به کیسه‌ی $k + 1$ام است. توجه کنید که ۹۱۰ برابر حاصل‌جمع $10 + 20 + \cdots + 130$ است.
حال فرض کنید که تعدادی کیسه داریم که با یک بار وزن کردن می‌توانیم کیسه‌ی تقلبی را تشخیص دهیم. فرض کنید از a_0تا از کیسه‌ها صفر سکه، از a_1تا یک سکه، ... و به همین ترتیب از a_mتا از کیسه‌ها، m سکه روی ترازو قرار دهیم. با توجه به محدودیت تعداد سکه‌ها در هر بار توزین

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + ma_m \leq 100 \quad (*)$$

از طرف دیگر نمی‌توان از دو کیسه به تعداد مساوی سکه برداشت. زیرا در صورتی که از دو کیسه تعداد مساوی سکه روی ترازو قرار دهیم با وزن کردن‌مان نمی‌توانیم بین آن دو کیسه تفاوتی قائل شویم. پس برای هر عدد صحیح $i \geq 0$، $a_i \leq 1$.
حال با این مفروض‌ها می‌خواهیم کاری کنیم که عبارت $a_0 + a_1 + \cdots + a_m$ بیشینه شود. برای این منظور با توجه به این که ضریب a_k در عبارت $(*)$ برابر k است، به‌تر است a_0 بیش‌ترین مقدار خودش را داشته باشد، سپس a_1 بیش‌ترین مقدار خودش را داشته باشد، سپس a_2 و به همین ترتیب حداکثر ۱۴تا از a_iها می‌توانند ناصفر باشند. به عبارت دقیق‌تر فرض کنید که در حالتی مقدار مجموع a_iها بیشینه می‌شود، kتا از آن‌ها مثل $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_k}$ برابر یک و بقیه برابر صفر باشند. دقت کنید که اگر به جای این انتخاب، مقدار a_0، a_1،... و a_{k-1} را برابر یک و بقیه را برابر صفر انتخاب کنیم، مجموع a_iها تغییر نمی‌کند ولی سمت چپ عبارت $(*)$ کم‌تر می‌شود. بنابراین کافی است به دنبال جواب در انتخابی از a_iها بگردیم که مقادیر a_iها تا جایی برابر یک و از آن‌جا به بعد برابر صفر باشد. چون $1 + 2 + \cdots + 13 = 91$، این بیش‌ترین مقدار برابر ۱۳ می‌شود و لذا $f(1) = 14$.
حال برای به دست آوردن $f(2)$ مجدداً نابرابری $(*)$ را داریم و برای هر $i \geq 0$، $a_i \leq 14$. باز هم به همان دلیل بالا باید ابتدا a_0، سپس a_1، سپس a_2 و به همین ترتیب بقیه بیش‌ترین مقدار خود را اتخاذ کنند. بیش‌ترین مقدار $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ در این حالت، زمانی حاصل می‌شود که $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 14$ و $a_4 = 4$ و بقیه برابر صفر باشند. پس $f(2) = 60$.
برای $f(3)$ مجدداً با استدلال‌های مشابه نتیجه می‌شود که $a_0 = a_1 = 60$، $a_2 = 20$ و بقیه برابر صفر هستند. پس $f(3) = 140$.
برای مقادیر $k > 3$، چون $f(k) \geq 100$، در مورد نابرابری $*$ دو شرط $a_0 \leq f(k-1)$ و برای هر $i \geq 1$، $a_i \leq 100$. بنابراین بیش‌ترین مقدار مجموع a_iها زمانی حاصل می‌شود که $a_0 = f(k-1)$، $a_1 = 100$ و بقیه برابر صفر باشند. پس داریم:

$$f(k) = f(k-1) + 100, \forall k \geq 4$$

یعنی در کل جواب سؤال به صورت زیر است:

- اگر $1 \leq n \leq 14$، حداقل یک بار وزن کردن لازم است.
- اگر $15 \leq n \leq 60$، حداقل دو بار وزن کردن لازم است.
- اگر $61 \leq n \leq 140$، حداقل سه بار وزن کردن لازم است.
- و اگر برای یک عدد طبیعی k، $100k + 40 < n \leq 100(k+1) + 40$، حداقل k بار وزن کردن لازم است.

سؤال شماره ۵. چندجمله‌ای‌های دوری

تعریف کنید

$$Q(x,y,z) = P(x,y,z) + P(y,x,z)$$

$$R(x,y,z) = P(x,y,z) - P(y,x,z)$$

واضح است که چندجمله‌ای Q متقارن و چندجمله‌ای R پادمتقارن (یعنی با جابه‌جا کردن هر دو متغیر، مقدار آن منفی می‌شود). دقت کنید که $R(x,x,z) = 0$. پس R بر $x-y$ بخش‌پذیر است. مشابهاً $R(x,y,y) = R(x,y,x) = 0$، پس R بر $y-z$ و $z-x$ نیز بخش‌پذیر است. پس چندجمله‌ای S وجود دارد که

$$R(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x)S(x,y,z)$$

هم‌چنین به وضوح S متقارن است. پس داریم $P = \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}(x-y)(y-z)(z-x)S$. از طرفی می‌دانیم که هر چندجمله‌ای متقارن را می‌توان بر حسب چندجمله‌ای‌های متقارن مقدماتی نوشت[2]. یعنی بر حسب $P_1 = x+y+z$، $P_2 = xy+yz+zx$ و $P_3 = xyz$. اکنون اگر قرار دهیم $P_4 = (x-y)(y-z)(z-x)$ حکم به وضوح نتیجه می‌شود.

[2] این حکم به قضیه‌ی چندجمله‌ای‌های متقارن اولیه معروف است و این قضیه بیان می‌کند که نمایش یک چندجمله‌ای متقارن برحسب چندجمله‌ای‌های متقارن مقدماتی که به آن‌ها چندجمله‌ای‌های متقارن اولیه هم گفته می‌شود، یک‌تا است.

سؤال شماره ۶. مساحت چندضلعی محدب شبکه‌ای

یک nضلعی محدب شبکه‌ای با رئوس $A_1, A_2, \ldots, A_n$ را «خوب» می‌نامیم، هرگاه بردارهای $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ برای $1 \leq i \leq n-1$ در ربع اول دستگاه مختصات واقع باشند. کم‌ترین مقدار ممکن برای مساحت nضلعی‌های خوب را با $g(n)$ نمایش می‌دهیم. ادعا می‌کنیم $g(\frac{n}{4}) \leq f(n) \leq g(n)$. و بنابراین کافی است که حکم‌های مسئله را برای $g(n)$ ثابت کنیم. نابرابری سمت راست واضح است. برای اثبات نابرابری سمت چپ، برای هر nضلعی محدب شبکه‌ای مثل P، پایین‌ترین، بالاترین، چپ‌ترین و راست‌ترین رئوس آن را در نظر بگیرید. این چهار رأس (که ممکن است با هم برابر هم باشند) P را به تعدادی کمان تقسیم می‌کنند که یکی از آن‌ها حداقل $\frac{n}{4}$ رأس دارد. مساحت پوش محدب این رأس‌ها حداقل $g(\frac{n}{4})$ است و به این ترتیب ادعا به طور کامل ثابت می‌شود.

لم. مساحت nضلعی خوب P که با بردارهای $u_1, \ldots, u_{n-1}$ ساخته شده است برابر است با $\frac{1}{2}\sum_{i<j}|u_i \times u_j|$.
$(u_i = \overrightarrow{A_iA_{i+1}})$

اثبات. فرض کنید A_1 مبدأ مختصات باشد. مساحت مثلث $A_1A_iA_{i+1}$ برابر است با $\frac{1}{2}|u_i \times A_i| = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1}|u_i \times u_j|$ (توجه کنید که همه‌ی ضرب خارجی‌ها علامت یک‌سانی دارند). با جمع زدن این تساوی‌ها حکم ثابت می‌شود. $\square$

حال به مسئله‌ی اصلی برمی‌گردیم:

الف. قرار دهید $u_i = (1, i)$. چون شیب‌های $u_1, \ldots, u_{n-1}$ صعودی هستند، چندضلعی ساخته شده با آن‌ها یک چندضلعی خوب است. پس طبق لم بالا مساحت آن برابر است با:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n-1}|u_i \times u_j| = \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n-1}(j-i) = \frac{1}{2}\sum_{1\leq j\leq n-1}\frac{j(j-1)}{2} \\ &\leq \frac{1}{4}\sum_{1\leq j\leq n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} \end{aligned}$$

و $O(n^3) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$. پس قسمت اول ثابت شد.

ب. طبق لم بالا با توجه به این که $|u_i \times u_j|$ عددی طبیعی است، مساحت هر nضلعی خوب دست‌کم $\binom{n-1}{2}$ است. پس $g(n) \geq \binom{n-1}{2}$ و $\binom{n-1}{2} = \Omega(n^2)$. پس اثبات این قسمت هم به پایان می‌رسد.

ج. کافی است که ادعای زیر را ثابت کنیم:

ادعا. برای هر عدد طبیعی n به اندازه کافی بزرگ، مساحت هر $(n+2)$ضلعی خوب حداقل $\frac{1}{24}n^{\frac{5}{2}}$ است.

با توجه به لم، حکم زیر ادعای بالا را نتیجه خواهد داد.

ادعا. برای عدد طبیعی و به اندازه‌ی کافی بزرگ n و بردارهای صحیح $u_1, u_2, \ldots u_{n+1}$ با شیب‌های متفاوت داریم:

$$\sum_{i<j}|u_i \times u_j| \geq \frac{1}{12}n^{\frac{5}{2}}.$$

اگر برای هر $1 \leq i \leq n+1$ داشته باشیم $\sum_j |u_i \times u_j| \geq \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}$ حکم از جمع زدن این روابط نتیجه می‌شود. پس فرض کنید چنین نباشد. حال بدون کاسته شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد:

$$\sum_i |u_i \times u_{n+1}| < \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}.$$

دقت کنید که در این‌جا فرض صعودی بودن شیب‌ها را نداریم. برای هر i، تعریف می‌کنیم $C_i = \{u_l : |u_l \times u_{n+۱}| = i\}$ و k_i را تعداد اعضای C_i می‌گیریم. می‌دانیم $\sum_i k_i = n$. اعضای C_i روی دو خط موازی با $u_{n+۱}$ قرار دارند. بنابراین برای هر $j \leq n$، از بین مقادیر $|u_j \times u_l|$ برای $u_l \in C_j$ حداکثر چهار مقدار می‌توانند با هم برابر باشند (به جز مقدار صفر که تنها در صورتی که $u_j \in C_i$ دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود و در غیر این صورت ظاهر نخواهد شد). حال چون این مقادیر صحیح هستند داریم:

$$\sum_{u_l \in C_i} |u_j \times u_l| \geq ۴\binom{\frac{k_i}{۴}}{۲}.$$

پس:

$$\sum_{l \leq n} |u_j \times u_l| \geq ۴\sum_i \binom{\frac{k_i}{۴}}{۲} = \frac{۱}{۸}\sum_i k_i^۲ - \frac{n}{۲},$$

و

$$\sum_{j,l} |u_j \times u_l| \geq \frac{n}{۸}\sum_i k_i^۲ - \frac{n^۲}{۲},$$

اما $\sum_i k_i = n$ و $\sum ik_i \leq \frac{۱}{۶}n^{\frac{۲}{۲}}$. پس طبق لم زیر می‌فهمیم $\sum k_i^۲ \geq \frac{۳}{۲}n^{\frac{۲}{۲}}$ و لذا برای nهای به اندازه‌ی کافی بزرگ خواهیم داشت:

$$\sum_{j,l} |u_j \times u_l| \geq \frac{۳}{۱۶}n^{\frac{۵}{۲}} - \frac{n^۲}{۲} \geq \frac{۱}{۶}n^{\frac{۵}{۲}}$$

و به این ترتیب اثبات ادعا به پایان می‌رسد. حال لم اشاره‌شده را بیان و اثبات می‌کنیم:

لم. فرض کنید $k_۱, k_۲, \ldots, k_n$ اعداد حقیقی نامنفی باشند که $\sum k_i = a$ و $\sum ik_i \leq b$. در این صورت $\sum k_i^۲ \geq \frac{a^۳}{۴b}$.

اثبات. فرض کنید مقادیر a و b ثابت باشند و k_i تغییر می‌کنند. با استفاده از خواص پیوستگی می‌توان فرض کرد k_iها در شرایط مسئله صدق می‌کنند و $\sum k_i^۲$ کم‌ترین مقدار ممکن را دارد. در این حالت حتماً k_iها نزولی هستند زیرا اگر $k_i < k_j$ برای $i < j$، می‌توان به جای هر دو k_i و k_j مقدار $\frac{k_i+k_j}{۲}$ را قرار داد و مقدار $\sum k_i^۲$ کم‌تر می‌شود. ادعا می‌کنیم k_iها باید زمانی که به صفر نرسیده‌اند، قسمتی از یک تصاعد حسابی باشند. فرض کنید $k_{j-۱}, k_j, k_{j+۱}$ سه عنصر متوالی ناصفر از دنباله باشند که تشکلیل تصاعد حسابی نداده اند. در این صورت این سه مقدار را با $k_{j-۱} + x, k_j - ۲x, k_{j+۱} + x$ عوض می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که دنباله‌ی جدید هم در فرض‌ها صدق می‌کند. حال تفاوت مقدار $\sum k_i^۲$ در دو حالت برابر است با:

$$\begin{aligned}\Delta &= \Big((k_{j-۱}+x)^۲ + (k_j - ۲x)^۲ + (k_{j+۱}+x)^۲\Big) - \Big(k_{j-۱}^۲ + k_j^۲ + k_{j+۱}^۲\Big)\\ &= ۶x^۲ + ۲x(k_{j-۱} - ۲k_j + k_{j+۱}).\end{aligned}$$

با توجه به این که ضریب x در این عبارت ناصفر است، می‌توان با انتخاب x به مقدار کافی کوچک و با علامت مخالف کاری کرد که مقدار Δ منفی شود. پس اعضای ناصفر دنباله باید تشکیل تصاعد حسابی دهند. با تغییر n در صورت لزوم می‌توان فرض کرد که همه‌ی k_iها ناصفر هستند و بنابراین تشکیل یک تصاعد حسابی نزولی می‌دهند. یعنی اعداد حقیقی و نامنفی r, s هستند که $k_i = r - si$. پس:

$$\begin{aligned}a &= nr - s\sum i\\ c &= r\sum i - s\sum i^۲ \quad \leq \quad b.\end{aligned}$$

c) را با همین عبارت تعریف کنید.) در این حالت با کمی محاسبه به دست می‌آید:

$$\sum k_i^{۲} = ra - sc$$

. حال مقادیر r و s از دستگاه معادلات بالا برحسب a و c قابل محاسبه‌اند:

$$r = \frac{a\sum i^{۲} - c\sum i}{n\sum i^{۲} - (\sum i)^{۲}}\ , \quad s = \frac{a\sum i - nc}{n\sum i^{۲} - (\sum i)^{۲}}.$$

طبق نابرابری حسابی مربعی داریم:

$$\sum k_i^{۲} \geq \frac{(\sum k_i)^{۲}}{n} = \frac{a^{۲}}{n}.$$

و چون $r - sn \geq ۰$ خواهیم داشت:

$$\begin{array}{rc} & a\sum i^{۲} - c\sum i - an\sum i + n^{۲}c \geq ۰ \\ \Rightarrow & a(\frac{n^{۲}(n+۱)}{۲} - \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}) \leq c(n^{۲} - \frac{n(n+۱)}{۲}) \leq \frac{cn(n+۱)}{۲} \\ \Rightarrow & a(n - \frac{۲n+۱}{۳}) \leq c \\ \Rightarrow & n \leq ۳\frac{c}{a} + ۱ \leq ۴\frac{c}{a}. \end{array}$$

که در نابرابری آخر از رابطه‌ی بدیهی $c \geq a$ استفاده کردیم ($c = \sum ik_i \geq \sum k_i = a$). با جای‌گذاری این نامساوی در نابرابری قبلی به دست می‌آید که

$$\sum k_i^{۲} \geq \frac{a^{۲}}{n} = \frac{a^{۳}}{an} \geq \frac{a^{۳}}{۴c} \geq \frac{a^{۳}}{۴b}$$

که همان حکم مورد نظر است. □

ادعا. مساحت هر $(n+۲)$ضلعی خوب حداقل $\frac{۱}{۲۰۰}n^{۳}$ است. پس $f(n) = \Theta(n^{۳})$.

برای اثبات این ادعا کافی است نشان دهیم برای بردارهای صحیح $u_۱, u_۲, \dots, u_{n+۱}$ با شیب‌های متفاوت داریم:

$$\sum_{i<j} |u_i \times u_j| \geq \frac{۱}{۱۰۰}n^{۳}.$$

شبیه ادعای قبلی کافی است فرض کنیم $\sum\limits_i |u_i \times u_{n+۱}| \leq \frac{۱}{۵۰}n^{۲}$. C_i و k_i را هم مشابه قبل تعریف می‌کنیم. این بار کران به‌تری برای $\sum_{u_l \in C_i} |u_j \times u_l|$ می‌یابیم. اگر u_l و $u_{l'}$ روی خطی موازی $u_{n+۱}$ باشند، آن‌گاه $u_l - u_{l'}$ مضرب صحیحی از $u_{n+۱}$ است (می‌توانیم فرض کنیم که $u_{n+۱}$ مضرب صحیحی از هیچ بردار دیگری نیست، در غیر این صورت به جای آن یک بردار هم‌جهت و با طول کم‌تر قرار خواهیم داد). پس $u_j \times u_l - u_j \times u_{l'}$ مضربی از $u_j \times u_{n+۱}$ است. با استفاده از این موضوع و این که اعضای C_i روی دو خط موازی با $u_{n+۱}$ قرار دارند، به راحتی نتیجه می‌شود که:

$$\sum_{u_l \in C_i} |u_j \times u_l| \geq ۴j\binom{\frac{k_i}{۴}}{۲}$$

که در این جا فرض کرده‌ایم، $u_j \in C_J$. با جمع زدن این نابرابری‌ها روی اندیس i داریم:

$$\sum_{l \leq n} |u_j \times u_l| \geq ۴j\sum_i \binom{\frac{k_i}{۴}}{۲}.$$

و در نهایت با جمع زدن روی اندیس j خواهیم داشت:

$$\sum_{j,l} |u_j \times u_l| \geq ۴(\sum ik_i)\sum_i \binom{\frac{k_i}{۴}}{۲} = (\sum ik_i)\left(\frac{۱}{۸}\sum k_i^{۲} - \frac{n}{۲}\right).$$

از آن‌جایی که $\sum k_i = n$ و $\sum ik_i \leq \frac{۱}{۵۰}n^{۲}$ با توجه به لم دوم، $\sum k_i^{۲} \geq \frac{۲۵}{۲}n$ و در نتیجه:

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{j,l} |u_j \times u_l| & \geq & (\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۲۵})(\sum ik_i)(\sum k_i^{۲}) \\ & \geq & \frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۲۵})(\sum k_i)^{۳} \quad \geq \quad \frac{۱}{۵۰}n^{۳}. \end{array}$$

سؤال شماره ۷. یکی رو، یکی زیر!

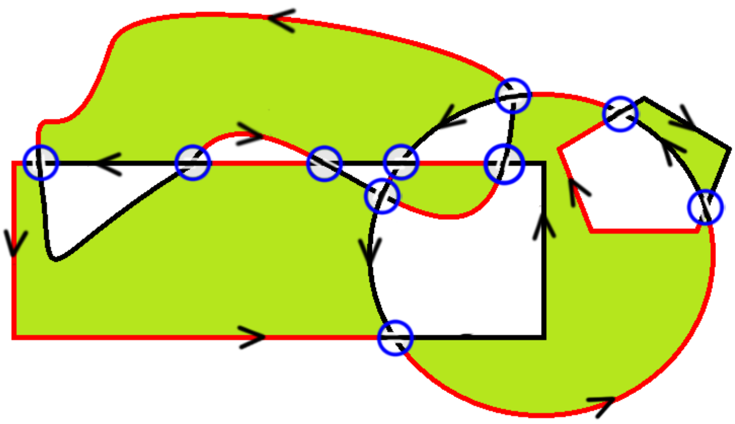
نشان می‌دهیم برای هر تعداد اتوبان این کار امکان‌پذیر است. اتوبان‌ها را C_1، C_2، ...، C_n و گراف حاصل از اجتماعِ اتوبان‌ها را G بنامید.

لم. می‌توان ناحیه‌های G را با دو رنگ رنگ کرد طوری که هیچ دو ناحیه‌ی مجاوری هم‌رنگ نباشند. (دو ناحیه را مجاور گوییم اگر در یک یال مشترک باشند.)

اثبات. حکم را با استقرا روی تعداد رأس‌های G ثابت می‌کنیم. یک رنگ‌آمیزی با خاصیتِ موردِ نظر را «مجاز» می‌نامیم. در بین همه‌ی مسیرهای بسته در گرافِ G که تماماً در یکی از اتوبان‌ها قرار دارند کوتاه‌ترینِ آن‌ها را در نظر بگیرید و آن را C بنامید و فرض کنید مثلاً $C \subset C_1$. با توجه به نحوه‌ی انتخاب، C خودش را قطع نمی‌کند، پس صفحه را به دو ناحیه‌ی درون و بیرون تقسیم می‌کند. از طرفی $C_1 - C$ یک خم بسته است (که البته ممکن است تهی باشد). حال H را گرافی بگیرید که از اجتماعِ $C_1 - C$ و C_2 و ... و C_n به دست می‌آید. بنابر فرض استقرا، نواحیِ H را می‌توان رنگ‌آمیزی مجاز کرد. اکنون خمِ C را به گرافِ H اضافه کنید و رنگِ نقاطِ درونِ خمِ C را برعکس کنید. به راحتی می‌توان دید که این یک رنگ‌آمیزی مجاز برای G می‌دهد.

پایه‌ی استقرا در حالتی است که G تهی باشد. در این حالت فقط یک ناحیه در صفحه داریم آن را به یک رنگ می‌کنیم. $\square$

حال با استفاده از این لم به ادامه‌ی راه‌حل می‌پردازیم. اکنون مشخص می‌کنیم که هر تقاطع چگونه باید پل‌گذاری شود. ابتدا یک رنگ‌آمیزیِ مجاز برای G با سفید و سیاه در نظر بگیرید. روی هر اتوبان یک جهتِ دل‌خواه قرار دهید. پس یال‌های گرافِ G جهت‌دار شده‌اند. اکنون دو نوع یال داریم. یال‌هایی را «نوع اول» می‌نامیم که وقتی روی آن‌ها حرکت می‌کنیم ناحیه‌ی سمت راستمان سفید رنگ است و سایر یال‌ها را «نوع دوم» می‌نامیم (در شکل زیر یال‌های نوع اول قرمز رنگ شده‌اند). اکنون در انتهای هر یالِ نوعِ اول یک پل در راستای همان یال می‌سازیم. این روش سازگار است یعنی از هر دو یالی که به یک تقاطع وارد می‌شوند یکی از نوع اول و یکی از نوع دوم است، بنابراین در هر تقاطع دقیقاً یک پل ساخته می‌شود. همچنین این پل‌گذاری خاصیت مورد نظر مسئله را دارد زیرا وقتی روی یک اتوبان حرکت می‌کنیم یال‌ها یکی در میان از نوع اول و دوم هستند.



سؤال شماره ۸. مجموعه‌های اولیه

الف. فرض کنید چنین مجموعه‌ی Sای موجود باشد و n عضوی از S نباشد. این نتیجه می‌دهد که دقیقاً nتا از اعضای S نسبت به n اول هستند. در نتیجه بی‌نهایت عدد اول وجود دارد که در S نیستند. دو تا از آن‌ها مثل p و q را در نظر بگیرید. چون $p \notin S$، پس تنها pتا از اعضای S عامل p ندارند. در نتیجه بی‌نهایت m طبیعی وجود دارد که p^m عضو S است. اما $(p^m, q) = ۱$. پس S بی‌نهایت عضو دارد که نسبت به q اول هستند و این تناقض است. در نتیجه چنین مجموعه‌ای وجود ندارد.

ب. مجموعه‌ی S را به صورت گام به گام می‌سازیم. فرض کنید $S = \{a_۱ \leq a_۲ \leq \cdots\}$. در ابتدا همه‌ی a_iها برابر یک هستند و در هرگام عوامل اولی را در a_iها ضرب می‌کنیم تا به مقدار مطلوب برسند. در واقع برای هر عدد طبیعی n، در مرحله‌ی nام:

۱. اعداد اول جدیدی به نام $p_{۲n}$ و $p_{۲n-۱}$ را در a_n ضرب می‌کنیم، تا مقدار آن از $a_{n-۱}$ بیش‌تر شود.

۲. تعداد اعضای مجموعه‌ی $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۱}\}$ که نسبت به a_n اول هستند، را b_n بگیرید. پس $b_n < n$. حال t_n را برابر $a_n - b_n$ تعریف می‌کنیم.

۳. با توجه به نحوه‌ی ساخت ما در پایان این دو عمل هنوز بی‌نهایت a_i با اندیس $i > n$ وجود دارند که نسبت به a_n اول هستند. در بین این اعداد t_n عدد نخست را رها می‌کنیم. فرض کنید t_nامین عدد، a_m باشد. حال در دنباله‌ی $a_{m+۱}, a_{m+۲}, \ldots$، $۲^{n-۱}$ جمله‌ی نخست را در $p_{۲n-۱}$، $۲^{n-۱}$ جمله‌ی بعدی را در $p_{۲n}$، $۲^{n-۱}$ جمله‌ی بعدی را در $p_{۲n-۱}$ ضرب می‌کنیم و همین عمل را تا بی‌نهایت ادامه می‌دهیم.

به این ترتیب در پایان مرحله‌ی nام:

- دقیقاً $b_n + t_n$ یعنی a_n عدد نسبت به a_n اول هستند.
- برای هر nتایی مثل $(q_۱, q_۲, \ldots, q_n)$ از اعداد اول که $q_i \in \{p_{۲i-۱}, p_{۲i}\}$، بی‌نهایت‌تا از a_kها هستند که دقیقاً همین عوامل اول را دارند. پس برای هر a_i، بی‌نهایت جمله از دنباله وجود دارد عوامل اولشان با عوامل اول a_i متفاوت است و به این ترتیب نسبت به a_i اول هستند.